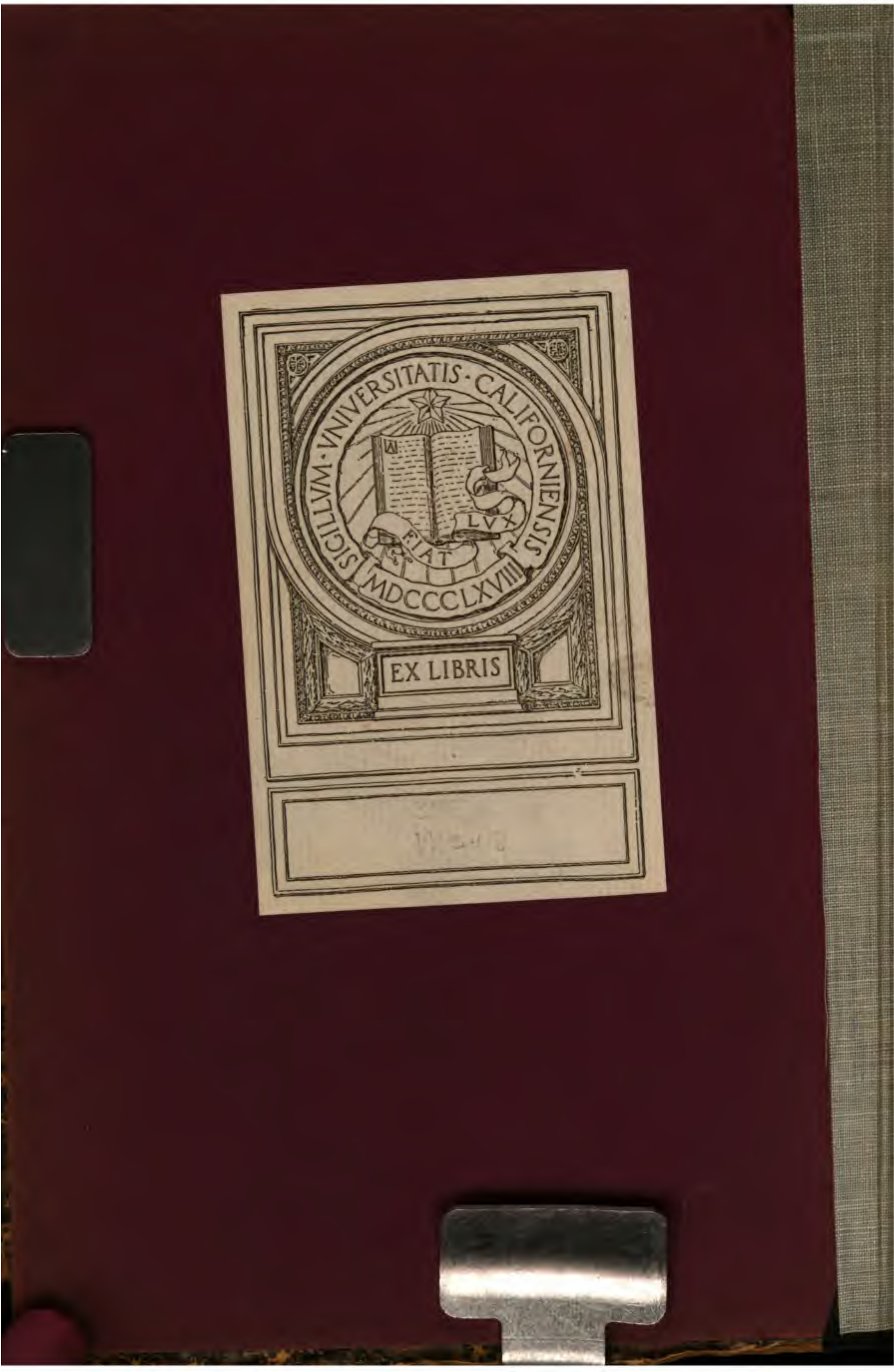



SIGILLVM · VNIVERSITATIS · CALIFORNIENSIS
LVX
FIAT
MDCCCLXVIII
EX LIBRIS





RAUM·ZEIT·MATERIE

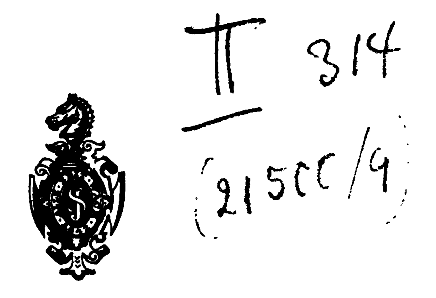
VORLESUNGEN ÜBER ALLGEMEINE RELATIVITÄTSTHEORIE

VON

HERMANN WEYL

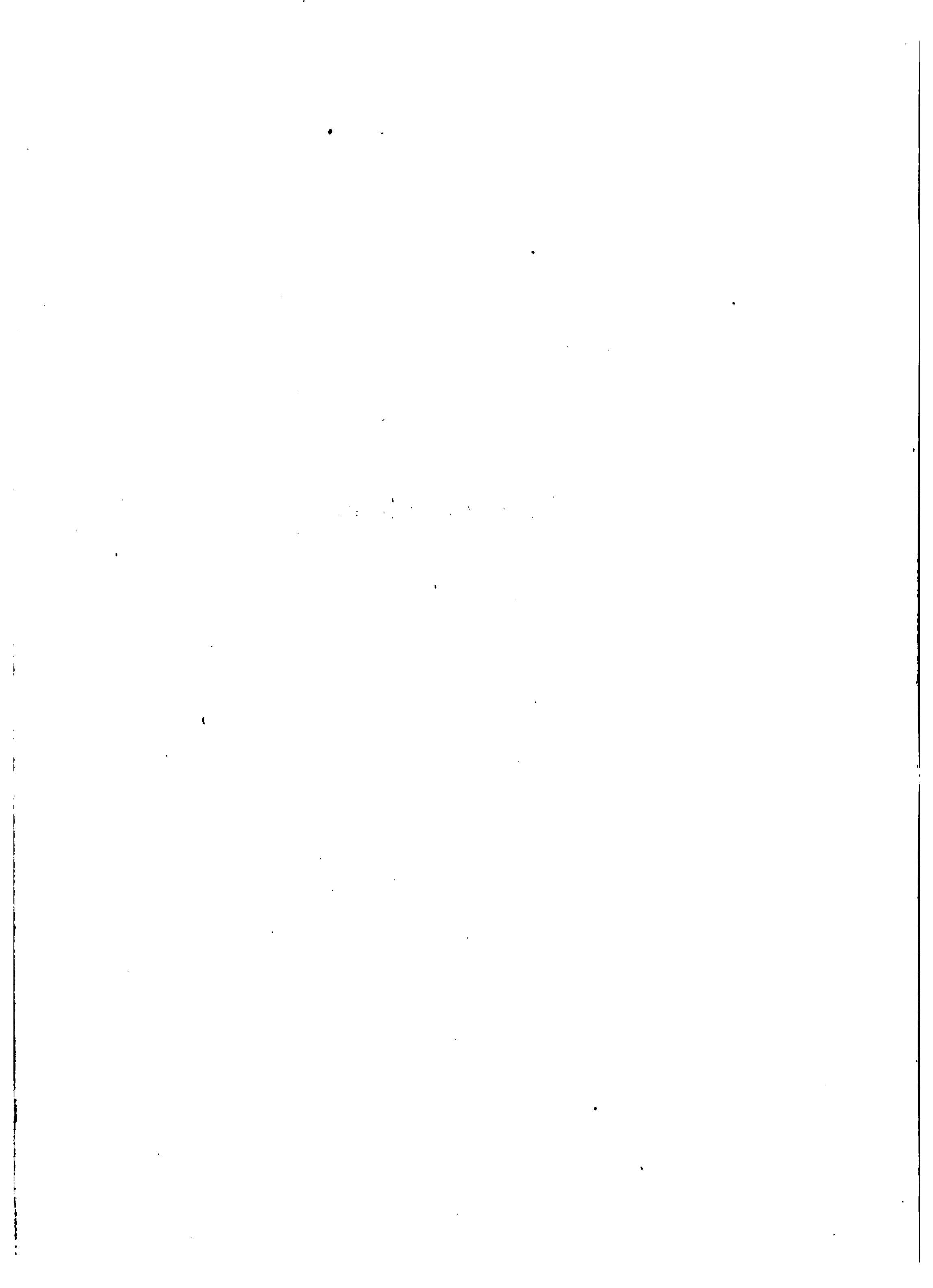
VIERTE, ERWEITERTE AUFLAGE

MIT 15 TEXTFIGUREN



BERLIN
VERLAG VON JULIUS SPRINGER
1921

Meiner Frau gewidmet



Aus dem Vorwort zur ersten Auflage.

Mit der Einsteinschen Relativitätstheorie hat das menschliche Denken über den Kosmos eine neue Stufe erklommen. Es ist, als wäre plötzlich eine Wand zusammengebrochen, die uns von der Wahrheit trennte: nun liegen Weiten und Tiefen vor unserm Erkenntnisblick entriegelt da, deren Möglichkeit wir vorher nicht einmal ahnten. Der Erfassung der Vernunft, welche dem physischen Weltgeschehen innewohnt, sind wir einen gewaltigen Schritt näher gekommen.

Wenngleich in jüngster Zeit eine ganze Reihe mehr oder minder populärer Einführungen in die allgemeine Relativitätstheorie erschienen ist, mangelte es doch bislang an einer systematischen Darstellung. Darum hielt ich es für angezeigt, die vorliegenden, von mir im Sommersemester 1917 an der Eidgen. Technischen Hochschule Zürich gehaltenen Vorlesungen herauszugeben. Zugleich wollte ich an diesem großen Thema ein Beispiel geben für die gegenseitige Durchdringung philosophischen, mathematischen und physikalischen Denkens, die mir sehr am Herzen liegt; dies konnte nur durch einen völlig in sich geschlossenen Aufbau von Grund auf gelingen, der sich durchaus auf das Prinzipielle beschränkt. Aber ich habe meinen eigenen Forderungen in dieser Hinsicht nicht voll Genüge tun können: der Mathematiker behielt auf Kosten des Philosophen das Übergewicht.

Die beim Leser vorausgesetzten Vorkenntnisse beschränken sich auf ein Minimum. Nicht nur die spezielle Relativitätstheorie ist ausführlich abgehandelt, sogar Maxwellsche Theorie und analytische Geometrie sind kurz, unter Herausarbeitung der wesentlichsten Züge, entwickelt. Das lag im Plane des Ganzen. Die Begründung des Tensorkalküls — durch den allein die in Frage stehenden physikalischen Erkenntnisse ihren naturgemäßen Ausdruck finden können — nimmt einen verhältnismäßig breiten Raum ein. So wird das Buch hoffentlich geeignet sein, den Physikern dieses mathematische Hilfsmittel vertrauter zu machen und zugleich als Lehrbuch unter der studierenden Jugend für die neuen Ideen zu wirken!

Den Herren Bär und Hiltbrunner bin ich, dem einen für Korrekturhilfe, dem andern für Anfertigung der Figuren, zu Dank verpflichtet; dem Verlage für die unter den heutigen Umständen bewundernswerte rasche Drucklegung und gute Ausstattung des Buches.

Ribnitz in Mecklenburg, Ostern 1918.

Vorwort zur dritten Auflage.

Obschon dies Buch die Frucht der Erkenntnis in harter Schale bietet, ist es doch manchem, wie mir verschiedene Zuschriften zeigten, ein Trostbüchlein in wirrer Zeit gewesen; ein Aufblick aus dem Trümmerfeld der uns unmittelbar bedrängenden Gegenwart zu den Sternen, das ist: der unzerbrechlichen Welt der Gesetze; Bekräftigung des Glaubens an die Vernunft und eine alle Erscheinungen umspannende, nie gestörte, nie zu störende »harmonia mundi«.

Den Zusammenklang noch reiner zu stimmen, ist mein Bestreben in der neuen, dritten Auflage gewesen. Während die zweite ein unveränderter Abdruck der ersten war — bis auf die Korrektur eines Versehens auf pag. 183 —, habe ich jetzt eine gründliche Umarbeitung vorgenommen, von der vor allem das II. und III. Kapitel betroffen wurden. Die von Herrn Levi-Civita im Jahre 1917 gemachte Entdeckung des Begriffs der infinitesimalen Parallelverschiebung gab den Anstoß zu einer erneuten Untersuchung der mathematischen Grundlagen der Riemannschen Geometrie. Der hier in Kapitel II gegebene Aufbau der reinen Infinitesimalgeometrie, bei welchem sich jeder Schritt in voller Natürlichkeit, Anschaulichkeit und Notwendigkeit vollzieht, ist, glaube ich, das in allen wesentlichen Stücken endgültige Ergebnis dieser Untersuchung. Einige Unvollkommenheiten, welche meiner ersten Darstellung in der Mathematischen Zeitschrift (Bd. 2, 1918) noch anhafteten, sind beseitigt worden. Das IV. Kapitel, dessen Hauptteil der Einsteinschen Gravitationstheorie gewidmet ist, hat zunächst durch Berücksichtigung der in der Zwischenzeit erschienenen wichtigeren Arbeiten, namentlich derjenigen, welche sich auf das Energie-Impulsprinzip beziehen, eine ziemlich tiefgreifende Umgestaltung erfahren. Dann aber ist eine neue, vom Verfasser herrührende Theorie hinzugefügt worden, welche aus der in Kapitel II vollzogenen Erweiterung der geometrischen Grundlage über den Riemannschen Standpunkt hinaus die physikalischen Konsequenzen zieht und sich anheischig macht, aus der Weltgeometrie nicht nur die Gravitations-, sondern auch die elektromagnetischen Erscheinungen abzuleiten. Steckt diese Theorie auch gegenwärtig noch in den Kinderschuhen, so bin ich doch überzeugt, daß ihr der gleiche Wahrheitswert zukommt wie der Einsteinschen Gravitationstheorie — mag nun dieser Wahrheitswert ein unbegrenzter sein oder, wie es wohl wahrscheinlicher ist, begrenzt werden müssen durch die Quantentheorie. —

Herrn Weinstein danke ich für seine mir bei der Durchsicht der Korrekturbogen gewährte Hilfe.

Acla Pozzoli bei Samaden, August 1919.

Vorwort zur vierten Auflage.

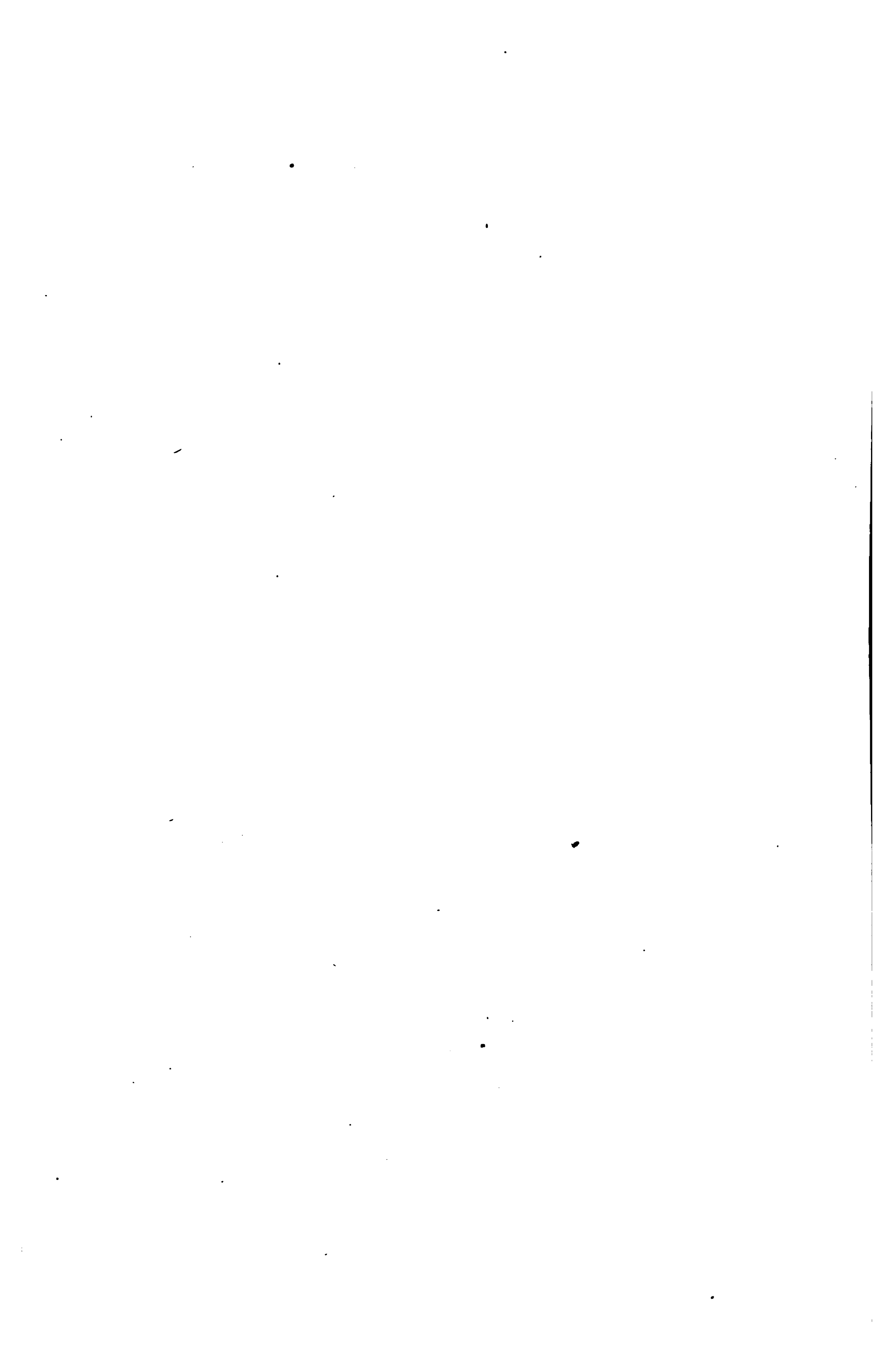
Das Buch hat in der neuen Auflage im ganzen diejenige Gestalt bewahrt, die ich ihm in der vorigen gegeben hatte; doch erfuhr es im einzelnen mancherlei Änderungen und Zusätze. Die wichtigeren derselben seien hier namhaft gemacht. 1. Dem II. Kapitel ist ein Paragraph hinzugefügt worden, in welchem das Raumproblem eine tiefere gruppentheoretische Formulierung findet; es handelt sich darum, die innere Notwendigkeit und Einzigartigkeit der auf einer quadratischen Differentialform beruhenden Pythagoreischen Raummetrik zu begreifen. 2. Der Grund dafür, daß Einstein zwangsweise zu eindeutig bestimmten Gravitationsgleichungen geführt wurde, liegt darin, daß der Krümmungsskalar die einzige Invariante im Riemannschen Raum von gewissem Charakter ist; für diesen Satz ist ein Beweis im Anhang skizziert worden. 3. Im IV. Kapitel werden die neueren experimentellen Untersuchungen zur allgemeinen Relativitätstheorie berücksichtigt, insbesondere die Beobachtungen der Lichtablenkung durch das Gravitationsfeld der Sonne bei Gelegenheit der Sonnenfinsternis vom 29. Mai 1919, deren Ergebnisse jüngst das Interesse der weitesten Kreise für die Relativitätstheorie so mächtig angeregt haben. 4. Der Mieschen Auffassung der Materie stelle ich eine andere gegenüber (siehe namentlich § 32 und § 36), nach welcher die Materie als Grenzsingularität des Feldes erscheint, Ladung und Masse aber als Kraftflüsse im Felde. Damit ist eine veränderte und vorsichtigere Stellungnahme zu dem ganzen Problem der Materie verbunden.

Für den Hinweis auf kleinere wünschenswerte Ausbesserungen bin ich manchem bekannten und unbekannten Leser, für Durchsicht der Korrekturbogen Herrn Prof. Nielsen (Breslau) zu Dank verbunden.

Zürich, November 1920. **Hermann Weyl.**

Inhaltsverzeichnis.

Die Formeln sind in jedem Kapitel durchnumeriert. Formelverweise beziehen sich, wenn nichts anderes bemerkt ist, jeweils auf das gleiche Kapitel.



Einleitung.

Wir pflegen *Zeit und Raum* als die Existenz*formen* der realen Welt, die *Materie* als ihre *Substanz* aufzufassen. Ein bestimmtes Materiestück erfüllt in einem bestimmten Zeitmoment einen bestimmten Raumteil: in der daraus resultierenden Vorstellung der *Bewegung* gehen jene drei Grundbegriffe die innigste Verbindung ein. Von Descartes wurde es als Programm der exakten Naturwissenschaft aufgestellt, alles Geschehen von diesen Grundbegriffen aus zu konstruieren und damit auf Bewegung zurückzuführen. — Die tiefe Rätselhaftigkeit des *Zeitbewußtseins*, des zeitlichen Ablaufs der Welt, des Werdens, ist vom menschlichen Geist, seit er zur Freiheit erwachte, immer empfunden worden; in ihr liegt eines jener letzten metaphysischen Probleme, um dessen Klärung und Lösung Philosophie durch die ganze Breite ihrer Geschichte unablässig gerungen hat. Der *Raum* ward durch die Griechen zum Gegenstand einer Wissenschaft von höchster Klarheit und Sicherheit. An ihm hat sich in der antiken Kultur die Idee der reinen Wissenschaft entfaltet, die Geometrie wurde zu einer der mächtigsten Kundgebungen des jene Kultur beseelenden Prinzips der Souveränität des Geistes. An die Geometrie hat sich, als die kirchlich-autoritative Weltanschauung des Mittelalters in die Brüche ging und die Wogen des Skeptizismus alles Feste hinwegzureißen drohten, der Wahrheitsglaube wie an einen Fels geklammert; und es konnte als das höchste Ideal aller Wissenschaft aufgestellt werden, »more geometrico« betrieben zu werden. Was endlich die *Materie* betrifft, so glaubten wir zu wissen, daß aller Veränderung eine Substanz, eben die Materie, zugrunde liegen müsse, daß jedes Stück der Materie als ein Quantum sich messen lasse und ihr Substanzcharakter seinen Ausdruck finde in dem Gesetz von der Erhaltung des in allen Veränderungen sich gleich bleibenden Materiequantums. Dieses unser bisheriges Wissen von Raum und Materie, durch die Philosophie vielfach als apriorische Erkenntnis von unbedingter Allgemeinheit und Notwendigkeit in Anspruch genommen, ist heute vollständig ins Wanken geraten. Nachdem die Physik unter den Händen Faradays und Maxwells der Materie als eine Realität anderer Kategorie das *Feld* gegenübergestellt hatte, nachdem auf der andern Seite die Mathematik durch ihre logische Minierarbeit im letztvergangenen Jahrhundert in aller Heimlichkeit das Vertrauen in die Evidenz der Euklidischen Geometrie untergraben hatte, kam in unsern Tagen der revolutionäre Sturm zum Ausbruch, der jene Vorstellungen über Raum, Zeit

und Materie, welche bis dahin als die festesten Stützen der Naturwissenschaft gegolten hatten, stürzte; doch nur, um Platz zu schaffen für eine freiere und tiefere Ansicht der Dinge. Diese Umwälzung wurde im wesentlichen vollzogen durch die Gedankenarbeit eines einzigen Mannes, Albert Einstein. Heute scheint die Entwicklung, was die Grundideen betrifft, zu einem gewissen Abschluß gekommen zu sein; doch einerlei ob wir bereits vor einem neuen Definitivum stehen oder nicht — auf jeden Fall muß man sich mit dem Neuen, das da emporgekommen ist, auseinandersetzen. Auch gibt es kein Zurück; die Entwicklung des wissenschaftlichen Gedankens mag über das jetzt Erreichte abermals hinausgehen, aber eine Rückkehr zu dem alten engen und starren Schema ist ausgeschlossen.

An den Problemen, die hier aufgeworfen werden, haben Philosophie, Mathematik und Physik ihren Anteil. Uns soll aber vor allem die mathematisch-physikalische Seite der Fragen beschäftigen; auf die philosophische werde ich nur ganz nebenher eingehen, aus dem einfachen Grunde, weil in dieser Richtung etwas irgendwie Endgültiges bisher nicht vorliegt und ich selber auch nicht imstande bin, auf die hergehörigen erkenntnistheoretischen Fragen solche Antworten zu geben, die ich vor meinem Erkenntnisgewissen voll verantworten könnte. Die Ideen, welche es hier darzustellen gilt, sind nicht aus einer spekulativen Versenkung in die Grundlagen physikalischer Erkenntnis hervorgegangen, sondern haben sich im Ausbau der lebendig vorwärts drängenden Wissenschaft, der die alte Schale zu eng wurde, an konkreten physikalischen Problemen entwickelt; eine Revision der Prinzipien wurde jedesmal erst nachträglich vollzogen und nur so weit, als es gerade die neu aufgetauchten Ideen erheischten. Wie die Dinge heute liegen, bleibt den Einzelwissenschaften nichts anderes übrig, als in diesem Sinne dogmatisch zu verfahren, d. h. in gutem Glauben den Weg zu gehen, auf den sie durch vernünftige, im Rahmen ihrer eigentümlichen Methoden emporkommende Motive gedrängt werden. Die philosophische Klärung bleibt eine große Aufgabe von völlig anderer Art, als sie den Einzelwissenschaften zufällt; da sehe nun der Philosoph zu; mit den Kettengewichten der in jener Aufgabe liegenden Schwierigkeiten behänge und behindere man aber nicht das Vorwärtsschreiten der konkreten Gegenstandsgebieten zugewandten Wissenschaften.

Gleichwohl beginne ich mit einigen *philosophischen* Erörterungen. Als Menschen in der natürlichen Einstellung, in der wir unser tägliches Leben führen, stehen uns in Akten der Wahrnehmung leibhaftig wirkliche Körperdinge gegenüber. Wir schreiben ihnen reale Existenz zu und wir nehmen sie hin als prinzipiell so beschaffen, so gestaltet, so gefärbt usw., wie sie uns da in der Wahrnehmung erscheinen (prinzipiell, d. h. vorbehaltlich aller als möglich zugegebenen Sinnestäuschungen, Spiegelungen, Träume, Halluzinationen usf.). Sie sind umgeben und durchsetzt von einer ins Unbestimmte verschwimmenden Mannigfaltigkeit analoger Wirk-

lichkeiten, die sich alle zusammenfügen zu einer einzigen, immerdar vorhandenen räumlichen Welt, zu der ich selber mit meinem Einzelleib gehöre. Es handle sich hier nur um diese körperlichen Dinge, nicht um all die Gegenständlichkeiten andrer Art, die wir als natürliche Menschen sonst noch uns gegenüber haben: Lebewesen, Personen, Gebrauchsgegenstände, Werte, solche Wesenheiten wie Staat, Recht, Sprache u. dgl. Wohl bei jedem theoretisch gerichteten Menschen beginnt die philosophische Selbstbesinnung damit, daß er irre wird an dieser Weltanschauung des naiven Realismus, auf die ich da eben kurz hingewiesen habe. Man sieht ein, daß eine solche Qualität wie etwa »*grün*« nur als Korrelat der Grün-Empfindung an dem in der Wahrnehmung sich gebenden Gegenstande Existenz besitzt, daß es aber sinnlos ist, sie als eine Beschaffenheit *an sich* daseienden Dingen *an sich* anzuhängen. Diese *Erkenntnis von der Subjektivität der Sinnesqualitäten* tritt bei Galilei (wie bei Descartes und Hobbes) in engster Verbindung auf mit dem Grundsatz der *mathematisch-konstruktiven Methode unserer heutigen qualitätslosen Physik*, nach der z. B. die Farben »in Wirklichkeit« Ätherschwingungen, also Bewegungen sind. Erst Kant vollzog innerhalb der Philosophie mit völliger Klarheit den weiteren Schritt zu der Einsicht, daß nicht nur die sinnlichen Qualitäten, sondern auch der Raum und die räumlichen Merkmale keine objektive Bedeutung im absoluten Sinne besitzen, daß auch *der Raum nur eine Form unserer Anschauung* ist. Innerhalb der Physik ist es vielleicht erst durch die Relativitätstheorie ganz deutlich geworden, daß von dem uns in der Anschauung gegebenen Wesen von Raum und Zeit in die mathematisch konstruierte physikalische Welt nichts eingeht. Die Farben sind also »in Wirklichkeit« nicht einmal Ätherschwingungen, sondern mathematische Funktionsverläufe, wobei in den Funktionen, den drei Raum- und der einen Zeitdimension entsprechend, vier unabhängige Argumente auftreten.

In prinzipieller Allgemeinheit: die wirkliche Welt, jedes ihrer Bestandstücke und alle Bestimmungen an ihnen, sind und können nur gegeben sein als intentionale Objekte von Bewußtseinsakten. Das schlechthin Gegebene sind die Bewußtseinserlebnisse, die ich habe — so wie ich sie habe. Sie bestehen nun freilich keineswegs, wie die Positivisten vielfach behaupten, aus einem bloßen Stoff von Empfindungen, sondern in einer Wahrnehmung z. B. steht in der Tat leibhaft für mich da ein Gegenstand, auf welchen jenes Erlebnis in einer jedermann bekannten, aber nicht näher beschreibbaren, völlig eigentümlichen Weise bezogen ist, die mit Brentano durch den Ausdruck »*intentionales Objekt*« bezeichnet sein soll. Indem ich wahrnehme, sehe ich etwa diesen Stuhl, ich bin durchaus auf ihn gerichtet. Ich »*habe*« die Wahrnehmung, aber erst wenn ich diese Wahrnehmung selber wieder, wozu ich in einem freien Akt der Reflexion imstande bin, zum intentionalen Objekt einer neuen, inneren Wahrnehmung mache, »*weiß*« ich von ihr (und nicht bloß von dem Stuhl) etwas und stelle dies fest, was ich da eben gesagt

habe. In diesem zweiten Akt ist das intentionale Objekt ein *immanentes*, nämlich wie der Akt selber ein reelles Bestandstück meines Erlebnisstromes; in dem primären Wahrnehmungsakt aber ist das Objekt *transzendent*, d. h. zwar gegeben in einem Bewußtseinserlebnis, aber nicht reelles Bestandstück. Das Immanente ist *absolut*, d. h. es ist genau das, als was ich es da habe, und dieses sein Wesen kann ich mir eventuell in Akten der Reflexion zur Gegebenheit bringen. Hingegen haben die transzendenten Gegenstände nur ein *phänomenales* Sein, sie sind Erscheinendes — in mannigfaltigen Erscheinungsweisen und »Abschattungen«. Ein und dasselbe Blatt sieht so oder so groß aus, erscheint so oder so gefärbt, je nach meiner Stellung und der Beleuchtung; keine dieser Erscheinungsweisen kann für sich das Recht beanspruchen, das Blatt so zu geben, wie es »an sich« ist. — In jeder Wahrnehmung liegt nun weiter unzweifelhaft die *Thesis der Wirklichkeit* des in ihr erscheinenden Objekts, und zwar als Teil und inhaltliche Fortbestimmung der Generalthesis einer wirklichen Welt. Aber indem wir von der natürlichen zur philosophischen Einstellung übergehen, machen wir, über die Wahrnehmung reflektierend, diese Thesis sozusagen nicht mehr mit; wir konstatieren kühl, daß in ihr etwas als wirklich »vermeint« ist. Der Sinn und das Recht dieser Setzung wird uns jetzt gerade zum Problem, das von dem Bewußtseins-Gegebenen aus seine Lösung finden muß. Ich meine also keineswegs, daß die Auffassung des Weltgeschehens als eines vom Ich produzierten Bewußtseins-Spiels gegenüber dem naiven Realismus die höhere Wahrheit enthalte; im Gegenteil. Nur darum handelt es sich, daß man einsehe, das Bewußtseins-Gegebene ist der Ausgangspunkt, in den wir uns stellen müssen, um Sinn und Recht der Wirklichkeitssetzung auf eine absolute Weise zu begreifen. Analog steht es auf logischem Gebiet. Ein Urteil, das ich fälle, behauptet einen Sachverhalt; es setzt diesen Sachverhalt als wahr. Auch hier entsteht die philosophische Frage nach dem Sinn und Recht dieser Wahrheitsthesis; auch hier leugne ich nicht die Idee der objektiven Wahrheit, aber sie wird zum Problem, das ich von dem absolut Gegebenen aus zu begreifen habe. — Das »reine Bewußtsein« ist der Sitz des philosophischen a priori. Hingegen muß und wird die philosophische Klärung der Wirklichkeitsthesis ergeben, daß keiner jener erfahrenden Akte der Wahrnehmung, Erinnerung usw., in denen ich Wirklichkeit erfasse, ein letztes Recht dazu gibt, dem wahrgenommenen Gegenstande Existenz und die wahrgenommene Beschaffenheit zuzuschreiben; dieses Recht kann von einem auf andere Wahrnehmungen usw. sich stützenden immer wieder überwogen werden. Es liegt im Wesen eines wirklichen Dinges, ein Unerschöpfliches zu sein an Inhalt, dem wir uns nur durch immer neue, zum Teil sich widersprechende Erfahrungen und deren Abgleich unbegrenzt nähern können. In diesem Sinne ist das wirkliche Ding eine Grenzidee. Darauf beruht der empirische Charakter aller Wirklichkeitserkenntnis [1]).

Die Urform des Bewußtseinstromes ist die *Zeit*. Es ist eine Tatsache, sie mag so dunkel und rätselhaft für die Vernunft sein wie sie will, aber sie läßt sich nicht wegleugnen und wir müssen sie hinnehmen, daß die Bewußtseinsinhalte sich nicht geben als seiend schlechthin (wie etwa Begriffe, Zahlen u. dgl.), sondern als *jetzt-seiend*, die Form des dauernden Jetzt erfüllend mit einem wechselnden Gehalt; so daß es nicht heißt: dies *ist*, sondern: dies *ist jetzt*, doch *jetzt* nicht mehr. Reißen wir uns in der Reflexion heraus aus diesem Strom und stellen uns seinen Gehalt als ein Objekt gegenüber, so wird er uns zu einem *zeitlichen Ablauf*, dessen einzelne Stadien in der Beziehung des *früher und später* zueinander stehen.

Wie die Zeit die Form des Bewußtseinstromes, so, darf man mit Fug und Recht behaupten, ist der *Raum* die Form der körperlichen Wirklichkeit. Alle Momente körperlicher Dinge, wie sie in den Akten äußerer Wahrnehmung gegeben sind, Farbe z. B., haben das Auseinander der räumlichen Ausbreitung an sich. Aber erst indem sich aus allen unseren Erfahrungen eine einzige zusammenhängende reale Welt aufbaut, wird die in jeder Wahrnehmung gegebene räumliche Ausbreitung zu einem Teil des einen und selben Raumes, der alle Dinge umspannt. Dieser Raum ist *Form* der Außenwelt; das will sagen: jedes körperliche Ding kann, ohne irgendwie inhaltlich ein anderes zu sein als es ist, ebensogut an jeder anderen Raumstelle sein als gerade an dieser. Damit ist zugleich die *Homogenität* des Raumes gegeben, und hier liegt die eigentliche Wurzel des *Kongruenzbegriffs*.

Wäre es nun so, daß die Welt des Bewußtseins und der transzendenten Wirklichkeit völlig voneinander geschieden sind oder vielmehr nur das stille Hinblicken der Wahrnehmung die Brücke zwischen ihnen spannt, so bliebe es wohl dabei, wie ich es eben dargestellt habe: auf der einen Seite das in der Form des dauernden Jetzt sich wandelnde, aber raumlose Bewußtsein, auf der andern die räumlich ausgebreitete, aber zeitlose Wirklichkeit, von der jenes nur ein wechselndes Phänomen enthält. Ursprünglicher aber als alle Wahrnehmung ist in uns das Erleben von Streben und Widerstand, des Tuns und Leidens*). Für einen in natürlicher Aktivität lebenden Menschen dient die Wahrnehmung vor allem dazu, ihm den bestimmten Angriffspunkt seiner gewollten Tat und den Sitz ihrer Widerstände in bildhafter Klarheit vor das Bewußtsein zu rücken. Im Erleben des Tuns und Erleidens werde ich selbst mir zu einem einzelnen Individuum von psychischer Realität, geknüpft an einen Leib, der unter den körperlichen Dingen der Außenwelt seine Stelle im Raum hat und durch den hindurch ich mit andern Individuen meinesgleichen in Verbindung stehe; wird das Bewußtsein, ohne doch seine Immanenz preiszugeben, zu einem Stück der Wirklichkeit, zu diesem be-

*) Unsere Grammatik hat nur die Verbformen des activum und passivum; es gibt keine zum Ausdruck eines Geschehens, geschweige denn eines Sachverhalts.

sonderen Menschen, der ich bin, der geboren ward und sterben wird. Anderseits spannt aber dadurch auch das Bewußtsein seine Form, die Zeit, über die Wirklichkeit aus: in ihr selber ist darum Veränderung, Bewegung, Ablauf, Werden und Vergehen; und wie mein Wille durch meinen Leib hindurch als bewegende Tat in die reale Welt wirkend hinübergreift, so ist sie selber auch *wirkende* (wie ihr deutscher Name »Wirklichkeit« besagt), ihre Erscheinungen stehen in einem durchgängigen *Kausalzusammenhang* untereinander. In der Tat zeigt sich in der Physik, daß kosmische Zeit und Kausalität nicht voneinander zu trennen sind. Die neue Weise, in der die Relativitätstheorie das Problem der Verkopplung von Raum und Zeit in der Wirklichkeit löst, fällt zusammen mit einer neuen Einsicht in den Wirkungszusammenhang der Welt.

Der Gang unserer Betrachtungen ist damit klar vorgezeichnet. Was über die *Zeit für sich* zu sagen ist und über ihre mathematisch-begriffliche Erfassung, möge noch in dieser Einleitung Platz finden. Weit ausführlicher müssen wir dann vom Raume handeln. Das I. Kapitel ist dem *Euklidischen Raume* gewidmet und seiner mathematischen Konstruktion. Im II. Kapitel werden die Ideen entwickelt, welche über das Euklidische Schema hinausdrängen und im allgemeinen *Begriff des metrischen Kontinuums* (Riemannschen Raumbegriff) ihren Abschluß finden. Darauf wird in einem III. Kapitel das eben erwähnte Problem der *Verkopplung von Raum und Zeit in der Welt* zu erörtern sein; von hier ab spielen die Erkenntnisse der Mechanik und Physik eine wichtige Rolle, weil dieses Problem seinem Wesen nach, wie bereits betont, an die Auffassung der Welt als einer wirkenden geknüpft ist. Die Synthese der im II. und III. Kapitel enthaltenen Gedanken wird uns dann in dem abschließenden Kapitel IV zu Einsteins *allgemeiner Relativitätstheorie* führen, in der in physikalischer Hinsicht eine neue Theorie der *Gravitation* enthalten ist, und zu einer Erweiterung derselben, welche neben der Gravitation die elektromagnetischen Erscheinungen mitumfaßt. Von den Umwälzungen, die unsere Vorstellungen von Raum und Zeit darin erfahren, wird der *Begriff der Materie* sozusagen zwangsläufig mitergriffen werden; so daß, was darüber zu sagen ist, an der gehörigen Stelle im III. und IV. Kapitel zur Sprache kommen soll. —

Um an die *Zeit* mathematische Begriffe heranbringen zu können, müssen wir von der ideellen Möglichkeit ausgehen, in der Zeit mit beliebiger Genauigkeit ein punktuelles *Jetzt* zu setzen, einen Zeitpunkt zu fixieren. Von je zwei verschiedenen Zeitpunkten wird dann immer der eine der *frühere*, der andere der *spätere* sein. Von dieser »Ordnungsbeziehung« gilt der Grundsatz: Ist A früher als B und B früher als C, so ist A früher als C. Je zwei Zeitpunkte AB, von denen A der frühere ist, begrenzen eine *Zeitstrecke*; in sie hinein fällt jeder Punkt, der später als A, früher als B ist. Daß die Zeit Form des Erlebnisstromes ist, kommt in der Idee der *Gleichheit* zum Ausdruck: der Erlebnisgehalt, welcher die Zeitstrecke AB erfüllt, kann an sich, ohne irgendwie ein anderer zu sein

als er ist, in irgend eine andere Zeit fallen; die Zeitstrecke, die er dort erfüllen würde, ist der Strecke AB gleich. In der Physik ergibt sich daraus für die Gleichheit von Zeitstrecken der objektiven Zeit, unter Hinzuziehung des Kausalitätsprinzips, das folgende objektive Kriterium. Kehrt ein vollständig isoliertes (keine Einwirkung von außen erfahrendes) physikalisches System einmal genau zu demselben Zustand zurück, in dem es sich bereits in einem früheren Moment befand, so wiederholt sich von da ab die gleiche zeitliche Zustandsfolge, und der Vorgang ist ein zyklischer. Ein solches System nennen wir allgemein eine *Uhr*. Jede Periode hat die *gleiche* Zeitdauer.

Auf diese beiden Relationen, früher-später und gleich, stützt sich die mathematische Erfassung der Zeit durch das *Messen*. Wir versuchen, das Wesen des Messens kurz anzudeuten. Die Zeit ist homogen, d. h. ein einzelner Zeitpunkt kann nur durch individuelle Aufweisung gegeben werden, es gibt keine im allgemeinen Wesen der Zeit gründende Eigenschaft, welche einem Zeitpunkt zukäme, einem andern aber nicht; insbesondere: jede auf Grund der erwähnten beiden Urrelationen rein logisch zu definierende Eigenschaft kommt entweder allen Zeitpunkten oder keinem zu. Ebenso steht es noch mit den Zeitstrecken oder Punktepaaren: es ist ausgeschlossen, daß eine auf Grund jener beiden Urrelationen definierte Eigenschaft nicht für jedes Punktepaar AB (A früher als B) erfüllt ist, wenn sie für ein solches besteht. Anders wird die Sache aber, wenn wir zu drei Zeitpunkten übergehen. Sind irgend zwei Zeitpunkte OE, von denen O der frühere ist, gegeben, so ist es möglich, weitere Zeitpunkte P relativ zu der Einheitsstrecke OE auf begriffliche Weise festzulegen. Dies geschieht dadurch, daß rein logisch aus den Urrelationen eine Beziehung t zwischen drei Punkten konstruiert wird, für welche folgendes gilt: zu je zwei Punkten O und E, von denen O der frühere ist, gibt es einen und nur einen Punkt P, so daß zwischen O, E und P die Beziehung t statthat, in Zeichen:

$$OP = t \cdot OE.$$

(Z. B. bedeutet $OP = 2 \cdot OE$ die Relation $OE = EP$.) Die *Zahl* ist nichts anderes als ein zusammengedrängtes Symbol für eine derartige Relation t und ihre logische Definition auf Grund der Urbeziehungen. P ist der »Zeitpunkt mit der *Abszisse t im Koordinatensystem* (relativ zu der Einheitsstrecke) OE«. Zwei verschiedene Zahlen t, t^* führen notwendig im selben Koordinatensystem immer zu zwei verschiedenen Punkten; denn sonst käme wegen der Homogenität des Kontinuums aller Zeitstrecken die durch

$$t \cdot AB = t^* \cdot AB$$

erklärte Eigenschaft, wie der Zeitstrecke $AB = OE$, so *jeder* Zeitstrecke zu; und die Gleichungen

$$AC = t \cdot AB \quad \text{und} \quad AC = t^* \cdot AB$$

drückten beide dieselbe Relation aus, d. h. es wäre $t = t^*$. — Die Zahlen geben uns die Möglichkeit, relativ zu einer Einheitsstrecke OE aus dem Zeitkontinuum einzelne Zeitpunkte auf begriffliche und daher objektive

und völlig exakte Weise herauszulösen. Aber diese Objektivierung durch Ausschaltung des Ich und seines unmittelbaren Lebens der Anschauung gelingt nicht restlos, das nur durch eine individuelle Handlung (und nur approximativ) aufzuweisende Koordinatensystem bleibt als das notwendige Residuum dieser Ich-Vernichtung.

Durch diese prinzipielle Formulierung des Messens, meine ich, wird es begreiflich, wie die Mathematik zu ihrer Rolle in den exakten Naturwissenschaften kommt. *Für das Messen wesentlich ist der Unterschied zwischen dem »Geben« eines Gegenstandes durch individuelle Aufweisung einerseits, auf begrifflichem Wege anderseits.* Das letzte ist immer nur relativ zu Gegenständen möglich, die unmittelbar aufgewiesen werden müssen. Deshalb ist mit dem Messen immer eine *Relativitätstheorie* verknüpft. Ihr Problem stellt sich allgemein für ein beliebiges Gegenstandsgebiet so: 1) Was muß aufgewiesen werden, um relativ dazu auf begrifflichem Wege einen einzelnen, bis zu jedem beliebigen Grad der Genauigkeit willkürlichen Gegenstand P aus dem in Frage stehenden, kontinuierlich ausgebreiteten Gegenstandsgebiet herauslösen zu können? Das Aufzuweisende heißt das *Koordinatensystem*, die begriffliche Definition die *Koordinate* (oder Abszisse) von P in jenem Koordinatensystem. Zwei verschiedene Koordinatensysteme sind objektiv völlig gleichwertig, es gibt keine begrifflich zu erfassende Eigenschaft, welche dem einen zukäme, dem andern nicht; denn dann wäre zu viel unmittelbar aufgewiesen. 2) Welcher gesetzmäßige Zusammenhang findet zwischen den Koordinaten eines und desselben willkürlichen Gegenstandes P in zwei verschiedenen Koordinatensystemen statt?

Hier im Gebiet der Zeitpunkte beantwortet sich die erste Frage dahin: das Koordinatensystem besteht aus einer Zeitstrecke OE (Anfangspunkt und Maßeinheit); die zweite aber durch die Transformationsformel

$$t = at' + b \qquad (a > 0),$$

in welcher a, b Konstante sind und t, t' die Koordinaten desselben willkürlichen Punktes P in einem ersten, »ungestrichenen«, und einem zweiten, »gestrichenen« Koordinatensystem. Dabei können als charakteristische Zahlen a, b der Transformation für alle möglichen Paare von Koordinatensystemen alle möglichen reellen Zahlen auftreten, mit der Beschränkung, daß a stets positiv ist. Die Gesamtheit dieser Transformationen bildet, wie das im Wesen der Sache liegt, eine *Gruppe;* d. h.

1) die »Identität« $t = t'$ ist in ihr enthalten;

2) mit jeder Transformation tritt ihre Inverse in der Gruppe auf, d. h. diejenige, welche die erstere gerade wieder rückgängig macht. Die Inverse der Transformation (a, b):

$$t = at' + b$$

ist $\left(\frac{1}{a}, -\frac{b}{a}\right)$:

$$t' = \frac{1}{a}t - \frac{b}{a};$$

3) mit zwei Transformationen ist in der Gruppe auch immer diejenige enthalten, welche durch Hintereinanderausführung jener beiden Transformationen hervorgeht. In der Tat: durch Hintereinanderausführung der beiden Transformationen

$$t = at' + b, \qquad t' = a't'' + b'$$

entsteht

$$t = a^* t'' + b^*,$$

wo

$$a^* = a \cdot a', \qquad b^* = (ab') + b$$

ist; und wenn a und a' positiv sind, ist auch ihr Produkt positiv.

Die in Kap. III und IV behandelte Relativitätstheorie wirft das Relativitätsproblem auf nicht bloß für die Zeitpunkte, sondern für die gesamte physische Welt. Es stellt sich aber heraus, daß es gelöst ist, sobald es einmal für die Formen dieser Welt, Raum und Zeit, seine Lösung gefunden hat: auf Grund eines Koordinatensystems für Raum und Zeit läßt sich auch das physikalisch Reale in der Welt nach allen seinen Bestimmungen begrifflich, durch Zahlen, festlegen. —

Alle Anfänge sind dunkel. Gerade dem Mathematiker, der in seiner ausgebildeten Wissenschaft in strenger und formaler Weise mit seinen Begriffen operiert, tut es not, von Zeit zu Zeit daran erinnert zu werden, daß die Ursprünge in dunklere Tiefen zurückweisen, als er mit seinen Methoden zu erfassen vermag. Jenseits alles Einzelwissens bleibt die Aufgabe, zu *begreifen*. Trotz des entmutigenden Hin- und Herschwankens der Philosophie von System zu System können wir nicht darauf verzichten, wenn sich nicht Erkenntnis in ein sinnloses Chaos verwandeln soll.

Kapitel I.

Der Euklidische Raum: seine mathematische Formalisierung und seine Rolle in der Physik.

§ 1. Herleitung der elementaren Raumbegriffe aus dem der Gleichheit.

Wie wir in der Zeit ein punktuelles *Jetzt* gesetzt haben, so ist in der kontinuierlichen räumlichen Ausbreitung, die ebenfalls unendlicher Teilung fähig ist, das letzte einfache, mit jeder beliebigen Genauigkeit zu fixierende Element ein *Hier*: der Raumpunkt. Der Raum ist nicht wie die Zeit ein eindimensionales Kontinuum, die Art seines kontinuierlichen Ausgebreitetseins läßt sich nicht auf das einfache Verhältnis von früher und später zurückführen; wir lassen dahingestellt, in was für Relationen diese Kontinuität begrifflich zu erfassen ist. Hingegen ist der Raum wie die Zeit *Form* der Erscheinungen, und damit ist die Idee der Gleichheit gegeben: identisch derselbe Gehalt, genau dasselbe Ding, welches bleibt, was es ist, kann so gut an irgend einer andern Raumstelle sein als an der, an welcher es sich wirklich befindet; das von ihm dann eingenommene Raumstück $\mathfrak{S}'$ ist demjenigen $\mathfrak{S}$ gleich oder *kongruent*, welches es wirklich einnimmt. Jedem Punkt P von $\mathfrak{S}$ entspricht ein bestimmter *homologer* Punkt P' in $\mathfrak{S}'$, der nach jener Ortsversetzung von demselben Teile des gegebenen Gehalts bedeckt sein würde, der in Wirklichkeit P bedeckt. Diese »Abbildung«, vermöge deren dem Punkte P der Punkt P' entspricht, nenne ich eine kongruente Abbildung. Bei Erfüllung geeigneter subjektiver Bedingungen würde uns jenes Materiale nach seiner Ortsversetzung genau so erscheinen wie das tatsächlich gegebene. Es ist der Glaube vernünftig zu rechtfertigen, daß ein als starr erprobter Körper — d. i. ein solcher, der, wie wir ihn auch bewegen und bearbeiten mögen, uns immer wieder genau so erscheint wie er vorher war, wenn wir uns selber zu ihm in die richtige Situation bringen — in zwei Lagen, die wir ihm erteilen, diese Idee gleicher Raumstücke realisiert. Den Begriff der Gleichheit will ich neben dem schwer zu analysierenden des kontinuierlichen Zusammenhangs dem Aufbau der Geometrie zugrunde legen und in einer flüchtig hingeworfenen Skizze zeigen, wie auf diese alle geometrischen Grundbegriffe zurückgeführt werden können. Dabei schwebt mir als eigentliches Ziel vor, unter den kongruenten Abbildungen die *Translationen* herauszuheben; erst von diesem Begriff aus soll dann eine strenger geführte axiomatische Begründung der Euklidischen Geometrie anheben.

Zunächst die *gerade Linie!* Ihre Eigentümlichkeit ist, daß sie durch zwei ihrer Punkte bestimmt ist; jede andere Linie kann noch unter Fest-

haltung zweier ihrer Punkte durch kongruente Abbildung in eine andere Lage gebracht werden (Linealprobe). Also: sind A, B zwei verschiedene Punkte, so gehört zu der geraden Linie $g = AB$ jeder Punkt, der bei allen kongruenten Abbildungen in sich übergeht, die A und B in sich überführen (die gerade Linie »weicht nach keiner Seite aus«). Kinematisch ausgedrückt, kommt das darauf hinaus, daß wir die gerade Linie als Rotationsachse auffassen. Sie ist homogen und ein Linearkontinuum wie die Zeit: sie zerfällt durch einen beliebigen ihrer Punkte A in zwei Teile, zwei »Halbgeraden«. Gehören B und C je einem dieser beiden Teile an, so sagt man, A liege zwischen B und C; die Punkte des einen Teils liegen rechts, die des andern links von A (dabei wird willkürlich bestimmt, welche Hälfte die linke und welche die rechte heißen soll). Die einfachsten Grundtatsachen, welche für diesen Begriff des »*zwischen*« gelten, lassen sich in solcher Vollständigkeit, wie es für den deduktiven Aufbau der Geometrie nötig ist, exakt formulieren. Daher sucht man in der Geometrie (unter Verkehrung des wahren anschaulichen Verhältnisses) auf den Begriff des »zwischen«, auf die Relation »A gehört der Geraden BC an und liegt zwischen B und C«, alle Kontinuitätsbegriffe zurückzuführen. Sei A' ein Punkt rechts von A. Durch A' zerfällt die Gerade g gleichfalls in zwei Stücke; wir nennen dasjenige, dem A angehört, das linke. Liegt hingegen A' links von A, so dreht sich die Sache um. Bei dieser Festsetzung gelten dann analoge Verhältnisse nicht nur hinsichtlich A und A', sondern irgend zweier Punkte der geraden Linie. Durch das links und rechts sind die Punkte der Geraden genau in der gleichen Weise geordnet wie die Zeitpunkte durch das früher und später.

Links und rechts sind gleichberechtigt. Es gibt eine kongruente Abbildung, die A fest läßt, jedoch die beiden Hälften, in welche die Gerade durch A zerfällt, vertauscht; jede Strecke AB läßt sich verkehrt mit sich zur Deckung bringen (so daß B auf A und A auf B fällt). Hingegen läßt eine kongruente Abbildung, die A in A überführt und alle Punkte rechts von A in Punkte rechts von A, alle Punkte links von A in Punkte links von A, jeden Punkt der Geraden fest. Die Homogenität der geraden Linie kommt darin zum Ausdruck, daß man die Gerade so mit sich zur Deckung bringen kann, daß irgend einer ihrer Punkte A in irgend einen andern A' übergeht, die rechte Hälfte von A aus in die rechte Hälfte von A' aus und ebenso die linke in die linke (Translation der Geraden). Führen wir für die Punkte der Geraden die Gleichheit $AB = A'B'$ durch die Erklärung ein: sie besagt, daß AB durch eine Translation der Geraden in $A'B'$ übergeht, so finden hinsichtlich dieses Begriffs die gleichen Umstände statt, wie sie für die Zeit galten. Sie ermöglichen die Einführung der Zahl und durch die Zahl die exakte Fixierung von Punkten auf der geraden Linie unter Zugrundelegung einer Einheitsstrecke OE.

Betrachten wir die Gruppe der kongruenten Abbildungen, welche die Gerade g fest lassen (d. h. jeden Punkt von g in einen Punkt von g

überführen)! Unter ihnen haben wir die Rotationen als diejenigen hervorgehoben, welche nicht nur g als Ganzes, sondern jeden Punkt von g einzeln an seiner Stelle lassen. Wie können wir in dieser Gruppe die Translationen von den Schraubungen unterscheiden? Ich will hier einen ersten Weg einschlagen, der auf einer rotativen Auffassung nicht nur der Geraden, sondern auch der Ebene beruht.

Zwei von einem Punkt O ausgehende Halbgerade bilden einen *Winkel*. Jeder Winkel kann verkehrt mit sich zur Deckung gebracht werden, so daß der eine Schenkel auf den andern fällt und umgekehrt. Ein *rechter* Winkel ist mit seinem Nebenwinkel kongruent. Ist also h eine Gerade, die in A auf g senkrecht steht, so gibt es eine Rotation um g (Umklappung), welche die beiden Hälften, in die h durch A zerfällt, vertauscht. Alle auf g in A senkrecht stehenden Geraden bilden die *Ebene* E durch A senkrecht zu g. Je zwei dieser senkrechten Geraden gehen auseinander durch Rotation um g hervor. Bringt man g irgendwie mit sich verkehrt zur Deckung, so daß A in A übergeht, die beiden Hälften, in die g durch A zerfällt, aber miteinander vertauscht werden, so kommt dabei die Ebene E notwendig mit sich selbst zur Deckung. Auch durch diese Eigenschaft zusammen mit der Rotationssymmetrie läßt sich die Ebene erklären: zwei kongruente rotationssymmetrische Tische sind eben, wenn ich dadurch, daß ich den einen mit vertikaler Achse verkehrt auf den andern stülpe, die beiden Tischplatten zur Deckung bringe. Die Ebene ist homogen. Der Punkt A auf E, der hier zunächst als »Zentrum« erscheint, ist in keiner Weise vor ihren übrigen Punkten ausgezeichnet; durch jeden von ihnen, A', geht eine gerade Linie g' hindurch von der Art, daß E aus allen Geraden durch A' senkrecht zu g' besteht. Die aus den sämtlichen Punkten A' von E in dieser Weise hervorgehenden senkrechten Geraden g' bilden eine Schar *paralleler* Geraden; in ihr ist die Gerade g, von der wir ausgingen, in keiner Weise ausgezeichnet. Die Geraden der Schar erfüllen den ganzen Raum, so daß durch jeden Raumpunkt eine und nur eine Gerade der Schar hindurchgeht. Sie ist unabhängig davon, an welcher Stelle A der Geraden g die obige Konstruktion ausgeführt wird: ist A^* irgend ein Punkt von g, so schneidet die auf g in A^* errichtete Normalebene nicht nur g, sondern alle Geraden der Parallelenschar senkrecht. Diese aus den sämtlichen Punkten A^* von g entstehenden Normalebenen E* bilden eine parallele Schar von Ebenen; auch sie erfüllen den Raum einfach und lückenlos. Es bedarf nur noch eines kleinen Schrittes, um von dem so gewonnenen Raumgerüst zum rechtwinkligen Koordinatensystem zu gelangen. Hier benutzen wir es jedoch, um den

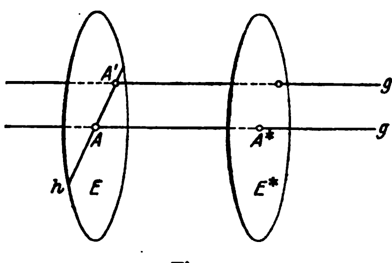


Fig. 1.

Begriff der räumlichen Translation festzulegen: die Translation ist eine kongruente Abbildung, die nicht nur g, sondern jede Gerade der Parallelenschar in sich überführt. Es gibt eine und nur eine Translation, welche den beliebigen Punkt A von g in den beliebigen Punkt A^* derselben Geraden überführt.

Ich will noch einen zweiten Weg angeben, um zum Begriff der Translation zu gelangen. Das Hauptkennzeichen der Translation ist, daß in ihr alle Punkte gleichberechtigt sind, daß von dem Verhalten eines Punktes bei der Translation nichts Objektives ausgesagt werden kann, was nicht auch für jeden andern gelte (so daß auch bei gegebener Translation die Punkte des Raumes nur durch individuelles Aufweisen [»dieser da«] voneinander unterschieden werden können, während z. B. in einer Rotation sich die Punkte der Achse durch die Eigenschaft, daß sie an ihrer Stelle bleiben, vor allen übrigen auszeichnen). Indem wir dieses Kennzeichen in den Vordergrund stellen, ergibt sich die folgende Erklärung der Translation, die von dem Begriff der Rotation ganz unabhängig ist. Bei einer kongruenten Abbildung I gehe der beliebige Punkt P in P' über; wir wollen PP' ein Paar zusammengehöriger Punkte nennen. Hat eine zweite kongruente Abbildung II die Eigenschaft, daß sie jedes Paar (nach I) zusammengehöriger Punkte wiederum in ein solches Paar überführt, so soll sie mit der ersten vertauschbar genannt werden. Eine kongruente Abbildung heißt eine Translation, wenn es mit ihr vertauschbare kongruente Abbildungen gibt, welche den beliebigen Punkt A in den beliebigen Punkt B überführen. — Daß zwei kongruente Abbildungen I, II miteinander vertauschbar sind, besagt, wie man sofort auf Grund der Erklärung beweist, daß die durch Hintereinanderausführung der Abbildungen I, II entstehende kongruente Abbildung mit derjenigen identisch ist, die durch Hintereinanderausführung dieser beiden Abbildungen II, I in umgekehrter Reihenfolge hervorgeht. Es ist eine Tatsache, daß eine Translation (und zwar, wie sich gleich zeigen wird, nur eine) existiert, welche den beliebigen Punkt A in den beliebigen B überführt. Es ist eine Tatsache, daß, wenn $\mathfrak{T}$ eine Translation ist, A und B irgend zwei Punkte, nicht bloß (laut Definition) überhaupt eine mit $\mathfrak{T}$ vertauschbare kongruente Abbildung existiert, die A in B überführt, sondern daß insbesondere diejenige *Translation*, welche A nach B bringt, die geforderte Eigenschaft besitzt. Eine Translation ist daher mit allen Translationen vertauschbar; und eine kongruente Abbildung, die mit allen Translationen vertauschbar ist, notwendig selber eine Translation. Daraus folgt, daß diejenige kongruente Abbildung, die durch Hintereinanderausführung zweier Translationen entsteht, und ebenso die »Inverse« einer Translation (d. i. diejenige Abbildung, welche die Translation gerade wieder rückgängig macht) eine Translation ist: die Translationen bilden eine »*Gruppe*«[*]). Es gibt keine Translation, die den Punkt A in A überführt, außer der Identität, die jeden Punkt festläßt. Denn wenn eine solche Translation P in P' überführt, so muß es nach Definition eine kongruente Abbildung geben, die A in P und gleichzeitig A in P' verwandelt; mithin muß P' mit P identisch sein.

Es kann daher auch nicht zwei verschiedene Translationen geben, welche A in einen anderen Punkt B überführen.

Ist so der Begriff der Translation unabhängig von dem der Rotation begründet, so läßt sich der obigen rotativen Auffassung von Gerade und Ebene eine translative gegenüberstellen. Sei $\mathfrak{a}$ eine Translation, die den Punkt A_0 in A_1 überführt. Diese selbe Translation wird A_1 in einen Punkt A_2, A_2 in A_3 überführen usf.; durch sie wird A_0 aus einem gewissen Punkt A_{-1} hervorgehen, A_{-1} aus A_{-2} usf. Damit erhalten wir zwar noch nicht die Gerade, aber eine Folge äquidistanter Punkte auf ihr. Nun existirt jedoch, wenn n eine natürliche Zahl ist, eine Translation $\frac{\mathfrak{a}}{n}$, die bei n-maliger Wiederholung $\mathfrak{a}$ ergibt. Verwenden wir, vom Punkte A_0 unsern Ausgang nehmend, $\frac{\mathfrak{a}}{n}$ in der gleichen Weise wie eben $\mathfrak{a}$, so erhalten wir eine n-mal so dichte Punkterfüllung der zu konstruierenden Geraden. Nehmen wir hier für n alle möglichen ganzen Zahlen, so wird diese Erfüllung, je größer n wird, um so dichter werden, und alle Punkte, die wir erhalten, verfließen zu einem Linearkontinuum, in das sie sich unter Aufgabe ihrer selbständigen Existenz einbetten (ich appelliere hier an die Anschauung der Kontinuität). Die gerade Linie, können wir sagen, entsteht aus einem Punkte durch immer wiederholte Ausführung derselben infinitesimalen Translation und ihrer Inversen. Eine Ebene aber entsteht durch Translation einer Geraden g an einer andern h: sind g, h zwei verschiedene, durch den Punkt A_0 gehende Gerade, so übe man auf g alle Translationen aus, welche h in sich überführen; die sämtlichen so aus g entstehenden Geraden bilden die Verbindungsebene von g und h.

Es kommt erst Ordnung in den logischen Aufbau der Geometrie, wenn man den allgemeinen Begriff der kongruenten Abbildung zunächst zu dem der Translation verengert und diesen als Grundstein des axiomatischen Fundaments verwendet (§§ 2, 3). Doch kommen wir dadurch nur zu einer rein translativen, der »*affinen*« *Geometrie*, in deren Rahmen hernach der allgemeine Begriff der Kongruenz wieder eingeführt werden muß (§ 4). Nachdem die Anschauung uns die nötigen Unterlagen geliefert hat, treten wir mit dem nächsten Paragraphen in die Domäne der deduktiven Mathematik hinüber.

§ 2. Grundlagen der affinen Geometrie.

Eine Translation oder Verschiebung $\mathfrak{a}$ des Raumes wollen wir bis auf weiteres als einen *Vektor* bezeichnen; später freilich werden wir mit diesem Namen eine allgemeinere Vorstellung verbinden. Daß bei der Verschiebung $\mathfrak{a}$ der Punkt P in Q übergeht, werde auch so ausgedrückt: Q ist der Endpunkt des von P aus aufgetragenen Vektors $\mathfrak{a}$. Sind P und Q irgend zwei Punkte, so gibt es eine und nur eine Verschiebung $\mathfrak{a}$, die P in Q überführt; wir nennen sie den durch P und Q bestimmten Vektor und bezeichnen ihn mit $\overrightarrow{PQ}$.

Diejenige Translation $\mathfrak{c}$, die durch Hintereinanderausführung zweier Translationen $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ entsteht, werde als die Summe von $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ bezeichnet: $\mathfrak{c} = \mathfrak{a} + \mathfrak{b}$. Aus der Definition der Summe ergibt sich 1) die Bedeutung der Multiplikation (Wiederholung) und der Teilung eines Vektors durch eine ganze Zahl; 2) der Sinn der Operation $-$, welche den Vektor $\mathfrak{a}$ in den inversen $-\mathfrak{a}$ verkehrt; 3) was unter dem Vektor $\mathfrak{o}$ zu verstehen ist, nämlich die alle Punkte festlassende »Identität«. Es ist $\mathfrak{a} + \mathfrak{o} = \mathfrak{a}$, $\mathfrak{a} + (-\mathfrak{a}) = \mathfrak{o}$. Weiter folgt daraus die Bedeutung des Symbols $\pm \frac{m\mathfrak{a}}{n} = \lambda\mathfrak{a}$, in welchem m und n irgend zwei natürliche Zahlen sind und λ den Bruch $\pm \frac{m}{n}$ bezeichnet. Durch die Forderung der Stetigkeit ist damit auch festgelegt, was unter dem Vektor $\lambda\mathfrak{a}$ zu verstehen ist, wenn λ eine beliebige reelle Zahl. Wir stellen folgendes einfache Axiomensystem der affinen Geometrie auf.

1. Vektoren.

Je zwei Vektoren $\mathfrak{a}$ *und* $\mathfrak{b}$ *bestimmen eindeutig einen Vektor* $\mathfrak{a} + \mathfrak{b}$ *als ihre »Summe«; eine Zahl* λ *und ein Vektor* $\mathfrak{a}$ *bestimmen eindeutig einen Vektor* $\lambda\mathfrak{a}$, *das »*λ*-fache von* $\mathfrak{a}$*« (Multiplikation). Diese Operationen genügen folgenden Gesetzen.*

α) *Addition.*

1. $\mathfrak{a} + \mathfrak{b} = \mathfrak{b} + \mathfrak{a}$ (*kommutatives Gesetz*).
2. $(\mathfrak{a} + \mathfrak{b}) + \mathfrak{c} = \mathfrak{a} + (\mathfrak{b} + \mathfrak{c})$ (*assoziatives Gesetz*).
3. *Sind* $\mathfrak{a}$ *und* $\mathfrak{c}$ *irgend zwei Vektoren, so gibt es einen und nur einen* $\mathfrak{x}$, *für welchen die Gleichung* $\mathfrak{a} + \mathfrak{x} = \mathfrak{c}$ *gilt. Er heißt die Differenz* $\mathfrak{c} - \mathfrak{a}$ *von* $\mathfrak{c}$ *und* $\mathfrak{a}$. (*Möglichkeit der Subtraktion.*)

β) *Multiplikation.*

1. $(\lambda + \mu)\mathfrak{a} = (\lambda\mathfrak{a}) + (\mu\mathfrak{a})$ (*erstes distributives Gesetz*).
2. $\lambda(\mu\mathfrak{a}) = (\lambda\mu)\mathfrak{a}$ (*assoziatives Gesetz*).
3. $1\,\mathfrak{a} = \mathfrak{a}$.
4. $\lambda(\mathfrak{a} + \mathfrak{b}) = (\lambda\mathfrak{a}) + (\lambda\mathfrak{b})$ (*zweites distributives Gesetz*).

Die Gesetze β) folgen für rationale Multiplikatoren λ, μ aus den Additionsaxiomen, falls wir die Multiplikation mit solchen Faktoren wie oben aus der Addition *erklären*. Gemäß dem Prinzip der Stetigkeit nehmen wir sie auch für beliebige reelle Zahlen in Anspruch, formulieren sie aber ausdrücklich als Axiome, da sie sich in dieser Allgemeinheit rein logisch nicht aus den Additionsaxiomen herleiten lassen. Indem wir darauf verzichten, die Multiplikation auf die Addition zurückzuführen, setzen sie uns in den Stand, aus dem logischen Aufbau der Geometrie die schwer zu greifende Stetigkeit ganz zu verbannen. 4. faßt die Ähnlichkeitssätze zusammen.

γ) Das »*Dimensionsaxiom*«, das hier seine Stelle im System findet, werden wir erst hernach formulieren.

II. Punkte und Vektoren.

1. *Je zwei Punkte A und B bestimmen einen Vektor* $\mathfrak{a}$; *in Zeichen* $\overrightarrow{AB} = \mathfrak{a}$. *Ist A irgend ein Punkt,* $\mathfrak{a}$ *irgend ein Vektor, so gibt es einen und nur einen Punkt B, für welchen* $\overrightarrow{AB} = \mathfrak{a}$ *ist.*

2. *Ist* $\overrightarrow{AB} = \mathfrak{a}$, $\overrightarrow{BC} = \mathfrak{b}$, *so ist* $\overrightarrow{AC} = \mathfrak{a} + \mathfrak{b}$.

In diesen Axiomen treten zwei Grundkategorien von Gegenständen auf, die Punkte und die Vektoren; drei Grundbeziehungen, nämlich diejenigen, welche durch die Symbole

$$(1) \qquad \mathfrak{a} + \mathfrak{b} = \mathfrak{c}\,, \qquad \mathfrak{b} = \lambda\mathfrak{a}\,, \qquad \overrightarrow{AB} = \mathfrak{a}$$

ausgedrückt werden. Alle Begriffe, die sich allein mit ihrer Hülfe rein logisch definieren lassen, gehören zur affinen Geometrie; alle Sätze, welche sich aus diesen Axiomen rein logisch folgern lassen, bilden das Lehrgebäude der affinen Geometrie, das somit auf der hier gelegten axiomatischen Basis deduktiv errichtet werden kann. Übrigens sind unsere Axiome nicht alle logisch unabhängig voneinander, sondern die Additionsaxiome für Vektoren (*Iα*, 2. und 3.) folgen aus denen, (*II*), welche die Beziehung zwischen Punkten und Vektoren regeln, Es lag uns aber daran, daß die Axiome *I* über Vektoren für sich schon ausreichen, um alle Tatsachen, welche nur die Vektoren (und nicht die Beziehungen zwischen Punkten und Vektoren) betreffen, aus ihnen zu folgern.

Aus den Additionsaxiomen *Iα* läßt sich schließen, daß ein bestimmter Vektor $\mathfrak{o}$ existiert, der für jeden Vektor $\mathfrak{a}$ die Gleichung $\mathfrak{a} + \mathfrak{o} = \mathfrak{a}$ erfüllt; aus den Axiomen *II* ergibt sich weiter, daß $\overrightarrow{AB}$ dann und nur dann dieser Vektor $\mathfrak{o}$ ist, wenn die Punkte A und B zusammenfallen.

Ist O ein Punkt, $\mathfrak{e}$ ein von $\mathfrak{o}$ verschiedener Vektor, so bilden die Endpunkte P aller Vektoren OP von der Form $\xi\mathfrak{e}$ (ξ eine beliebige reelle Zahl) eine *Gerade*. Durch diese Erklärung wird die translative Auffassung der Geraden in eine exakte, nur die Grundbegriffe des affinen Axiomensystems benutzende Definition gekleidet. Diejenigen Punkte P, für welche die Abszisse ξ positiv ist, bilden die eine Hälfte, diejenigen, für welche ξ negativ ist, die andere Hälfte der Geraden von O aus. Schreiben wir $\mathfrak{e}_1$ statt $\mathfrak{e}$ und ist $\mathfrak{e}_2$ ein weiterer Vektor, der nicht von der Form $\xi\mathfrak{e}_1$ ist, so bilden die Endpunkte P aller Vektoren $\overrightarrow{OP}$ von der Form $\xi_1\mathfrak{e}_1 + \xi_2\mathfrak{e}_2$ eine *Ebene* (translative Entstehung der Ebene durch Verschiebung einer Geraden längs einer andern). Verschieben wir endlich die Ebene E längs einer durch O hindurchgehenden, aber nicht in E gelegenen Geraden, so durchstreicht sie den ganzen Raum. Ist mithin $\mathfrak{e}_3$ ein Vektor, der nicht unter der Form $\xi_1\mathfrak{e}_1 + \xi_2\mathfrak{e}_2$ enthalten ist, so kann jeder Vektor auf eine und nur eine Weise als eine lineare Kombination

$$\xi_1\mathfrak{e}_1 + \xi_2\mathfrak{e}_2 + \xi_3\mathfrak{e}_3$$

von $\mathfrak{e}_1$, $\mathfrak{e}_2$, $\mathfrak{e}_3$ dargestellt werden. Es ergeben sich hier naturgemäß folgende Begriffsbestimmungen.

Eine endliche Anzahl von Vektoren $\mathfrak{e}_1, \mathfrak{e}_2, \cdots, \mathfrak{e}_h$ heißt *linear unabhängig*, wenn

$$(2) \qquad \xi_1 \mathfrak{e}_1 + \xi_2 \mathfrak{e}_2 + \cdots + \xi_h \mathfrak{e}_h$$

nur dann $= 0$ ist, falls sämtliche Koeffizienten ξ verschwinden. Unter dieser Voraussetzung bilden, wie wir uns ausdrücken wollen, die sämtlichen Vektoren von der Form (2) eine *h-dimensionale lineare Vektor-Mannigfaltigkeit*, und zwar diejenige, welche von den Vektoren $\mathfrak{e}_1, \mathfrak{e}_2, \cdots, \mathfrak{e}_h$ »*aufgespannt*« wird. Eine h-dimensionale lineare Vektor-Mannigfaltigkeit $\mathfrak{M}$ kann, unabhängig von der besonderen »Basis« $\mathfrak{e}_i$, folgendermaßen gekennzeichnet werden:

1. Die beiden Grundoperationen: Addition zweier Vektoren und Multiplikation eines Vektors mit einer Zahl führen nicht aus der Mannigfaltigkeit heraus; d. h. die Summe zweier zu $\mathfrak{M}$ gehörigen Vektoren wie auch das Produkt eines zu $\mathfrak{M}$ gehörigen Vektors mit einer beliebigen reellen Zahl liegt stets wieder in $\mathfrak{M}$.

2. Es existieren in $\mathfrak{M}$ wohl h linear unabhängige Vektoren, aber je $h + 1$ sind voneinander linear abhängig.

Aus der 2. Eigenschaft (die aus unserer ursprünglichen Definition mit Hülfe der elementarsten Sätze über lineare Gleichungen folgt) entnehmen wir, daß die Dimensionszahl h für die Mannigfaltigkeit als solche charakteristisch ist und nicht abhängig von der speziellen Vektorbasis, durch welche wir sie »aufspannen«.

Das in der obigen Tabelle der Axiome noch ausgelassene *Dimensionsaxiom* kann jetzt so formuliert werden:

Es gibt n linear unabhängige Vektoren, aber je $n + 1$ sind voneinander linear abhängig,

oder: die Vektoren bilden eine n-dimensionale lineare Mannigfaltigkeit. Das führt für $n = 3$ auf die affine räumliche Geometrie, für $n = 2$ auf die ebene, für $n = 1$ auf die Geometrie der Geraden. Bei der deduktiven Behandlung der Geometrie wird es aber zweckmäßig sein, den Wert von n unbestimmt zu lassen und so eine »n-dimensionale Geometrie« zu entwickeln, in welcher die der Geraden, der Ebene und des Raumes als die speziellen Fälle $n = 1, 2, 3$ enthalten sind. Denn wir sehen (hier für die affine, hernach für die vollständige Geometrie), daß in der mathematischen Struktur des Raumes nichts liegt, was uns nötigt, bei der Dimensionszahl 3 stehen zu bleiben. Gegenüber der in unsern Axiomen ausgedrückten mathematischen Gesetzmäßigkeit des Raumes erscheint seine spezielle Dimensionszahl 3 als eine Zufälligkeit, über die wir in einer systematischen deduktiven Theorie hinwegschreiten müssen. Auf die damit gewonnene Idee einer n-dimensionalen Geometrie kommen wir noch im nächsten Paragraphen zurück[3]. Zunächst müssen wir die begonnenen Erklärungen vervollständigen.

Ist O ein beliebiger Punkt, so erfüllen die sämtlichen Endpunkte P der von O aus aufgetragenen Vektoren einer h-dimensionalen linearen

Vektor-Mannigfaltigkeit $\mathfrak{M}$, wie sie durch (2) dargestellt ist, ein *h-dimensionales lineares Punktgebilde;* wir sagen, es werde vom Punkte O aus durch die Vektoren $\mathfrak{e}_1, \mathfrak{e}_2, \cdots, \mathfrak{e}_h$ aufgespannt. (Das eindimensionale Gebilde heißt Gerade, das zweidimensionale Ebene.) Der Punkt O spielt auf dem linearen Gebilde keine ausgezeichnete Rolle; ist O' irgend ein Punkt desselben, so durchläuft $\overrightarrow{O'P}$, wenn für P alle möglichen Punkte des linearen Gebildes eintreten, die gleiche Vektor-Mannigfaltigkeit $\mathfrak{M}$. Tragen wir die sämtlichen Vektoren der Mannigfaltigkeit $\mathfrak{M}$ einmal von einem Punkte O, ein andermal von einem beliebigen andern Punkte O' auf, so nennen wir die beiden entstehenden linearen Punktgebilde zueinander *parallel.* Darin liegt insbesondere die Definition paralleler Geraden und paralleler Ebenen. Derjenige Teil des durch Abtragen aller Vektoren (2) von O aus entstandenen h-dimensionalen linearen Gebildes, den wir erhalten, wenn wir die ξ der Beschränkung

$$0 \leqq \xi_1 \leqq 1, \quad 0 \leqq \xi_2 \leqq 1, \quad \cdots, \quad 0 \leqq \xi_h \leqq 1$$

unterwerfen, werde das von O aus durch die Vektoren $\mathfrak{e}_1, \mathfrak{e}_2, \cdots, \mathfrak{e}_h$ aufgespannte h-dimensionale *Parallelepiped* genannt. (Das eindimensionale Parallelepiped heißt Strecke, ein zweidimensionales Parallelogramm. — Alle diese Begriffe tragen die Beschränkung auf den uns anschaulich gegebenen Fall $n = 3$ nicht in sich.)

Einen Punkt O zusammen mit n linear unabhängigen Vektoren $\mathfrak{e}_1, \mathfrak{e}_2, \cdots, \mathfrak{e}_n$ nennen wir ein Koordinatensystem ($\mathfrak{C}$). Jeder Vektor $\mathfrak{x}$ kann auf eine und nur eine Weise in der Form

$$\mathfrak{x} = \xi_1 \mathfrak{e}_1 + \xi_2 \mathfrak{e}_2 + \cdots + \xi_n \mathfrak{e}_n \tag{3}$$

dargestellt werden; die Zahlen ξ_i nennen wir seine *Komponenten* in dem Koordinatensystem ($\mathfrak{C}$). Ist P ein beliebiger Punkt und $\overrightarrow{OP}$ gleich dem Vektor (3), so heißen die ξ_i außerdem die *Koordinaten* von P. Alle Koordinatensysteme sind in der affinen Geometrie gleichberechtigt: es gibt keine affingeometrische Eigenschaft, durch welche sich das eine von dem andern unterschiede. Ist

$$O'; \; \mathfrak{e}'_1, \; \mathfrak{e}'_2, \; \cdots, \; \mathfrak{e}'_n$$

ein zweites Koordinatensystem, so werden Gleichungen gelten

$$\mathfrak{e}'_i = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{ki} \mathfrak{e}_k, \tag{4}$$

in denen die α_{ki} ein Zahlsystem bilden, das wegen der linearen Unabhängigkeit der $\mathfrak{e}'_i$ eine von 0 verschiedene Determinante besitzen muß. Sind ξ_i die Komponenten eines Vektors $\mathfrak{x}$ im ersten, ξ'_i im zweiten Koordinatensystem, so besteht der Zusammenhang

$$\xi_i = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{ik} \xi'_k, \tag{5}$$

wie man findet, indem man die Ausdrücke (4) in die Gleichung

$$\sum_i \xi_i \mathfrak{e}_i = \sum_i \xi'_i \mathfrak{e}'_i$$

einsetzt. $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ seien die Koordinaten von O' im ersten Koordinatensystem. Sind x_i die Koordinaten eines beliebigen Punktes im ersten, x'_i im zweiten Koordinatensystem, so gelten die Gleichungen

$$(6) \qquad x_i = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{ik} x'_k + \alpha_i .$$

Denn $x_i - \alpha_i$ sind die Komponenten von

$$\overrightarrow{O'P} = \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OO'}$$

im ersten, x'_i im zweiten Koordinatensystem. Die Transformationsformeln (6) für die Koordinaten sind also linear; diejenigen (5) für die Vektorkomponenten entstehen aus ihnen einfach dadurch, daß die von den Variabeln freien konstanten Glieder α_i gestrichen werden. — Es ist eine analytische Behandlung der affinen Geometrie möglich, bei der jeder Vektor durch seine Komponenten, jeder Punkt durch seine Koordinaten repräsentiert wird. Die geometrischen Beziehungen zwischen Punkten und Vektoren drücken sich dann aus als solche zwischen ihren Komponenten bzw. Koordinaten bestehende Zusammenhänge, die durch beliebige lineare Transformation nicht zerstört werden.

Die Formeln (5), (6) lassen noch eine andere Deutung zu: sie können als die Darstellung einer *affinen Abbildung* in einem bestimmten Koordinatensystem aufgefaßt werden. Eine Abbildung, d. i. ein Gesetz, das jedem Vektor $\mathfrak{x}$ einen »Bild«-Vektor $\mathfrak{x}'$, jedem Punkt P einen »Bild«-Punkt P' zuordnet, heißt linear oder affin, wenn durch die Abbildung die affinen Grundbeziehungen (1) nicht zerstört werden — wenn also das Bestehen von (1) die gleichen Relationen für die Bild-Vektoren und Punkte zur Folge hat:

$$\mathfrak{a}' + \mathfrak{b}' = \mathfrak{c}', \qquad \mathfrak{b}' = \lambda \mathfrak{a}', \qquad \overrightarrow{A'B'} = \mathfrak{a}' \text{ —}$$

und wenn außerdem das Bild keines von o verschiedenen Vektors = o ist, oder anders ausgedrückt: wenn aus zwei Punkten nur dann der gleiche Bildpunkt hervorgeht, falls sie selber identisch sind. Zwei Figuren, die durch affine Abbildung auseinander hervorgehen, sind affin. Sie sind vom Standpunkt der affinen Geometrie einander völlig gleich; es kann keine affine Eigenschaft geben, welche der einen zukäme, der andern aber nicht. Der Begriff der linearen Abbildung spielt also für die affine Geometrie die gleiche Rolle wie die Kongruenz in der vollständigen Geometrie; daraus geht seine prinzipielle Bedeutung hervor. Linear unabhängige Vektoren gehen durch affine Abbildung wieder in linear unabhängige über; ein h-dimensionales lineares Gebilde in ein ebensolches Gebilde; parallele in parallele; ein Koordinatensystem $O|\mathfrak{e}_1, \mathfrak{e}_2, \cdots, \mathfrak{e}_n$ in ein neues Koordinatensystem $O'|\mathfrak{e}'_1, \mathfrak{e}'_2, \cdots, \mathfrak{e}'_n$. Die Zahlen α_{ki}, α_i mögen die gleiche

Bedeutung haben wie oben. Der Vektor (3) verwandelt sich durch die affine Abbildung in

$$\mathfrak{x}' = \xi_1 \mathfrak{e}'_1 + \xi_2 \mathfrak{e}'_2 + \cdots + \xi_n \mathfrak{e}'_n.$$

Setzen wir die Ausdrücke von $\mathfrak{e}'_i$ ein, benutzen zur Darstellung der affinen Abbildung das ursprüngliche Koordinatensystem $O \mid \mathfrak{e}_1, \mathfrak{e}_2, \cdots, \mathfrak{e}_n$ und verstehen unter ξ_i die Komponenten irgend eines Vektors, unter ξ'_i die seines Bildvektors, so ist also

$$\xi'_i = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{ik} \xi_k. \tag{5'}$$

Geht P über in P', so der Vektor $\overrightarrow{OP}$ in $\overrightarrow{O'P'}$; daraus folgt: sind x_i die Koordinaten von P, x'_i die von P', so gilt

$$x'_i = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{ik} x_k + \alpha_i.$$

In der analytischen Geometrie pflegt man die linearen Gebilde durch lineare Gleichungen für die Koordinaten des »laufenden Punktes« zu charakterisieren. Darauf werden wir im nächsten Paragraphen genauer eingehen; hier finde nur noch der Grundbegriff »lineare Form«, auf dem diese Darstellung beruht, seinen Platz. Eine Funktion $L(\mathfrak{x})$ — deren Argument $\mathfrak{x}$ alle Vektoren durchläuft, deren Werte aber reelle Zahlen sind — heißt eine *Linearform*, wenn sie die Funktionaleigenschaften besitzt:

$$L(\mathfrak{a} + \mathfrak{b}) = L(\mathfrak{a}) + L(\mathfrak{b}); \qquad L(\lambda \mathfrak{a}) = \lambda \cdot L(\mathfrak{a}).$$

In einem Koordinatensystem $\mathfrak{e}_1, \mathfrak{e}_2, \cdots, \mathfrak{e}_n$ ist jede der n Vektorkomponenten ξ_i von $\mathfrak{x}$ eine solche Linearform. Für eine beliebige Linearform L gilt, wenn $\mathfrak{x}$ durch (3) definiert ist,

$$L(\mathfrak{x}) = \xi_1 L(\mathfrak{e}_1) + \xi_2 L(\mathfrak{e}_2) + \cdots + \xi_n L(\mathfrak{e}_n);$$

setzen wir also $L(\mathfrak{e}_i) = a_i$, so erscheint die Linearform, in Komponenten dargestellt, unter der Gestalt

$$a_1 \xi_1 + a_2 \xi_2 + \cdots + a_n \xi_n;$$

die a_i sind ihre konstanten Koeffizienten. Umgekehrt wird durch jeden Ausdruck dieser Art eine Linearform gegeben. Mehrere Linearformen $L_1, L_2, \cdots, L_h$ sind linear unabhängig, wenn keine Konstanten λ_i existieren, für welche identisch in $\mathfrak{x}$ die Gleichung

$$\lambda_1 L_1(\mathfrak{x}) + \lambda_2 L_2(\mathfrak{x}) + \cdots + \lambda_h L_h(\mathfrak{x}) = 0$$

besteht, außer $\lambda_i = 0$. $n + 1$ Linearformen sind stets linear abhängig voneinander.

§ 3. Idee der n-dimensionalen Geometrie. Lineare Algebra. Quadratische Formen.

Um die Raumgesetze in ihrer vollen mathematischen Harmonie zu erfassen, müssen wir von der besonderen Dimensionszahl $n = 3$ abstrahieren. Es hat sich nicht nur in der Geometrie, sondern in noch er-

staunlicherem Maße in der Physik immer wieder gezeigt, daß, sobald wir die Naturgesetze, von denen die Wirklichkeit beherrscht ist, erst einmal völlig durchdringen, diese sich in mathematischen Beziehungen von der durchsichtigsten Einfachheit und vollendetsten Harmonie darstellen. Den Sinn für diese Einfachheit und Harmonie, den wir heute in der theoretischen Physik nicht missen können, zu entwickeln, scheint mir eine Hauptaufgabe des mathematischen Unterrichts zu sein; sie ist für uns eine Quelle hoher Erkenntnisbefriedigung. Die analytische Geometrie, in so gedrängter und prinzipieller Form vorgetragen, wie ich es hier versuche, gibt einen ersten, aber noch unzulänglichen Begriff davon. Doch nicht nur um solcher Zwecke willen müssen wir uns über die Dimensionszahl $n = 3$ erheben, sondern wir benötigen für spätere konkrete physikalische Probleme, wie sie die Relativitätstheorie mit sich bringt, in der die Zeit zum Raum hinzutritt, die vierdimensionale Geometrie.

Man braucht keineswegs die Geheimlehren der Spiritisten zu Rate zu ziehen, um sich den Gedanken einer mehrdimensionalen Geometrie anschaulich näher zu bringen. Betrachten wir z. B. homogene Gasgemische aus Wasserstoff, Sauerstoff, Stickstoff und Kohlensäure. Ein beliebiges Quantum eines solchen Gemisches ist charakterisiert durch die Angabe, wieviel Gramm jedes Gases in ihm enthalten sind. Nennen wir jedes solche Quantum einen Vektor (Namen können wir geben, wie wir wollen) und verstehen unter Addition die Vereinigung zweier Gasquanten im gewöhnlichen Sinne, so sind die sämtlichen auf Vektoren bezüglichen Axiome *I* unseres Systems mit der Dimensionszahl $n = 4$ erfüllt, wenn wir uns erlauben, auch von negativen Gasquanten zu reden. 1 gr reinen Wasserstoffs, 1 gr Sauerstoff, 1 gr Stickstoff und 1 gr Kohlensäure sind vier voneinander unabhängige »Vektoren«, aus denen sich alle andern linear zusammensetzen lassen, bilden also ein Koordinatensystem. — Oder ein anderes Beispiel: Auf jeder von 5 parallelen Stangen ist eine kleine Kugel verschiebbar. Ein bestimmter Zustand dieser primitiven »Rechenmaschine« ist gegeben, wenn die Stelle, an der sich jede der 5 Kugeln auf ihrer Stange befindet, bekannt ist. Nennen wir jeden solchen Zustand einen »Punkt« und jede simultane Verschiebung der 5 Kugeln einen »Vektor«, so sind unsere sämtlichen Axiome erfüllt mit der Dimensionszahl $n = 5$. — Man sieht schon hieraus: es lassen sich anschauliche Gebilde mancherlei Art konstruieren, die bei geeigneter Namengebung unseren Axiomen genügen.

Viel wichtiger aber als diese etwas spielerischen Exempel ist das folgende, welches zeigt, daß *jene Axiome die Operationsbasis für die Theorie der linearen Gleichungen charakterisieren.* Sind α_i und α gegebene Zahlen, so nennt man bekanntlich

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n = 0 \tag{7}$$

eine *homogene*,

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n = \alpha \tag{8}$$

eine *inhomogene* lineare Gleichung für die Unbekannten x_i. Zur Behandlung der *Theorie der linearen homogenen Gleichungen* ist es gut, für ein Wertsystem der Variabeln x_i einen kurzen Namen zu haben; wir bezeichnen es als »Vektor«. Mit diesen Vektoren soll so gerechnet werden, daß unter der Summe der beiden Vektoren

$$(a_1, a_2, \cdots, a_n) \quad \text{und} \quad (b_1, b_2, \cdots, b_n)$$

der Vektor

$$(a_1 + b_1, a_2 + b_2, \cdots, a_n + b_n)$$

verstanden wird und unter dem λ-fachen des ersten der Vektor

$$(\lambda a_1, \lambda a_2, \cdots, \lambda a_n).$$

Dann sind die Axiome *I* über Vektoren erfüllt mit der Dimensionszahl n.

$$\begin{aligned} \mathfrak{e}_1 &= (1, 0, 0, \cdots, 0), \\ \mathfrak{e}_2 &= (0, 1, 0, \cdots, 0), \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \mathfrak{e}_n &= (0, 0, 0, \cdots, 1) \end{aligned}$$

bilden ein System unabhängiger Vektoren; die Komponenten eines beliebigen Vektors $(x_1, x_2 \cdots, x_n)$ in diesem Koordinatensystem sind die Zahlen x_i selber. Der Hauptsatz über die Lösung linearer homogener Gleichungen läßt sich jetzt so aussprechen: Sind $L_1(\mathfrak{x})$, $L_2(\mathfrak{x})$, $\cdots$, $L_h(\mathfrak{x})$ h linear unabhängige Linearformen, so bilden die Lösungen $\mathfrak{x}$ der Gleichungen

$$L_1(\mathfrak{x}) = 0, \quad L_2(\mathfrak{x}) = 0, \quad \cdots, \quad L_h(\mathfrak{x}) = 0$$

eine $(n - h)$-dimensionale lineare Vektor-Mannigfaltigkeit.

In der *Theorie der inhomogenen linearen Gleichungen* wollen wir ein Wertsystem der Variablen x_i lieber als einen »Punkt« bezeichnen. Sind x_i und x'_i zwei Lösungssysteme der Gleichung (8), so ist ihre Differenz

$$x'_1 - x_1, \quad x'_2 - x_2, \quad \cdots, \quad x'_n - x_n$$

eine Lösung der entsprechenden homogenen Gleichung (7). Wir wollen deshalb diese Differenz zweier Wertsysteme der Variablen x_i einen »Vektor« nennen, und zwar den durch die beiden »Punkte« (x_i) und (x'_i) bestimmten Vektor, und über die Addition von Vektoren und ihre Multiplikation mit einer Zahl die obigen Verabredungen treffen. *Dann gelten die sämtlichen Axiome.* Für das besondere Koordinatensystem, das aus den oben angegebenen Vektoren $\mathfrak{e}_i$ besteht und dem »Anfangspunkt« $O = (0, 0, \cdots, 0)$, sind die Koordinaten eines Punktes (x_i) die Zahlen x_i selber. Der Hauptsatz über lineare Gleichungen lautet: Diejenigen Punkte, welche h unabhängigen linearen Gleichungen genügen, bilden ein $(n - h)$-dimensionales lineares Punktgebilde.

So würde man auch ohne Geometrie von der Theorie der linearen Gleichungen her auf die natürlichste Weise nicht nur zu unsern Axiomen geführt werden, sondern auch zu den weiteren Begriffsbildungen, die wir an sie angeschlossen haben. Ja es wäre sogar in mancher Hinsicht zweckmäßig (wie namentlich die Formulierung des Satzes über homogene Gleichungen zeigt), die Theorie der linearen Gleichungen auf axiomatischer Basis in der Weise zu entwickeln, daß man die hier von der Geometrie

her gewonnenen Axiome an die Spitze stellt. Sie würde dann gültig sein für irgend ein Operationsgebiet, das jenen Axiomen genügt, und nicht bloß für die »Wertsysteme von n Variablen«. Freilich ist der Übergang von einer solchen mehr begrifflichen zu der üblichen, von vornherein mit Zahlen x_i operierenden mehr formalen Theorie ohne weiteres dadurch zu vollziehen, daß man ein bestimmtes Koordinatensystem zugrunde legt und nun statt der Vektoren und Punkte ihre Komponenten und Koordinaten benutzt.

Aus alle dem geht hervor, daß die ganze affine Geometrie über den Raum nur dieses lehrt (man wird uns ohne genauere Erklärung verstehen), daß er *ein dreidimensionales lineares Größengebiet* ist. Alle die anschaulichen Einzeltatsachen, deren in § 1 Erwähnung geschah, sind nur Verkleidungen dieser einen einfachen Wahrheit. Ist es nun auf der einen Seite außerordentlich befriedigend, für die vielerlei Aussagen über den Raum, räumliche Gebilde und räumliche Beziehungen, aus denen die Geometrie besteht, diesen einen gemeinsamen Erkenntnisgrund angeben zu können, so muß auf der andern Seite betont werden, daß dadurch aufs deutlichste hervortritt, wie wenig die Mathematik Anspruch darauf machen kann, das anschauliche Wesen des Raumes zu erfassen: von dem, was den Raum der Anschauung zu dem macht, was er *ist* in seiner ganzen Besonderheit und was er nicht teilt mit »Zuständen von Rechenmaschinen« und »Gasgemischen« und »Lösungssystemen linearer Gleichungen«, enthält die Geometrie nichts. Dies »begreiflich« zu machen oder ev. zu zeigen, warum und in welchem Sinne es unbegreiflich ist, bleibt der Metaphysik überlassen. Wir Mathematiker können stolz sein auf die wunderbare Durchsichtigkeit der Erkenntnis vom Raume, welche wir gewinnen; aber wir müssen uns zugleich sehr bescheiden, da unsere begrifflichen Theorien nur imstande sind, das Raumwesen nach einer Seite hin, noch dazu seiner oberflächlichsten und formalsten, zu erfassen. —

Aus dem Gebiete der linearen Algebra haben wir, um von der affinen zur vollständigen metrischen Geometrie überzuleiten, noch einige Begriffe und Tatsachen nötig, die sich auf *bilineare* und *quadratische Formen* beziehen. Eine Funktion $Q(\mathfrak{x}\mathfrak{y})$ zweier willkürlicher Vektoren $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ heißt, wenn sie eine lineare Form sowohl in $\mathfrak{x}$ wie in $\mathfrak{y}$ ist, eine Bilinearform. Sind bei Benutzung eines bestimmten Koordinatensystems ξ_i die Komponenten von $\mathfrak{x}$, η_i die von $\mathfrak{y}$, so gilt eine Gleichung

$$Q(\mathfrak{x}\mathfrak{y}) = \sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}\,\xi_i\eta_k$$

mit konstanten Koeffizienten a_{ik}. Wir wollen die Form »*nicht-ausgeartet*« nennen, wenn sie für einen Vektor $\mathfrak{x}$ identisch in $\mathfrak{y}$ nur dann verschwindet, falls $\mathfrak{x} = 0$ ist. Das ist dann und nur dann der Fall, wenn die homogenen Gleichungen

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ik}\xi_i = 0$$

die einzige Lösung $\xi_i = 0$ besitzen oder wenn die Determinante $|a_{ik}| \neq 0$ ist. Aus der Erklärung geht hervor, daß diese Bedingung des Nicht-Verschwindens der Determinante bei beliebiger linearer Transformation erhalten bleibt. Die Bilinearform heißt *symmetrisch*, wenn $Q(\mathfrak{y}\mathfrak{x}) = Q(\mathfrak{x}\mathfrak{y})$ ist; an den Koeffizienten gibt sich das durch die Symmetrie-Eigenschaft $a_{ki} = a_{ik}$ kund. Aus jeder Bilinearform $Q(\mathfrak{x}\mathfrak{y})$ entsteht eine nur von einem variablen Vektor $\mathfrak{x}$ abhängige *quadratische Form*

$$Q(\mathfrak{x}) = Q(\mathfrak{x}\mathfrak{x}) = \sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}\xi_i\xi_k .$$

Auf diese Weise entsteht jede quadratische Form insbesondere aus einer und nur einer *symmetrischen* Bilinearform. Die eben gebildete quadratische Form $Q(\mathfrak{x})$ kann nämlich auch durch Identifizierung von $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ erzeugt werden aus der symmetrischen Form

$$\tfrac{1}{2}\{Q(\mathfrak{x}\mathfrak{y}) + Q(\mathfrak{y}\mathfrak{x})\}.$$

Daß aus zwei verschiedenen symmetrischen Bilinearformen nicht dieselbe quadratische Form hervorgehen kann, ist bewiesen, wenn man zeigt, daß eine symmetrische Bilinearform $Q(\mathfrak{x}\mathfrak{y})$, die identisch in $\mathfrak{x}$ der Gleichung $Q(\mathfrak{x}\mathfrak{x}) = 0$ genügt, identisch verschwinden muß. Dies geht aber aus der für jede symmetrische Bilinearform gültigen Relation

$$Q(\mathfrak{x}+\mathfrak{y},\ \mathfrak{x}+\mathfrak{y}) = Q(\mathfrak{x}\mathfrak{x}) + 2\,Q(\mathfrak{x}\mathfrak{y}) + Q(\mathfrak{y}\mathfrak{y}) \tag{9}$$

hervor. Ist $Q(\mathfrak{x})$ das Zeichen für eine beliebige quadratische Form, so bedeutet $Q(\mathfrak{x}\mathfrak{y})$ immer, ohne daß wir es jedesmal erwähnen, diejenige symmetrische Bilinearform, aus welcher $Q(\mathfrak{x})$ entsteht. Daß eine quadratische Form nicht-ausgeartet sei, soll bedeuten, daß jene symmetrische Bilinearform nicht-ausgeartet ist. Eine quadratische Form $Q(\mathfrak{x})$ ist *positiv-definit*, wenn sie der Ungleichung $Q(\mathfrak{x}) > 0$ für jeden Vektor $\mathfrak{x} \neq 0$ genügt. Eine solche ist gewiß nicht-ausgeartet; denn für keinen Vektor $\mathfrak{x} \neq 0$ kann dann $Q(\mathfrak{x}\mathfrak{y})$ identisch in $\mathfrak{y}$ gleich 0 sein, da es für $\mathfrak{y} = \mathfrak{x}$ positiv ausfällt.

§ 4. Grundlagen der metrischen Geometrie.

Um den Übergang von der affinen zur metrischen Geometrie zu bewerkstelligen, müssen wir noch einmal aus dem Born der Anschauung schöpfen. Ihr entnehmen wir (für den dreidimensionalen Raum) die Erklärung jener Größe, die man als das *skalare Produkt* zweier Vektoren $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ bezeichnet. Nach Wahl eines bestimmten Einheitsvektors messen wir die Länge von $\mathfrak{a}$ und die (mit dem richtigen Vorzeichen zu versehende) Länge der senkrechten Projektion von $\mathfrak{b}$ auf $\mathfrak{a}$ und multiplizieren diese beiden Maßzahlen miteinander. Dabei sind also nicht bloß, wie in der affinen Geometrie, parallele Strecken ihrer Länge nach zu vergleichen, sondern solche von beliebiger Richtung gegeneinander. Für das skalare Produkt gelten folgende Rechengesetze:

$$\lambda\mathfrak{a}\cdot\mathfrak{b} = \lambda(\mathfrak{a}\cdot\mathfrak{b}), \qquad (\mathfrak{a}+\mathfrak{a}')\cdot\mathfrak{b} = (\mathfrak{a}\cdot\mathfrak{b}) + (\mathfrak{a}'\cdot\mathfrak{b}),$$

und das analoge in bezug auf den zweiten Faktor; außerdem das kommutative $\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b} = \mathfrak{b} \cdot \mathfrak{a}$. Das skalare Produkt von $\mathfrak{a}$ mit sich selbst, $\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{a} = \mathfrak{a}^2$, ist stets positiv, außer wenn $\mathfrak{a} = 0$, und gleich dem Quadrat der Länge von $\mathfrak{a}$. Diese Gesetze besagen: das skalare Produkt zweier willkürlicher Vektoren $\mathfrak{x} \cdot \mathfrak{y}$ ist eine symmetrische Bilinearform, und die aus ihr entstehende quadratische Form ist positiv-definit. Man erkennt also: nicht die Länge, sondern das Quadrat der Länge eines Vektors hängt in einfacher, rationaler Weise von dem Vektor selbst ab, ist nämlich eine quadratische Form; das macht den eigentlichen Inhalt des *Pythagoreïschen Lehrsatzes* aus. Das skalare Produkt ist nichts anderes als die symmetrische Bilinearform, aus welcher diese quadratische Form entsteht. Wir formulieren demnach folgendes

Metrische Axiom: Nach Wahl eines von o *verschiedenen Einheitsvektors* $\mathfrak{e}$ *bestimmen je zwei Vektoren* $\mathfrak{x}$ *und* $\mathfrak{y}$ *eindeutig eine Zahl* $(\mathfrak{x} \cdot \mathfrak{y}) = Q(\mathfrak{x}\mathfrak{y})$; *sie ist in ihrer Abhängigkeit von den beiden Vektoren eine symmetrische Bilinearform, die aus ihr entstehende quadratische Form* $(\mathfrak{x} \cdot \mathfrak{x}) = Q(\mathfrak{x})$ *positiv-definit.* $Q(\mathfrak{e})$ *ist* $= 1$.

Q nennen wir die metrische Fundamentalform. Jetzt gilt: *Eine affine Abbildung, die allgemein den Vektor* $\mathfrak{x}$ *in* $\mathfrak{x}'$ *überführt, ist eine kongruente, wenn sie die metrische Fundamentalform invariant läßt:*

$$Q(\mathfrak{x}') = Q(\mathfrak{x})\,; \tag{10}$$

*zwei Figuren, die durch kongruente Abbildung ineinander übergeführt werden können, sind kongruent**). Bei unserm axiomatischen Aufbau *definieren* wir durch diese Aussagen den Begriff der Kongruenz. Liegt irgend ein Operationsbereich vor, in welchem die Axiome des § 2 erfüllt sind, so können wir eine beliebige positiv-definite quadratische Form in ihm wählen, sie zur metrischen Fundamentalform »ernennen« und auf Grund ihrer den Begriff der Kongruenz so definieren, wie es eben geschehen ist: dann ist durch jene Form in den affinen Raum eine Metrik eingetragen, und zwar gilt jetzt die gesamte Euklidische Geometrie. Wieder ist die Formulierung, zu der wir gelangt sind, nicht an eine spezielle Dimensionszahl gebunden. Aus (10) folgt mittels der Relation (9) des § 3, daß für eine kongruente Abbildung allgemeiner

$$Q(\mathfrak{x}'\mathfrak{y}') = Q(\mathfrak{x}\mathfrak{y})$$

gilt.

Da der Begriff der Kongruenz durch die metrische Fundamentalform definiert ist, so ist es kein Wunder, daß diese in alle Formeln eingeht, welche die Maße geometrischer Größen betreffen. Zwei Vektoren $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{a}'$ sind dann und nur dann kongruent, wenn

$$Q(\mathfrak{a}) = Q(\mathfrak{a}')\,.$$

Wir könnten daher $Q(\mathfrak{a})$ als Maßzahl des Vektors $\mathfrak{a}$ einführen; wir be-

*) Wir unterdrücken hier den Unterschied zwischen direkter und spiegelbildlicher Kongruenz. Er findet schon für affine Abbildungen, und zwar im n-dimensionalen so gut wie im dreidimensionalen Raume, statt.

nutzen aber statt dessen die positive Quadratwurzel aus $Q(\mathfrak{a})$ und nennen diese die Länge des Vektors $\mathfrak{a}$ (das ist jetzt Definition), damit die weitere Bedingung erfüllt ist, daß die Länge der Summe zweier paralleler und gleichgerichteter Vektoren gleich der Summe der Längen der beiden Einzelvektoren ist. Sind $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ ebenso wie $\mathfrak{a}'$, $\mathfrak{b}'$ je zwei Vektoren von der Länge 1, so ist die von den beiden ersten gebildete Figur dann und nur dann kongruent mit der aus den beiden letzten bestehenden, wenn

$$Q(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) = Q(\mathfrak{a}', \mathfrak{b}')$$

ist. Wieder aber führen wir nicht diese Zahl $Q(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$ selbst als Maßzahl des *Winkels* ein, sondern eine Zahl ϑ, welche mit ihr durch die transzendente Funktion cos zusammenhängt:

$$\cos\vartheta = Q(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}),$$

damit der Satz gilt, daß sich bei Aneinanderlegung zweier Winkel in der gleichen Ebene die Maßzahlen der Winkel addieren. Der von zwei beliebigen Vektoren $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ ($\neq 0$) gebildete Winkel ϑ berechnet sich dann aus

$$\cos\vartheta = \frac{Q(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})}{\sqrt{Q(\mathfrak{a}\mathfrak{a}) \cdot Q(\mathfrak{b}\mathfrak{b})}}. \tag{11}$$

Insbesondere heißen zwei Vektoren $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ *senkrecht* zueinander, wenn $Q(\mathfrak{a}\mathfrak{b}) = 0$ ist. Diese Erinnerung an die einfachsten metrischen Formeln der analytischen Geometrie mag genügen.

Daß der durch (11) definierte Winkel zweier Vektoren immer reell ist, beruht auf der für jede quadratische Form Q, die für alle Argumentwerte $\geqq 0$ ist, gültigen Ungleichung

$$Q^2(\mathfrak{a}\mathfrak{b}) \leqq Q(\mathfrak{a}) \cdot Q(\mathfrak{b}). \tag{12}$$

Sie ergibt sich am einfachsten, wenn man bildet:

$$Q(\lambda\mathfrak{a} + \mu\mathfrak{b}) = \lambda^2 Q(\mathfrak{a}) + 2\lambda\mu\, Q(\mathfrak{a}\mathfrak{b}) + \mu^2 Q(\mathfrak{b}) \geqq 0.$$

Da die hier hingeschriebene quadratische Form von λ und μ nicht Werte beiderlei Vorzeichens annimmt, kann ihre »Diskriminante« $Q^2(\mathfrak{a}\mathfrak{b}) - Q(\mathfrak{a}) \cdot Q(\mathfrak{b})$ unmöglich positiv sein.

n unabhängige Vektoren $\mathfrak{e}_i$ bilden ein *Cartesisches Koordinatensystem*, wenn für jeden Vektor

$$\mathfrak{x} = x_1\mathfrak{e}_1 + x_2\mathfrak{e}_2 + \cdots + x_n\mathfrak{e}_n \tag{13}$$
$$Q(\mathfrak{x}) = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2$$

ist, d. h. wenn

$$Q(\mathfrak{e}_i, \mathfrak{e}_k) = \begin{cases} 1 & (i = k) \\ 0 & (i \neq k) \end{cases}$$

ist. Alle Cartesischen Koordinatensysteme sind vom Standpunkt der metrischen Geometrie aus gleichberechtigt. Den sich aufs engste an die geometrische Anschauung anschließenden Beweis, daß solche Systeme existieren, wollen wir sogleich nicht bloß für eine definite, sondern eine beliebige nicht-ausgeartete quadratische Form erbringen, da später in der Relativitätstheorie gerade der indefinite Fall von entscheidender Wichtigkeit wird. Wir behaupten:

Zu einer nicht-ausgearteten quadratischen Form Q kann man ein solches Koordinatensystem $\mathfrak{e}_i$ *einführen, daß*

$$Q(\mathfrak{x}) = \varepsilon_1 x_1^2 + \varepsilon_2 x_2^2 + \cdots + \varepsilon_n x_n^2 \qquad (\varepsilon_i = \pm 1) \tag{14}$$

wird.

Beweis: Wir wählen einen beliebigen Vektor $\mathfrak{e}_1$, für den $Q(\mathfrak{e}_1) \neq 0$ ist; indem wir ihn mit einer geeigneten positiven Konstanten multiplizieren, können wir noch erreichen, daß $Q(\mathfrak{e}_1) = \pm 1$ ist. Einen Vektor $\mathfrak{x}$, für den $Q(\mathfrak{e}_1 \mathfrak{x}) = 0$ ist, wollen wir auch hier zu $\mathfrak{e}_1$ orthogonal nennen. Ist $\mathfrak{x}^*$ ein zu $\mathfrak{e}_1$ orthogonaler Vektor, x_1 eine beliebige Zahl, so gilt für

$$\mathfrak{x} = x_1 \mathfrak{e}_1 + \mathfrak{x}^* \tag{15}$$

der »Pythagoreïsche Lehrsatz«:

$$Q(\mathfrak{x}) = x_1^2 Q(\mathfrak{e}_1) + 2 x_1 Q(\mathfrak{e}_1 \mathfrak{x}^*) + Q(\mathfrak{x}^*) = \pm x_1^2 + Q(\mathfrak{x}^*).$$

Die zu $\mathfrak{e}_1$ orthogonalen Vektoren bilden eine lineare $(n-1)$-dimensionale Mannigfaltigkeit, in welcher $Q(\mathfrak{x})$ eine nicht-ausgeartete quadratische Form ist. Da unser Satz für die Dimensionszahl $n = 1$ selbstverständlich ist, dürfen wir annehmen, er gelte für $n - 1$ Dimensionen (Schluß von $n - 1$ auf n). Danach existieren $n - 1$ zu $\mathfrak{e}_1$ orthogonale Vektoren $\mathfrak{e}_2, \cdots, \mathfrak{e}_n$ derart, daß für

$$\mathfrak{x}^* = x_2 \mathfrak{e}_2 + \cdots + x_n \mathfrak{e}_n$$

die Formel gilt

$$Q(\mathfrak{x}^*) = \pm x_2^2 \pm \cdots \pm x_n^2,$$

und daraus erhalten wir für $Q(\mathfrak{x})$ die gewünschte Darstellung. Es ist

$$Q(\mathfrak{e}_i) = \varepsilon_i, \qquad Q(\mathfrak{e}_i, \mathfrak{e}_k) = 0 \quad (i \neq k).$$

Daß die $\mathfrak{e}_i$ alle voneinander linear unabhängig sind und sich jeder Vektor $\mathfrak{x}$ in der Gestalt (13) darstellen läßt, ist eine Folge dieser Relationen; sie liefern

$$x_i = \varepsilon_i \cdot Q(\mathfrak{e}_i, \mathfrak{x}). \tag{16}$$

Für den indefiniten Fall ist ein wichtiger Zusatz zu machen: *Die Anzahlen r und s der positiven und negativen unter den Vorzeichen* ε_i *sind durch die quadratische Form eindeutig bestimmt;* ich will sagen, sie habe r positive und s negative Dimensionen. (Man pflegt s den Trägheitsindex der quadratischen Form zu nennen, und der eben behauptete Satz ist unter dem Namen des Trägheitsgesetzes bekannt. Auf ihm beruht z. B. die Klassifizierung der Flächen 2. Ordnung.) Wir können die Anzahlen r und s in folgender Weise invariant charakterisieren: *Es gibt r wechselseitig zueinander orthogonale Vektoren* $\mathfrak{e}$, *für die* $Q(\mathfrak{e}) > 0$ *ist; aber für einen zu diesen orthogonalen, von* 0 *verschiedenen Vektor* $\mathfrak{x}$ *gilt notwendig* $Q(\mathfrak{x}) < 0$ — *so daß mehr als r derartige Vektoren* $\mathfrak{e}$ *nicht existieren können. Entsprechend für s.*

r Vektoren von der gewünschten Art werden durch diejenigen r Grundvektoren $\mathfrak{e}_i$ des der Darstellung (14) zugrunde liegenden Koordinatensystems geliefert, denen die positiven Vorzeichen ε_i korrespondieren; die zu-

gehörigen Komponenten x_i ($i = 1, 2, \cdots, r$) sind bestimmte Linearformen von $\mathfrak{x}$ [vergl. (10)]: $x_i = L_i(\mathfrak{x})$. Ist nun $\mathfrak{e}_i$ ($i = 1, 2, \cdots, r$) irgend ein System von Vektoren, die wechselseitig zueinander orthogonal sind und der Bedingung $Q(\mathfrak{e}_i) > 0$ genügen, und $\mathfrak{x}$ ein zu diesen $\mathfrak{e}_i$ orthogonaler Vektor, so können wir eine lineare Kombination

$$\mathfrak{y} = \lambda_1 \mathfrak{e}_1 + \cdots + \lambda_r \mathfrak{e}_r + \mu \mathfrak{x}$$

mit nicht lauter verschwindenden Koeffizienten bestimmen, welche den r homogenen Gleichungen genügt

$$L_1(\mathfrak{y}) = 0, \qquad \cdots, \qquad L_r(\mathfrak{y}) = 0.$$

Dann fällt, wie aus der Normaldarstellung hervorgeht, $Q(\mathfrak{y})$ negativ aus, es sei denn, daß $\mathfrak{y} = 0$ ist. Mittels der Formel

$$Q(\mathfrak{y}) - \{\lambda_1^2 Q(\mathfrak{e}_1) + \cdots + \lambda_r^2 Q(\mathfrak{e}_r)\} = \mu^2 Q(\mathfrak{x})$$

folgt jetzt die Behauptung $Q(\mathfrak{x}) < 0$, außer für den Fall, daß $\mathfrak{y} = 0$; $\lambda_1 = \cdots = \lambda_r = 0$ wird; dann aber muß nach Voraussetzung $\mu \neq 0$, also $\mathfrak{x} = 0$ sein.

In der Relativitätstheorie wird der Fall einer quadratischen Form von einer negativen und $n-1$ positiven Dimensionen von Bedeutung. Im dreidimensionalen Raum ist bei Benutzung affiner Koordinaten

$$-x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0$$

die Gleichung eines Kegels mit der Spitze im Nullpunkt, der aus zwei durch das verschiedene Vorzeichen von x_1 unterschiedenen Mänteln besteht, die nur im Nullpunkt miteinander zusammenhängen. Diese Trennung in zwei Mäntel liefert in der Relativitätstheorie den Gegensatz von Vergangenheit und Zukunft; wir wollen sie hier statt durch Kontinuitätsmerkmale auf elementarem Wege analytisch zu beschreiben versuchen. — Sei also Q eine nicht-ausgeartete quadratische Form von nur einer negativen Dimension. Wir wählen einen Vektor $\mathfrak{e}$, für welchen $Q(\mathfrak{e}) = -1$ ist. Die von 0 verschiedenen Vektoren $\mathfrak{x}$, für welche $Q(\mathfrak{x}) \leqq 0$ ist, mögen »negative Vektoren« genannt werden. Nach dem eben geführten Beweis des Trägheitssatzes kann kein negativer Vektor der Gleichung $Q(\mathfrak{e}\mathfrak{x}) = 0$ genügen. Sie zerfallen daher in zwei getrennte Klassen oder »Kegel« gemäß der Fallunterscheidung: $Q(\mathfrak{e}\mathfrak{x}) < 0$ oder > 0; $\mathfrak{e}$ selbst gehört dem ersten, $-\mathfrak{e}$ dem zweiten Kegel an. Ein negativer Vektor $\mathfrak{x}$ liegt »im Innern« oder »auf dem Mantel« seines Kegels, je nachdem $Q(\mathfrak{x}) < 0$ oder $= 0$ ist. Um zu zeigen, daß die beiden Kegel unabhängig sind von der Wahl des Vektors $\mathfrak{e}$, muß man beweisen: Aus $Q(\mathfrak{e}) = Q(\mathfrak{e}') = -1$, $Q(\mathfrak{x}) \leqq 0$ folgt, daß das Vorzeichen von $\frac{Q(\mathfrak{e}'\mathfrak{x})}{Q(\mathfrak{e}\mathfrak{x})}$ gleich dem von $-Q(\mathfrak{e}\mathfrak{e}')$ ist.

Jeden Vektor $\mathfrak{x}$ kann man in zwei Summanden zerlegen

$$\mathfrak{x} = x\mathfrak{e} + \mathfrak{x}^*$$

derart, daß der erste proportional, der zweite $\mathfrak{x}^*$ orthogonal zu $\mathfrak{e}$ ist. Man hat zu diesem Zwecke nur $x = -Q(\mathfrak{e}\mathfrak{x})$ zu nehmen, und es wird dann

$$Q(\mathfrak{x}) = -x^2 + Q(\mathfrak{x}^*).$$

$Q(\mathfrak{x}^*)$ ist, wie wir wissen, notwendig $\geqq 0$; schreiben wir dafür Q^*, so zeigt die Gleichung

$$Q^* = x^2 + Q(\mathfrak{x}) = Q^2(\mathfrak{e}\mathfrak{x}) + Q(\mathfrak{x}),$$

daß Q^* eine quadratische Form von $\mathfrak{x}$ ist (übrigens eine ausgeartete), die der identischen Ungleichung $Q^*(\mathfrak{x}) \geqq 0$ genügt. Wir haben jetzt

$$Q(\mathfrak{x}) = -x^2 + Q^*(\mathfrak{x}) \leqq 0, \qquad Q(\mathfrak{e}') = -e'^2 + Q^*(\mathfrak{e}') < 0.$$
$$\{x = -Q(\mathfrak{e}\mathfrak{x})\} \qquad\qquad \{e' = -Q(\mathfrak{e}\mathfrak{e}')\}$$

Aus der auf Q^* anwendbaren Ungleichung (12) folgt

$$\{Q^*(\mathfrak{e}'\mathfrak{x})\}^2 \leqq Q^*(\mathfrak{e}') \cdot Q^*(\mathfrak{x}) < e'^2 x^2;$$

mithin hat

$$-Q(\mathfrak{e}'\mathfrak{x}) = e'x - Q^*(\mathfrak{e}'\mathfrak{x})$$

das Vorzeichen des ersten Summanden $e'x$.

Wir lenken zu dem uns gegenwärtig interessierenden Fall einer positiv-definiten metrischen Grundform zurück. Benutzen wir zur Darstellung einer kongruenten Abbildung ein Cartesisches Koordinatensystem, so werden die Transformationskoeffizienten α_{ik} in Formel (5'), § 2 so beschaffen sein müssen, daß identisch in den ξ die Gleichung

$$\xi_1'^2 + \xi_2'^2 + \cdots + \xi_n'^2 = \xi_1^2 + \xi_2^2 + \cdots + \xi_n^2$$

besteht. Das liefert die »Orthogonalitätsbedingungen«

$$\sum_{r=1}^{n} \alpha_{ri}\alpha_{rj} = \begin{cases} 1 \; (i = j) \\ 0 \; (i \neq j) \end{cases}. \tag{17}$$

Sie besagen, daß beim Übergang zur inversen Abbildung die Koeffizienten α_{ik} sich in α_{ki} verwandeln:

$$\xi_i = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{ki}\xi_k'.$$

Daraus folgt noch, daß die Determinante $\Delta = |\alpha_{ik}|$ einer kongruenten Abbildung mit der ihrer inversen identisch ist, und da ihr Produkt $= 1$ sein muß, demnach $\Delta = \pm 1$ wird. (Das eine oder das andere Vorzeichen wird eintreten, je nachdem es sich um eigentliche oder spiegelbildliche Kongruenz handelt.)

Für die analytische Behandlung der metrischen Geometrie ergeben sich zwei Möglichkeiten. *Entweder* man unterwirft das zu benutzende affine Koordinatensystem keiner Einschränkung; dann gilt es, eine Theorie der Invarianz gegenüber beliebigen linearen Transformationen zu entwickeln, in welcher aber zum Unterschied von der affinen Geometrie ein für allemal eine bestimmte invariante quadratische Form, die metrische Grundform

$$Q(\mathfrak{x}) = \sum_{i,k=1}^{n} g_{ik}\xi_i\xi_k$$

als absolutes Datum zur Verfügung steht. *Oder* aber man benutzt von vornherein nur Cartesische Koordinatensysteme; dann handelt es sich um eine Theorie der Invarianz gegenüber orthogonalen Transformationen, d. h. solchen linearen Transformationen, deren Koeffizienten die Nebenbedingungen (17) erfüllen. Wir müssen hier, um spätere Verallgemeinerungen, die über die Euklidische Geometrie hinausführen, daran anknüpfen zu können, den ersten Weg einschlagen. Er erscheint auch algebraisch von vornherein als der einfachere, da es leichter sein wird, einen Über-

blick über diejenigen Ausdrücke zu gewinnen, die bei *allen* linearen Transformationen ungeändert bleiben, als über diejenigen, welche sich nur gegenüber den orthogonalen Transformationen invariant verhalten (einer Klasse von Transformationen, die durch nicht leicht zu beherrschende Nebenbedingungen eingeschränkt sind). Wir werden hier die Invariantentheorie, als »*Tensorrechnung*«, in solcher Gestalt entwickeln, daß sie uns die sachgemäße mathematische Fassung nicht nur der geometrischen, sondern auch aller physikalischen Gesetze ermöglicht[4]).

§ 5. Tensoren.

Zwei lineare Transformationen

$$(18)\qquad \xi^i = \sum_k \alpha^i_k \bar{\xi}^k, \qquad (|\alpha^i_k| \neq 0)$$

$$(18')\qquad \eta_i = \sum_k \check{\alpha}^k_i \bar{\eta}_k \qquad (|\check{\alpha}^k_i| \neq 0)$$

der Variablen ξ bzw. η in die Variablen $\bar{\xi}$, $\bar{\eta}$ heißen *kontragredient* zueinander, wenn dabei die bilineare Einheitsform $\sum_i \eta_i \xi^i$ in sich übergeht:

$$(19)\qquad \sum_i \eta_i \xi^i = \sum_i \bar{\eta}_i \bar{\xi}^i.$$

Das Verhältnis der Kontragredienz ist daher ein wechselseitiges. Gehen durch ein erstes Paar kontragredienter Transformationen A, $\check{A}$ die Variablen ξ, η in $\bar{\xi}$, $\bar{\eta}$ über, diese durch ein zweites Paar B, $\check{B}$ in $\bar{\bar{\xi}}$, $\bar{\bar{\eta}}$, so folgt aus

$$\sum_i \eta_i \xi^i = \sum_i \bar{\eta}_i \bar{\xi}^i = \sum_i \bar{\bar{\eta}}_i \bar{\bar{\xi}}^i,$$

daß die beiden zusammengesetzten Transformationen, welche ξ direkt in $\bar{\bar{\xi}}$, bzw. η in $\bar{\bar{\eta}}$ überführen, gleichfalls zueinander kontragredient sind. Die Koeffizienten zweier kontragredienter Substitutionen genügen den Bedingungen

$$(20)\qquad \sum_r \alpha^r_i \check{\alpha}^k_r = \delta^k_i = \begin{cases} 1\ (i = k) \\ 0\ (i \neq k) \end{cases}.$$

Setzt man in der linken Seite von (19) nur für die ξ ihre aus (18) zu entnehmenden Ausdrücke in $\bar{\xi}$ ein, so erkennt man, daß die Gleichungen (18′) durch Auflösung aus

$$(21)\qquad \bar{\eta}_i = \sum_k \alpha^k_i \eta_k$$

hervorgehen. Zu einer linearen Transformation gibt es also eine und nur eine kontragrediente. Aus demselben Grunde wie (21) gilt

$$\bar{\xi}^i = \sum_k \check{\alpha}^i_k \xi^k.$$

Durch Einsetzen dieser und der Ausdrücke (21) in (19) ergibt sich, daß die Koeffizienten außer (20) auch den Bedingungen

$$(20') \qquad \sum_r \alpha_r^i \check{\alpha}_k^r = \delta_k^i$$

genügen. Eine orthogonale Transformation ist eine solche, die zu sich selber kontragredient ist. Unterwirft man eine Linearform der Variablen ξ^i einer beliebigen linearen Transformation, so transformieren sich die Koeffizienten kontragredient zu den Variablen, oder sie verhalten sich, wie man auch zu sagen pflegt, kontravariant zu diesen.

Relativ zu einem affinen Koordinatensystem O; $\mathfrak{e}_1, \mathfrak{e}_2, \cdots, \mathfrak{e}_n$ hatten wir bis jetzt eine Verschiebung $\mathfrak{x}$ durch diejenigen eindeutig bestimmten Komponenten ξ^i charakterisiert, die sich aus der Gleichung

$$\mathfrak{x} = \xi^1 \mathfrak{e}_1 + \xi^2 \mathfrak{e}_2 + \cdots + \xi^n \mathfrak{e}_n$$

ergeben. Gehen wir zu einem andern affinen Koordinatensystem $\bar{O}$; $\bar{\mathfrak{e}}_1, \bar{\mathfrak{e}}_2, \cdots, \bar{\mathfrak{e}}_n$ über, wobei

$$\bar{\mathfrak{e}}_i = \sum_k \alpha_i^k \mathfrak{e}_k$$

sei, so erfahren die Komponenten von $\mathfrak{x}$, wie aus der Gleichung

$$\mathfrak{x} = \sum_i \xi^i \mathfrak{e}_i = \sum_i \bar{\xi}^i \bar{\mathfrak{e}}_i$$

hervorgeht, die Transformation

$$\xi^i = \sum_k \alpha_k^i \bar{\xi}^k;$$

sie transformieren sich also kontragredient zu den Grundvektoren des Koordinatensystems, verhalten sich kontravariant zu diesen und mögen daher genauer als *kontravariante Komponenten* des Vektors $\mathfrak{x}$ bezeichnet werden. Im *metrischen* Raum können wir eine Verschiebung aber auch relativ zum Koordinatensystem durch die Werte ihres skalaren Produkts mit den Grundvektoren $\mathfrak{e}_i$ des Koordinatensystems charakterisieren:

$$\xi_i = (\mathfrak{x} \cdot \mathfrak{e}_i) .$$

Bei Übergang zu einem andern Koordinatensystem transformieren sich diese Größen — das ist aus ihrer Definition sofort ersichtlich — wie die Grundvektoren selber, »kogredient« zu den Grundvektoren, d. i. nach den Gleichungen

$$\bar{\xi}_i = \sum_k \alpha_i^k \xi_k;$$

sie verhalten sich »kovariant«, und wir nennen sie die *kovarianten Komponenten* der Verschiebung. Der Zusammenhang zwischen den kovarianten und den kontravarianten Komponenten wird durch die Formeln vermittelt

$$(22) \qquad \xi_i = \sum_k (\mathfrak{e}_i \cdot \mathfrak{e}_k)\, \xi^k = \sum_k g_{ik} \xi^k ,$$

bzw. nach den dazu inversen (durch Auflösung hervorgehenden)

$$\xi^i = \sum_k g^{ik} \xi_k . \tag{22'}$$

In einem Cartesischen Koordinatensystem stimmen die kovarianten Komponenten mit den kontravarianten überein. — Es sei noch einmal betont, daß uns im affinen Raum nur die kontravarianten Komponenten zur Verfügung stehen, und wo deshalb in der Folge von Komponenten einer Verschiebung ohne Zusatz die Rede ist, sind darunter immer wie früher die kontravarianten zu verstehen.

Es wurden schon im vorhergehenden Linearformen einer oder zweier willkürlicher Verschiebungen ins Auge gefaßt. Von 2 können wir zu 3 und mehr Argumenten übergehen; nehmen wir beispielsweise eine Trilinearform $A(\mathfrak{x}\mathfrak{y}\mathfrak{z})$. Stellt man in einem beliebigen Koordinatensystem die zwei Verschiebungen $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$ durch ihre kontravarianten, $\mathfrak{z}$ durch ihre kovarianten Komponenten dar, ξ^i, η^i bzw. ζ_i, so drückt sich A algebraisch als eine Trilinearform dieser drei Reihen von Variablen mit bestimmten Zahlkoeffizienten aus:

$$\sum_{ikl} a^l_{ik} \xi^i \eta^k \zeta_l . \tag{23}$$

Die analoge Darstellung in einem andern, überstrichenen Koordinatensystem sei

$$\sum_{ikl} \bar{a}^l_{ik} \bar{\xi}^i \bar{\eta}^k \bar{\zeta}_l . \tag{23'}$$

Zwischen den beiden algebraischen Trilinearformen (23) und (23') besteht dann der Zusammenhang, daß die eine in die andere übergeht, wenn man die beiden Variablenreihen ξ, η kontragredient, die Variablenreihe ζ aber kogredient zu den Grundvektoren transformiert. Auf Grund dieses Zusammenhangs kann man, wenn die Koeffizienten a^l_{ik} bekannt sind und die Transformationskoeffizienten α^k_i des einen in das andere Koordinatensystem, die Koeffizienten $\bar{a}^l_{ik}$ von A im zweiten Koordinatensystem berechnen. Hiermit sind wir zu dem nicht auf die metrische Geometrie beschränkten, sondern nur den affinen Raum voraussetzenden Begriff des »*r-fach kovarianten, s-fach kontravarianten Tensors* $(r+s)$-*ter Stufe*« gelangt, dessen Erklärung wir jetzt in abstracto angeben wollen; um der einfacheren Ausdrucksweise willen spezialisieren wir aber die Anzahlen r und s etwa wie in dem eben angeführten Beispiel: $r = 2$, $s = 1$, $r + s = 3$.

Eine vom Koordinatensystem abhängige Trilinearform dreier Reihen von Variablen heißt ein zwiefach kovarianter, einfach kontravarianter Tensor 3. Stufe, wenn jene Abhängigkeit von folgender Art ist: die Ausdrücke der Linearform in irgend zwei Koordinatensystemen

$$\sum a^l_{ik} \xi^i \eta^k \zeta_l , \qquad \sum \bar{a}^l_{ik} \bar{\xi}^i \bar{\eta}^k \bar{\zeta}_l$$

gehen ineinander über, wenn man zwei der Variablenreihen (nämlich die

ersten beiden, ξ, η) kontragredient, die dritte kogredient (sc. zu den Grundvektoren des Koordinatensystems) transformiert. Die Koeffizienten der Linearform heißen die Komponenten des Tensors in dem betr. Koordinatensystem; und zwar nennen wir sie kovariant in den Indizes ik, die mit den kontragredient zu transformierenden Variablen verknüpft sind, kontravariant in den andern, hier dem einen Index l.

Die Terminologie rechtfertigt sich dadurch, daß die Koeffizienten einer Unilinearform sich kovariant verhalten, wenn man die Variablen kontragredient transformiert, kontravariant, wenn man sie kogredient transformiert. Kovariante Indizes werden dem Koeffizientenzeichen immer unten, kontravariante oben angehängt. Variable mit unteren Indizes sollen stets kogredient, solche mit oberen Indizes stets kontragredient zu den Grundvektoren des Koordinatensystems transformiert werden. Ein Tensor ist vollständig bekannt, wenn seine Komponenten in einem Koordinatensystem gegeben sind (vorausgesetzt natürlich, daß das Koordinatensystem selber gegeben ist); diese aber können willkürlich vorgeschrieben werden. Aufgabe der Tensorrechnung ist es, Eigenschaften und Relationen von Tensoren aufzustellen, die unabhängig sind vom Koordinatensystem. *Im übertragenen Sinne werden wir in Geometrie und Physik eine Größe als Tensor bezeichnen, wenn sie eindeutig und ohne Willkür eine vom Koordinatensystem in der geschilderten Weise abhängige algebraische Linearform bestimmt, durch deren Angabe die Größe selbst vollständig charakterisiert ist.* So haben wir oben eine Funktion dreier Verschiebungen, die homogen-linear von jedem ihrer Argumente abhängt, als einen Tensor 3. Stufe, und zwar als einen zwiefach kovarianten, einfach kontravarianten dargestellt. Dies war möglich im *metrischen* Raum, wie es denn dort überhaupt in unserm Belieben steht, jene Größe durch einen nullfach, einfach, zweifach oder dreifach kovarianten Tensor zu repräsentieren; im affinen Raum hätten wir sie jedoch nur in der letzten Weise, als einen kovarianten Tensor 3. Stufe ausdrücken können.

Erläutern wir die allgemeine Erklärung sogleich durch einige Beispiele, wobei wir noch auf dem rein affinen Standpunkt verharren.

1) Stellen wir eine *Verschiebung* $\mathfrak{a}$ in einem beliebigen Koordinatensystem durch ihre (kontravarianten) Komponenten α^i dar und ordnen ihr mit Bezug auf dieses Koordinatensystem die Linearform

$$\alpha^1 \xi_1 + \alpha^2 \xi_2 + \cdots + \alpha^n \xi_n$$

der Variablen ξ_i zu, so entsteht ein kontravarianter Tensor 1. Stufe. Fortan gebrauchen wir das Wort »*Vektor*« nicht mehr synonym für »Verschiebung«, sondern für »Tensor 1. Stufe«, so daß wir sagen: *die Verschiebung ist ein kontravarianter Vektor.* — Das Gleiche gilt für die *Geschwindigkeit* eines sich bewegenden Punktes; denn diese entsteht, wenn man die unendlichkleine Verschiebung, welche der sich bewegende Punkt während des Zeitelements dt erfährt, durch dt dividiert (im Limes für $dt = 0$). Der jetzige Gebrauch des Wortes Vektor ist mit dem

üblichen in Einklang, nach welchem es nicht bloß eine Verschiebung deckt, sondern jede Größe, die (ev. nach Wahl einer Maßeinheit) eindeutig und ohne Willkür durch eine Verschiebung repräsentiert werden kann.

2) Man pflegt gewöhnlich den geometrischen Charakter der *Kraft* darin zu erblicken, daß sie eine derartige Repräsentation gestattet. Dieser Darstellung der Kraft tritt aber eine andere gegenüber, von der wir heute glauben, daß sie dem physikalischen Wesen der Kraft besser gerecht wird, weil sie auf dem Begriff der *Arbeit* beruht, der in der neueren Physik statt des Kraftbegriffs immer deutlicher als der entscheidende und primäre in den Vordergrund getreten ist. Wir führen als *Komponenten einer Kraft* in einem Koordinatensystem O; $\mathfrak{e}_i$ diejenigen Zahlen p_i ein, welche angeben, eine wie große Arbeit die Kraft bei jeder der virtuellen Verschiebungen $\mathfrak{e}_i$ ihres Angriffspunktes leistet. Durch diese Zahlen ist die Kraft vollständig charakterisiert; ihre Arbeit bei der willkürlichen Verrückung

$$\mathfrak{x} = \xi^1 \mathfrak{e}_1 + \xi^2 \mathfrak{e}_2 + \cdots + \xi^n \mathfrak{e}_n$$

ihres Angriffspunktes ist dann $= \sum\limits_i p_i \xi^i$. Es folgt daraus, daß in zwei verschiedenen Koordinatensystemen

$$\sum_i p_i \xi^i = \sum_i \bar{p}_i \bar{\xi}^i$$

gilt, falls die Variablen ξ^i (ihrer Behaftung mit oberen Indizes gemäß) kontragredient zum Koordinatensystem transformiert werden. Danach ist *die Kraft ein kovarianter Vektor.* Der Zusammenhang dieser Darstellung mit der üblichen durch eine Verschiebung wird zur Sprache kommen, wenn wir von dem gegenwärtig eingenommenen Standpunkt der affinen Geometrie zur metrischen übergehen. Die Komponenten eines kovarianten Vektors transformieren sich bei Übergang zu einem neuen Koordinatensystem kogredient zu den Grundvektoren.

Zwischenbemerkungen. Da die Transformationen der Komponenten a_i eines kovarianten und b^i eines kontravarianten Vektors kontragredient zueinander sind, ist $\sum\limits_i a_i b^i$ eine durch diese beiden Vektoren unabhängig vom Koordinatensystem bestimmte Zahl. Hier haben wir das erste Beispiel einer invarianten Tensoroperation vor uns. In das System der Tensoren reihen sich die Zahlen oder *Skalare* als Tensoren 0ter Stufe ein.

Es ist schon früher erklärt worden, wann eine Bilinearform zweier Variablenreihen *symmetrisch* heißt und wann eine symmetrische Bilinearform *nicht-ausgeartet* ist. *Schiefsymmetrisch* ist eine Bilinearform $F(\xi\eta)$, wenn sie bei Vertauschung der beiden Variablenreihen in ihr Negatives umschlägt:

$$F(\eta\xi) = -F(\xi\eta);$$

an ihren Koeffizienten a_{ik} gibt sich das durch die Gleichungen $a_{ki} = -a_{ik}$

kund. Diese Eigenschaften bleiben erhalten, wenn die beiden Variablenreihen derselben linearen Transformation unterworfen werden. Es ist also eine vom Koordinatensystem unabhängige Eigenschaft von kovarianten oder kontravarianten Tensoren 2. Stufe, schiefsymmetrisch zu sein oder symmetrisch oder (symmetrisch und) nicht-ausgeartet.

Da durch kontragrediente Transformation zweier Variablenreihen die bilineare Einheitsform in sich übergeht, gibt es unter den gemischten (d. i. einfach kovarianten, einfach kontravarianten) Tensoren 2. Stufe einen, den »*Einheitstensor*«, der in jedem Koordinatensystem die Komponenten $\delta_i^k = \begin{matrix} 1 \ (i = k) \\ 0 \ (i \neq k) \end{matrix}$ hat.

3) Die in einem Euklidischen Raum herrschende *Metrik* weist je zwei Verschiebungen

$$\mathfrak{x} = \sum_i \xi^i \mathfrak{e}_i, \qquad \mathfrak{y} = \sum_i \eta^i \mathfrak{e}_i$$

eine vom Koordinatensystem unabhängige Zahl als ihr skalares Produkt zu:

$$(\mathfrak{x} \cdot \mathfrak{y}) = \sum_{ik} g_{ik} \xi^i \eta^k, \qquad g_{ik} = (\mathfrak{e}_i \cdot \mathfrak{e}_k).$$

Die rechts stehende Bilinearform hängt daher vom Koordinatensystem in solcher Weise ab, daß durch sie ein kovarianter Tensor 2. Stufe gegeben ist, der *metrische Fundamentaltensor*. Durch ihn ist die Metrik vollständig charakterisiert. Er ist symmetrisch und nicht-ausgeartet.

4) Durch eine »*lineare Vektor-Abbildung*« wird jeder Verschiebung $\mathfrak{x}$ eine Verschiebung $\mathfrak{x}'$ in linearer Weise zugeordnet, d. h. so, daß der Summe $\mathfrak{x} + \mathfrak{y}$ die Summe $\mathfrak{x}' + \mathfrak{y}'$, dem Produkt $\lambda\mathfrak{x}$ das Produkt $\lambda\mathfrak{x}'$ entspricht. Solche lineare Vektor-Abbildungen wollen wir, um uns eines kurzen charakteristischen Namens bedienen zu können, *Matrizen* nennen. Gehen die Grundvektoren $\mathfrak{e}_i$ eines Koordinatensystems durch die Abbildung in die Vektoren

$$\mathfrak{e}'_i = \sum_k a_i^k \mathfrak{e}_k$$

über, so verwandelt sie allgemein die beliebige Verschiebung

$$\mathfrak{x} = \sum_i \xi^i \mathfrak{e}_i \quad \text{in} \quad \mathfrak{x}' = \sum_i \xi^i \mathfrak{e}'_i = \sum_{ik} a_i^k \xi^i \mathfrak{e}_k. \tag{24}$$

Wir können die Matrix daher in dem gewählten Koordinatensystem durch die Bilinearform

$$\sum_{ik} a_i^k \xi^i \eta_k$$

kennzeichnen. Aus (24) geht hervor, daß für zwei Koordinatensysteme (unter Verwendung der früheren Bezeichnungen) der Zusammenhang

$$\sum_{ik} \bar{a}_i^k \bar{\xi}^i \bar{\mathfrak{e}}_k = \sum_{ik} a_i^k \xi^i \mathfrak{e}_k \; (= \mathfrak{x}')$$

besteht, wenn

$$\sum_i \bar{\xi}^i \bar{\mathfrak{e}}_i = \sum_i \xi^i \mathfrak{e}_i \ (= \mathfrak{x})$$

ist; also wird

$$\sum_{ik} \bar{a}_i^k \bar{\xi}^i \bar{\eta}_k = \sum_{ik} a_i^k \xi^i \eta_k,$$

falls die η_i kogredient, die ξ^i kontragredient zu den Grundvektoren transformiert werden (diese Zusatzbemerkung über die Transformation der Variablen versteht sich nachgerade von selbst, so daß wir sie in Zukunft in ähnlichen Fällen einfach fortlassen). Auf solche Art ist *die Matrix als ein gemischter Tensor 2. Stufe* dargestellt. Insbesondere entspricht der »Identität«, die jeder Verschiebung $\mathfrak{x}$ sie selber zuordnet, der Einheitstensor.

Wie die Beispiele von Kraft und Metrik zeigen, tritt in den Anwendungen häufig der Fall ein, daß die Darstellung der geometrischen oder physikalischen Größe durch einen Tensor erst möglich ist nach vorhergegangener Wahl einer *Maßeinheit*, einer Wahl, die nur individuell, durch Aufweisung vollzogen werden kann; bei Abänderung der Maßeinheit multiplizieren sich die darstellenden Tensoren mit einer universellen Konstanten, dem Verhältnis der beiden Maßeinheiten.

Der Erklärung des Begriffes Tensor ist offenbar das folgende Kriterium äquivalent: *eine vom Koordinatensystem abhängige Linearform mehrerer Variablenreihen ist ein Tensor, wenn sie immer dadurch einen vom Koordinatensystem unabhängigen Wert annimmt, daß man für jede kontragrediente Variablenreihe die Komponenten eines willkürlichen kontravarianten Vektors einsetzt, für eine kogrediente aber die Komponenten eines beliebigen kovarianten Vektors.*

Kehren wir jetzt von der *affinen* zur *metrischen* Geometrie zurück, so sinkt, wie die Ausführungen zu Anfang des Paragraphen lehren, der Unterschied von kovariant und kontravariant, der in der affinen Geometrie die Tensoren selber betrifft, zu einem bloßen Unterschied der Darstellungsweise herab. Statt von kovarianten, gemischten und kontravarianten *Tensoren* wird man hier also lieber nur von den kovarianten, gemischten und kontravarianten *Komponenten* eines Tensors sprechen. Es läßt sich dieser Übergang zwischen den Tensoren verschiedenen Kovarianzcharakters nach dem Obigen einfach so formulieren: Deuten wir in einem Tensor die kontragredienten Variablen als kontravariante Komponenten einer willkürlichen Verschiebung, die kogredienten als kovariante Komponenten einer willkürlichen Verschiebung, so verwandelt er sich in eine vom Koordinatensystem unabhängige Linearform mehrerer willkürlicher Verschiebungen; indem wir nun die Argumente nach Gutdünken durch ihre kovarianten oder kontravarianten Komponenten repräsentieren, gehen wir zu anderen Darstellungen desselben Tensors über. Rein algebraisch vollzieht sich die Verwandlung eines kovarianten Index in einen kontravarianten, indem man in der Linearform die betreffenden Variablen ξ^i nach (22) durch neue ξ_i ersetzt; die invariante Natur dieses Prozesses beruht auf dem Umstand, daß diese Substitution kontragrediente Variable in kogrediente

überführt. Der umgekehrte Prozeß wird nach den inversen Gleichungen (22') vollzogen. An den Komponenten selber geschieht (wegen der Symmetrie der g_{ik}) der Übergang von kontravariant zu kovariant, das »Herunterziehen des Index«, stets nach dem Schema:

$$a^i \text{ wird ersetzt durch } a_i = \sum_j g_{ij} a^j,$$

einerlei ob die Zahlen a^i noch mit weiteren Indizes behaftet sind oder nicht; das Heraufziehen des Index durch die inversen Gleichungen.

Wenden wir das Gesagte insbesondere auf den metrischen Fundamentaltensor an, so erhalten wir

$$\sum_{ik} g_{ik} \xi^i \eta^k = \sum_i \xi^i \eta_i = \sum_k \xi_k \eta^k = \sum_{ik} g^{ik} \xi_i \eta_k.$$

Seine gemischten Komponenten sind also die Zahlen δ^i_k, seine kontravarianten die Koeffizienten g^{ik} der zu (22) inversen Gleichungen (22'). Aus der Symmetrie des Tensors ergibt sich, daß auch diese wie die g_{ik} der Symmetrie-Bedingung $g^{ki} = g^{ik}$ genügen.

Hinsichtlich der Bezeichnung werde für immer die Verabredung getroffen, daß wir die kovarianten, gemischten und kontravarianten Komponenten desselben Tensors mit dem gleichen Buchstaben kennzeichnen und durch die Stellung des Index oben oder unten angeben, ob die Komponenten hinsichtlich dieses Index kontra- oder kovariant sind, wie es das folgende Beispiel eines Tensors 2. Stufe zeigt:

$$\sum_{ik} a_{ik} \xi^i \eta^k = \sum_{ik} a^i_{\ k} \xi_i \eta^k = \sum_{ik} a_i^{\ k} \xi^i \eta_k = \sum_{ik} a^{ik} \xi_i \eta_k$$

(wobei die Variablen mit unteren und mit oberen Indizes durch (22) gekoppelt sind).

Im metrischen Raum entfällt nach dem Gesagten der Unterschied zwischen einem kovarianten und einem kontravarianten Vektor; hier können wir eine Kraft, die nach unserer Auffassung von Hause aus ein kovarianter Vektor ist, auch als einen kontravarianten, durch eine Verschiebung, repräsentieren. Denn hatten wir sie oben durch die Linearform $\sum_i p_i \xi^i$ mit den kontragredienten Variabeln ξ^i dargestellt, so können wir diese jetzt durch (22') in eine solche mit den kogredienten ξ_i verwandeln: $\sum_i p^i \xi_i$. Dann gilt

$$\sum_i p^i \xi_i = \sum_{ik} g_{ik} p^i \xi^k = \sum_{ik} g_{ik} p^k \xi^i = \sum_i p_i \xi^i;$$

die repräsentierende Verschiebung $\mathfrak{p}$ ist also dadurch bestimmt, daß die Arbeit, welche die Kraft bei einer willkürlichen Verschiebung $\mathfrak{x}$ leistet, gleich dem skalaren Produkt der Verschiebungen $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{x}$ ist.

In einem *Cartesischen* Koordinatensystem, in welchem der Fundamentaltensor die Komponenten

$$g_{ik} = \begin{cases} 1 & (i = k) \\ 0 & (i \neq k) \end{cases}$$

hat, lauten die Koppelungsgleichungen (22) einfach: $\xi_i = \xi^i$. Beschränken wir uns auf den Gebrauch Cartesischer Koordinatensysteme, so fällt nicht nur für die Tensoren, sondern auch für die Tensorkomponenten der Unterschied zwischen kovariant und kontravariant dahin. — Es ist aber zu erwähnen, daß die bisher auseinandergesetzten Begriffe hinsichtlich des Fundamentaltensors g_{ik} nur voraussetzen, daß er symmetrisch und nicht-ausgeartet ist, während der Einführung eines Cartesischen Koordinatensystems der weitere Umstand zugrunde liegt, daß die korrespondierende quadratische Form positiv-definit ist. Das ist nicht gleichgültig. In der Relativitätstheorie tritt zu den drei Raumkoordinaten als vierte gleichberechtigt die Zeitkoordinate hinzu, und die Maßbestimmung, die in dieser vierdimensionalen Mannigfaltigkeit gilt, beruht nicht auf einer definiten, sondern einer indefiniten Form (Kap. III). In dieser Mannigfaltigkeit werden wir also, wenn wir uns auf reelle Koordinaten beschränken, kein Cartesisches Koordinatensystem einführen können; aber die hier entwickelten Begriffe, die auf die Dimensionenzahl $n = 4$ zu spezialisieren sind, behalten ihre volle Anwendbarkeit. Außerdem spricht die Rücksicht auf die algebraische Einfachheit des Kalküls, wie schon am Schluß von § 4 erwähnt wurde, gegen die ausschließliche Benutzung Cartesischer Koordinatensysteme. Endlich und vor allem aber ist es für spätere Erweiterungen, die über die Euklidische Geometrie hinausführen, von großer Wichtigkeit, daß schon hier der affine Standpunkt selbständig und unabhängig von dem metrischen zu voller Geltung gebracht wird.

Die geometrischen und physikalischen Größen sind Skalare, Vektoren und Tensoren: darin spricht sich die mathematische Beschaffenheit des Raumes aus, in welchem diese Größen existieren. Die dadurch bedingte mathematische Symmetrie ist keineswegs auf die Geometrie beschränkt, sondern kommt im Gegenteil erst in der Physik recht zur Geltung: weil die Naturvorgänge in einem metrischen Raum sich abspielen, ist die Tensorrechnung das natürliche mathematische Instrument zum Ausdruck der Gesetzmäßigkeit, welche diese Vorgänge beherrscht.

§ 6. Tensoralgebra. Beispiele.

Addition von Tensoren. Durch Multiplikation einer Linearform, Bilinearform oder Trilinearform . . . mit einer Zahl, ebenso durch Addition zweier Linearformen oder zweier Bilinearformen . . . entsteht immer wiederum eine derartige Form. Vektoren und Tensoren kann man also mit einer Zahl (einem Skalar) multiplizieren und zwei oder auch mehrere Tensoren der gleichen Stufe addieren. Diese Operationen werden an den Komponenten durch Multiplikation mit der betr. Zahl, bzw. durch Addition ausgeführt. Im Gebiete der Tensoren jeder Stufe gibt es einen ausgezeichneten Tensor 0, dessen sämtliche Komponenten verschwinden;

zu einem beliebigen Tensor der gleichen Stufe addiert, ändert er diesen nicht. — Der Zustand eines physikalischen Systems wird durch die Angabe der Werte gewisser Skalare und Tensoren beschrieben; daß ein aus ihnen durch mathematische Operationen gebildeter invarianter (d. h. nur von ihnen, nicht aber von der Wahl des Koordinatensystems abhängiger) Tensor = 0 ist, darin besteht allgemein die Aussage eines Naturgesetzes.

Beispiele. Die Bewegung eines Punktes wird analytisch in der Weise dargestellt, daß man den Ort des beweglichen Punktes, bzw. dessen Koordinaten x_i als Funktionen der Zeit t angibt. Die Ableitungen $\frac{dx_i}{dt}$ sind die kontravarianten Komponenten u^i des Vektors »*Geschwindigkeit*«. Durch Multiplikation mit der Masse m des bewegten Punktes, einem Skalar, der die Trägheit der Materie zum Ausdruck bringt, erhält man den »*Impuls*« (oder »*Bewegungsgröße*«). Durch Addition der Impulse mehrerer Massenpunkte, bzw. aller derer, aus denen man sich in der Punktmechanik einen starren Körper zusammengesetzt denkt, erhält man den Gesamt-Impuls des Punktsystems oder des starren Körpers. Bei kontinuierlicher Massenausbreitung sind die Summen durch Integrale zu ersetzen. Das Grundgesetz der Bewegung lautet, wenn G^i die kontravarianten Komponenten des Impulses eines Massenpunktes, p^i die der Kraft sind:

$$\frac{dG^i}{dt} = p^i; \qquad G^i = mu^i. \tag{25}$$

Da nach unserer Auffassung die Kraft von Hause aus ein kovarianter Vektor ist, ist dieses Grundgesetz nur in einem metrischen, nicht in einem rein affinen Raum möglich. Dasselbe Gesetz gilt für den Gesamtimpuls eines starren Körpers und die an ihm angreifende Gesamtkraft.

Multiplikation von Tensoren. Durch Multiplikation zweier Linearformen $\sum_i a_i \xi^i$, $\sum_i b_i \eta^i$ der Variablen ξ und η erhält man eine Bilinearform

$$\sum_{ik} a_i b_k \xi^i \eta^k$$

und damit aus den beiden Vektoren a und b einen Tensor 2. Stufe c:

$$a_i b_k = c_{ik}. \tag{26}$$

Durch die Gleichung (26) wird ein invarianter Zusammenhang zwischen den Vektoren a und b und dem Tensor c dargestellt; d. h. bei Übergang zu einem neuen Koordinatensystem gelten für die (überstrichenen) Komponenten dieser Größen im neuen Koordinatensystem genau dieselben Gleichungen

$$\bar{a}_i \bar{b}_k = \bar{c}_{ik}.$$

In derselben Weise läßt sich z. B. die Multiplikation eines Tensors 1. Stufe mit einem Tensor 2. Stufe (allgemein eines Tensors beliebiger Stufe mit einem Tensor beliebiger Stufe) vollziehen; durch Multiplikation von

$$\sum_i a_i \xi^i \quad \text{mit} \quad \sum_{ik} b_i^k \eta^i \zeta_k,$$

worin die griechischen Buchstaben, je nachdem sie ihre Indizes oben oder unten tragen, kontragredient oder kogredient zu transformierende Variable bedeuten, entspringt die trilineare Form

$$\sum_{ikl} a_i b_k^l \xi^i \eta^k \zeta_l$$

und somit durch Multiplikation der beiden Tensoren 1. und 2. Stufe ein Tensor c der 3. Stufe:

$$a_i \cdot b_k^l = c_{ik}^l.$$

An den Komponenten ist diese Multiplikation, wie man sieht, einfach dadurch auszuführen, daß jede Komponente des einen Tensors mit jeder Komponente des andern multipliziert wird; *die Indizes müssen dabei völlig getrennt gehalten werden.* Es ist noch zu beachten, daß beispielsweise die in bezug auf den Index l kovarianten Komponenten des soeben gebildeten Tensors 3. Stufe

$$c_{ik}^l = a_i b_k^l \text{ durch } c_{ikl} = a_i b_{kl}$$

gegeben sind. In solchen Multiplikationsformeln ist es also ohne weiteres gestattet, irgend einen Index auf beiden Seiten der Gleichung von unten nach oben oder von oben nach unten zu schaffen.

Beispiele schiefsymmetrischer und symmetrischer Tensoren. Aus zwei Vektoren mit den kontravarianten Komponenten a^i, b^i entsteht durch Multiplikation in der einen und andern Reihenfolge und nachfolgende Subtraktion ein schiefsymmetrischer Tensor 2. Stufe c mit den kontravarianten Komponenten

$$c^{ik} = a^i b^k - a^k b^i.$$

In der gewöhnlichen Vektorrechnung tritt dieser Tensor auf als »vektorielles Produkt« der beiden Vektoren a und b. Zeichnet man im dreidimensionalen Raum einen bestimmten Schraubungssinn aus, so ist es nämlich möglich, eine einfache umkehrbar-eindeutige Korrespondenz zwischen diesen Tensoren und den Vektoren herzustellen, die es gestattet, den Tensor c durch einen Vektor zu repräsentieren. (Im vierdimensionalen Raum ist dies schon deshalb ausgeschlossen, weil dort ein schiefsymmetrischer Tensor 2. Stufe 6 unabhängige Komponenten besitzt, ein Vektor aber nur 4; ebenso in Räumen von noch höherer Dimensionszahl. Für die Dimensionszahl 3 aber beruht die erwähnte Darstellung auf folgendem.) Benutzen wir lediglich Cartesische Koordinatensysteme und führen neben a und b noch eine willkürliche Verschiebung ξ ein, so multipliziert sich beim Übergang von einem Cartesischen Koordinatensystem zu einem andern die Determinante

$$\begin{vmatrix} a^1 & a^2 & a^3 \\ b^1 & b^2 & b^3 \\ \xi^1 & \xi^2 & \xi^3 \end{vmatrix} = c^{23}\xi^1 + c^{31}\xi^2 + c^{12}\xi^3$$

mit der Determinante der Transformationskoeffizienten. Für eine ortho-

gonale Transformation ist aber diese Determinante $= \pm 1$. Beschränken wir uns auf die »eigentlichen« orthogonalen Transformationen, für welche diese Determinante $= +1$ ist, so bleibt jene Linearform der ξ also ungeändert; demgemäß ist durch die Formeln

$$c^{23} = c_1^*, \quad c^{31} = c_2^*, \quad c^{12} = c_3^*$$

mit dem schiefsymmetrischen Tensor c ein Vektor c^* in einer Weise verknüpft, die invariant ist gegenüber eigentlichen orthogonalen Transformationen. Der Vektor c^* ist senkrecht zu den beiden Vektoren a und b, und seine Größe ist (nach elementaren Formeln der analytischen Geometrie) gleich dem Flächeninhalt des von den Vektoren a und b aufgespannten Parallelogramms. — Die Ersetzung der schiefsymmetrischen Tensoren durch Vektoren in der üblichen Vektorrechnung mag im Interesse der Bezeichnungsökonomie gerechtfertigt sein. Sie verdeckt aber in mancher Hinsicht das Wesen der Sache und gibt z. B. in der Elektrodynamik zu den berüchtigten Schwimmregeln Anlaß, die keineswegs ein Ausdruck dafür sind, daß in dem Raum, in dem sich die elektrodynamischen Vorgänge abspielen, ein ausgezeichneter Schraubungssinn herrscht, sondern nur notwendig werden, weil man die magnetische Feldstärke als Vektor betrachtet, während sie in Wahrheit (wie das sog. vektorielle Produkt zweier Vektoren) ein schiefsymmetrischer Tensor ist. Wäre uns eine Raumdimension mehr beschert, so hätte es niemals zu einem solchen Irrtum kommen können.

In der Mechanik tritt das schiefsymmetrische Tensorprodukt zweier Vektoren auf 1) als *Drehimpuls (Impulsmoment)* um einen Punkt O: Befindet sich in P ein Massenpunkt und sind ξ^1, ξ^2, ξ^3 die Komponenten von $\overrightarrow{OP}$, ferner u^i die (kontravarianten) Komponenten der Geschwindigkeit jenes Punktes im betrachteten Moment, m seine Masse, so ist der Drehimpuls definiert durch

$$L^{ik} = m\,(u^i \xi^k - u^k \xi^i).$$

Der Drehimpuls eines starren Körpers um einen Punkt O ist die Summe der den einzelnen Massenpunkten des Körpers zugehörigen Drehimpulse. 2) tritt es auf als *Drehmoment einer Kraft.* Greift diese im Punkte P an und sind p^i ihre kontravarianten Komponenten, so ist dasselbe definiert durch

$$q^{ik} = p^i \xi^k - p^k \xi^i.$$

Durch Addition erhält man daraus das Drehmoment eines Kräftesystems. Für einen Massenpunkt wie auch für einen frei beweglichen starren Körper gilt neben (25) das Gesetz

$$\frac{dL^{ik}}{dt} = q^{ik}; \tag{27}$$

für Drehung eines starren Körpers um den festgehaltenen Punkt O gilt allein das Dreh-Gesetz (27).

Ein weiteres Beispiel eines schiefsymmetrischen Tensors ist die *Dreh-*

geschwindigkeit eines starren Körpers um den festen Punkt O. Geht bei einer Drehung um O allgemein der Punkt P über in P', so entsteht der Vektor $\overrightarrow{OP'}$, also auch $\overrightarrow{PP'}$ durch eine lineare Abbildung aus $\overrightarrow{OP}$. Sind ξ^i die Komponenten von $\overrightarrow{OP}$, $\delta\xi^i$ die von $\overrightarrow{PP'}$, v^i_k die Komponenten jener linearen Abbildung (Matrix), so gilt

$$\delta\xi^i = \sum_k v^i_k \xi^k. \tag{28}$$

Wir fassen hier lediglich unendlichkleine Drehungen ins Auge; sie sind unter den infinitesimalen Matrizen durch die weitere Eigenschaft ausgezeichnet, daß identisch in ξ

$$\delta\left(\sum_i \xi_i \xi^i\right) = \delta\left(\sum_{ik} g_{ik}\xi^i\xi^k\right) = 0$$

wird, und das liefert

$$\sum_i \xi_i \delta\xi^i = 0.$$

Setzen wir die Ausdrücke (28) ein, so kommt

$$\sum_{ik} v^i_k \xi_i \xi^k = \sum_{ik} v_{ik}\xi^i\xi^k = 0.$$

Das muß identisch in den Variablen ξ^i gelten, und daher ist

$$v_{ki} + v_{ik} = 0;$$

der Tensor mit den kovarianten Komponenten v_{ik} ist also schiefsymmetrisch.

Bei der Bewegung eines starren Körpers erfährt der Körper während der unendlichkleinen Zeit δt eine unendlichkleine Drehung. Wir brauchen den eben gebildeten infinitesimalen Drehungstensor v nur durch δt zu dividieren, um (im Limes für $\delta t = 0$) den schiefsymmetrischen Tensor »Winkelgeschwindigkeit« zu erhalten, den wir wiederum mit v bezeichnen wollen. Die Formeln (28) gehen dabei, wenn u^i die kontravarianten, u_i die kovarianten Komponenten der Geschwindigkeit des Punktes P bedeuten, über in die Grundformel der Kinematik des starren Körpers:

$$u_i = \sum_k v_{ik}\xi^k. \tag{29}$$

Die Existenz der »momentanen Drehaxe« folgt aus dem Umstand, daß die linearen Gleichungen

$$\sum_k v_{ik}\xi^k = 0$$

mit den schiefsymmetrischen Koeffizienten v_{ik} *im Falle* $n = 3$ stets Lösungen besitzen, die von der trivialen $\xi^1 = \xi^2 = \xi^3 = 0$ verschieden sind. — Auch die Winkelgeschwindigkeit pflegt meistens als ein Vektor dargestellt zu werden.

Endlich bietet das bei der Drehung eines Körpers auftretende *Trägheitsmoment* ein einfaches Beispiel für einen symmetrischen Tensor 2. Stufe.

Befindet sich im Punkte P, zu dem vom Drehpunkt O aus der Vektor $\overrightarrow{OP}$ mit den Komponenten ξ^i führt, ein Massenpunkt von der Masse m, so nennen wir den symmetrischen Tensor, dessen kontravariante Komponenten durch $m\xi^i\xi^k$ gegeben sind (Multiplikation!), die »Rotationsträgheit« des Massenpunktes (für den Drehpunkt O). Die Rotationsträgheit T^{ik} eines Punktsystems oder Körpers ist definiert als die Summe dieser für seine einzelnen Punkte P zu bildenden Tensoren. Die Definition weicht von der üblichen ab; sie ist aber die richtige, wenn man Ernst damit macht, die Rotationsgeschwindigkeit als einen schiefsymmetrischen Tensor und nicht als einen Vektor aufzufassen (wie wir alsbald sehen werden). Für Drehung um O spielt der Tensor T^{ik} die gleiche Rolle wie der Skalar m für Translationsbewegung.

Verjüngung. Sind c_i^k die gemischten Komponenten eines Tensors 2. Stufe, so ist $\sum_i c_i^i$ eine Invariante. Sind also $\bar c_i^k$ die gemischten Komponenten desselben Tensors nach Übergang zu einem neuen Koordinatensystem, so ist

$$\sum_i c_i^i = \sum_i \bar c_i^i.$$

Beweis: Die Variablen ξ^i, η_i der Bilinearform

$$\sum_{ik} c_i^k \xi^i \eta_k$$

sind den kontragredienten Transformationen

$$\xi^i = \sum_k \alpha_k^i \bar\xi^k, \qquad \eta_i = \sum_k \check\alpha_i^k \bar\eta_k$$

zu unterwerfen, um sie in

$$\sum_{ik} \bar c_i^k \bar\xi^i \bar\eta_k$$

überzuführen. Daraus ergibt sich

$$\bar c_r^r = \sum_{ik} c_i^k \alpha_r^i \check\alpha_k^r,$$

$$\sum_r \bar c_r^r = \sum_{ik} \left(c_i^k \sum_r \alpha_r^i \check\alpha_k^r\right),$$

und das ist wegen (20′)

$$= \sum_i c_i^i.$$

Die aus den Komponenten c_i^k einer Matrix gebildete Invariante $\sum_i c_i^i$ heißt die *Spur* der Matrix.

Wir können aus diesem Satz sogleich eine allgemeine Rechenoperation für Tensoren, die »Verjüngung«, herleiten, die als zweite neben die Multiplikation tritt. Indem wir in den gemischten Komponenten eines

Tensors einen bestimmten oberen mit einem bestimmten unteren Index zusammenfallen lassen und nach ihm summieren, erhalten wir aus dem gegebenen Tensor einen neuen, von einer um 2 geringeren Stufenzahl; z. B. aus den Komponenten a_{hik}^{lm} eines Tensors 5. Stufe die Komponenten

$$\sum_r a_{hir}^{lr} = c_{hi}^l \tag{30}$$

eines Tensors 3. Stufe. Der durch (30) dargestellte Zusammenhang ist invariant, d. h. drückt sich in der gleichen Weise nach dem Übergang zu einem neuen Koordinatensystem aus:

$$\sum_r \bar{a}_{hir}^{lr} = \bar{c}_{hi}^l . \tag{31}$$

Wir brauchen, um das einzusehen, nur zwei willkürliche kontravariante Vektoren ξ^i, η^i und einen kovarianten ζ_i zu Hülfe zu nehmen, mittels ihrer die Komponenten

$$\sum_{hil} a_{hik}^{lm} \xi^h \eta^i \zeta_l = f_k^m$$

eines gemischten Tensors 2. Stufe zu bilden und auf ihn unsern eben bewiesenen Satz

$$\sum_r f_r^r = \sum_r \bar{f}_r^r$$

anzuwenden; dann ergibt sich, wenn wir die c durch (30), die $\bar{c}$ durch (31) definieren, die Formel

$$\sum_{hil} c_{hi}^l \xi^h \eta^i \zeta_l = \sum_{hil} \bar{c}_{hi}^l \bar{\xi}^h \bar{\eta}^i \bar{\zeta}_l .$$

Es sind also in der Tat $\bar{c}_{hi}^l$ im neuen Koordinatensystem die Komponenten desselben Tensors 3. Stufe, dessen Komponenten im alten $= c_{hi}^l$ sind.

Beispiele für diese Operation der Verjüngung sind uns im vorigen schon in Hülle und Fülle begegnet. Immer wo nach gewissen Indizes summiert wurde, trat in dem allgemeinen Summenglied der Summationsindex doppelt, einmal unten und einmal oben auf; jede solche Summation ist die Ausführung einer Verjüngung. So z. B. in Formel (29): aus v_{ik} und ξ^i kann man durch Multiplikation den Tensor 3. Stufe $v_{ik}\xi^l$ bilden; indem man dann k mit l zusammenfallen läßt und über k summiert, ergibt sich der verjüngte Tensor 1. Stufe u_i. Führt eine Matrix A die beliebige Verschiebung $\mathfrak{x}$ in $\mathfrak{x}' = A(\mathfrak{x})$, eine zweite Matrix B diese $\mathfrak{x}'$ in $\mathfrak{x}'' = B(\mathfrak{x}')$ über, so entspringt aus beiden Matrizen eine zusammengesetzte BA, welche direkt $\mathfrak{x}$ in $\mathfrak{x}'' = BA(\mathfrak{x})$ überführt. Hat A die Komponenten a_i^k, B die Komponenten b_i^k, so sind die Komponenten der zusammengesetzten Matrix BA:

$$c_i^k = \sum_r b_i^r a_r^k .$$

Auch hier handelt es sich um Multiplikation mit nachfolgender Verjüngung. —

Der Prozeß der Verjüngung kann gleichzeitig für mehrere Indexpaare vorgenommen werden. Aus den Tensoren 1., 2., 3., ... Stufe mit den kovarianten Komponenten a_i, a_{ik}, a_{ikl}, ... erhält man so insbesondere die Invarianten

$$\sum_i a_i a^i, \qquad \sum_{ik} a_{ik} a^{ik}, \qquad \sum_{ikl} a_{ikl} a^{ikl}, \qquad \ldots .$$

Wenn, wie wir hier annehmen, die dem metrischen Grundtensor entsprechende quadratische Form positiv-definit ist, sind diese Invarianten alle positiv; denn in einem Cartesischen Koordinatensystem stellen sie sich direkt als die Quadratsummen der Komponenten dar. Die Quadratwurzel aus diesen Invarianten mag, wie im einfachsten Falle des Vektors, als der *Betrag* oder die Größe des Tensors 1., 2., 3., ... Stufe bezeichnet werden.

Wir treffen jetzt und für alle Zukunft die Verabredung: wenn in einem mit Indizes behafteten Formelglied, das die Komponenten eines Tensors bedeutet, ein Index doppelt, oben und unten vorkommt, so ist stets gemeint, daß über ihn summiert werden soll, ohne daß wir es für nötig finden, ausdrücklich ein Summenzeichen davor zu setzen.

Die Operationen der Addition, Multiplikation und Verjüngung setzen nur die affine Geometrie voraus; ihnen liegt kein »metrischer Fundamentaltensor« zugrunde. Dies ist allein für den Prozeß des Übergangs von kovarianten zu kontravarianten Komponenten und seine Umkehrung der Fall.

Die Eulerschen Kreiselgleichungen. Zur Einübung der Tensorrechnung wollen wir die Eulerschen Gleichungen der kräftefreien Bewegung eines starren Körpers um einen festen Punkt O herleiten. Wir schreiben die Grundgleichungen (27) kovariant:

$$\frac{dL_{ik}}{dt} = 0,$$

multiplizieren sie zur bequemeren Zusammenfassung mit den kontravarianten Komponenten w^{ik} eines beliebigen konstanten (von der Zeit unabhängigen) schiefsymmetrischen Tensors und verjüngen in bezug auf i und k. Ist H_{ik} gleich der über alle Massenpunkte zu erstreckenden Summe

$$\sum_m m u_i \xi_k$$

gesetzt, so ist

$$\tfrac{1}{2} L_{ik} w^{ik} = H_{ik} w^{ik} = H$$

eine Invariante, und unsere Gleichungen können wir in die Formel vereinigen:

$$\frac{dH}{dt} = 0. \tag{32}$$

Führen wir die Ausdrücke (29) für u_i ein und den Trägheitstensor T, so wird

(33) $$H_{ik} = v_{ir} T^r_k.$$

Bisher haben wir angenommen, daß ein im *Raume* festes Koordinatensystem benutzt wird. Die Trägheitskomponenten T ändern sich dann mit der Massenverteilung im Laufe der Zeit. Benutzen wir aber statt dessen jetzt ein im *Körper* festes Koordinatensystem und verstehen unter den bisherigen Zeichen die Komponenten der betreffenden Tensoren in bezug auf *dieses* Koordinatensystem, kennzeichnen hingegen die Komponenten derselben Tensoren in bezug auf das raumfeste Koordinatensystem durch Überstreichen, so bleibt wegen der Invarianz von H die Gleichung (32) bestehen. Die T_i^k sind nunmehr Konstante; dafür sind aber die w^{ik} mit der Zeit variabel. Unsere Gleichung ergibt

(34) $$\frac{dH_{ik}}{dt} \cdot w^{ik} + H_{ik} \cdot \frac{dw^{ik}}{dt} = 0.$$

Um $\frac{dw^{ik}}{dt}$ zu bestimmen, wählen wir zwei willkürliche im Körper feste Vektoren, deren kovariante Komponenten im körperfesten Koordinatensystem $= \xi_i$, bzw. η_i sind. Diese Größen sind also Konstante, ihre Komponenten $\bar{\xi}_i$, $\bar{\eta}_i$ im raumfesten Koordinatensystem aber Funktionen der Zeit. Es ist

$$w^{ik} \xi_i \eta_k = \bar{w}^{ik} \bar{\xi}_i \bar{\eta}_k,$$

und daraus durch Differentiation nach der Zeit:

(35) $$\frac{dw^{ik}}{dt} \cdot \xi_i \eta_k = \bar{w}^{ik} \left(\frac{d\bar{\xi}_i}{dt} \cdot \bar{\eta}_k + \bar{\xi}_i \cdot \frac{d\bar{\eta}_k}{dt} \right).$$

Nun ist nach Formel (29) z. B.

$$\frac{d\bar{\xi}_i}{dt} = \bar{v}_{ir} \bar{\xi}^r = \bar{v}_i^r \bar{\xi}_r.$$

Für die rechte Seite der Gleichung (35) bekommt man so

$$\bar{w}^{ik} (\bar{v}_i^r \bar{\xi}_r \bar{\eta}_k + \bar{v}_k^r \bar{\xi}_i \bar{\eta}_r),$$

und da hier eine Invariante steht, können wir die gestrichenen Komponenten wieder durch die ungestrichenen ersetzen:

$$\xi_i \eta_k \frac{dw^{ik}}{dt} = w^{ik} (\xi_r \eta_k v_i^r + \xi_i \eta_r v_k^r).$$

Dies gilt identisch in ξ und η; also, wenn H_{ik} beliebige Zahlen sind,

$$H_{ik} \frac{dw^{ik}}{dt} = w^{ik} (v_i^r H_{rk} + v_k^r H_{ir}).$$

Nehmen wir darin für die H_{ik} insbesondere die vorher so bezeichneten Größen, so ist damit das zweite Glied in (34) bestimmt, und unsere Gleichung lautet

$$\left\{ \frac{dH_{ik}}{dt} + (v_i^r H_{rk} + v_k^r H_{ir}) \right\} w^{ik} = 0$$

identisch in dem schiefsymmetrischen Tensor w^{ik}; daher

$$\frac{d(H_{ik}-H_{ki})}{dt}+\left\{\begin{matrix} v_i^r H_{rk}+v_k^r H_{ir} \\ -v_k^r H_{ri}-v_i^r H_{kr}\end{matrix}\right\}=0.$$

Man führe den Ausdruck (33) für H_{ik} ein; da wegen der Symmetrie von T_{ik} auch

$$v_k^r H_{ir} = v_k^r v_i^s T_{rs}$$

symmetrisch ist in i und k, zerstören sich die beiden hinteren Glieder der in der geschweiften Klammer stehenden Summe. Setzt man den symmetrischen Tensor

$$v_i^r v_{kr} = g_{rs} v_i^r v_k^s = (vv)_{ik},$$

so lauten unsere Gleichungen schließlich

$$\frac{d}{dt}(v_{ir}T_k^r - v_{kr}T_i^r) = (vv)_{ir}T_k^r - (vv)_{kr}T_i^r.$$

Es ist bekanntlich möglich, ein Cartesisches Koordinatensystem, bestehend aus den »Hauptträgheitsachsen«, einzuführen, so daß darin

$$g_{ik}=\left\{\begin{matrix}1\ (i=k)\\ 0\ (i\neq k)\end{matrix}\right. \quad \text{und} \quad T_{ik}=0 \quad (\text{für } i\neq k)$$

ist. Schreiben wir dann T_1 anstelle von T_1^1, analog für die übrigen Indizes, so gewinnen in diesem Koordinatensystem unsere Gleichungen die einfache Gestalt

$$(T_i+T_k)\frac{dv_{ik}}{dt}=(T_k-T_i)(vv)_{ik}.$$

Das sind die Differentialgleichungen für die Komponenten v_{ik} der unbekannten Winkelgeschwindigkeit — Gleichungen, die sich bekanntlich durch elliptische Funktionen von t lösen lassen. Die hier auftretenden Hauptträgheitsmomente T_i hängen mit den sich nach den üblichen Definitionen ergebenden T_i^* durch die Gleichungen zusammen

$$T_1^* = T_2 + T_3, \qquad T_2^* = T_3 + T_1, \qquad T_3^* = T_1 + T_2.$$

Die von uns gegebene Behandlung des Rotationsproblems läßt sich im Gegensatz zu der üblichen Wort für Wort von dem dreidimensionalen auf mehrdimensionale Räume übertragen. Das ist ja freilich in praxi völlig belanglos. Aber erst die Befreiung von der Beschränkung auf eine bestimmte Dimensionszahl, die Formulierung der Naturgesetze in solcher Gestalt, daß ihnen gegenüber die Dimensionszahl als etwas *Zufälliges* erscheint, bürgt uns dafür, daß ihre mathematische Durchdringung vollständig gelungen ist. —

Das Eindringen in den Tensorkalkül hat — abgesehen von der Angst vor Indizes, die überwunden werden muß — gewiß seine begrifflichen Schwierigkeiten. Formal ist aber die Rechenmethodik von der äußersten Einfachheit, viel einfacher z. B. als der Apparat der elementaren Vektorrechnung. Zwei Operationen: Multiplikation und Verjüngung: Nebeneinanderschreiben der Komponenten zweier Tensoren mit lauter ver-

schiedenen Indizes — Identifizierung zweier Indizes oben und unten, dann (stillschweigend) Summation nach ihm. Es ist vielfach versucht worden, in unserm Gebiet eine solche invariante, mit den Tensoren selbst und nicht mit ihren Komponenten arbeitende Bezeichnungsweise auszubilden, wie sie in der Vektorrechnung besteht. Was aber dort am Platze ist, erweist sich für den viel weiter gespannten Rahmen des Tensorkalküls als äußerst unzweckmäßig. Es werden eine solche Fülle von Namen, Bezeichnungen und ein solcher Apparat von Rechenregeln nötig (wenn man nicht doch immer wieder auf die Komponenten zurückgreifen will), daß damit ein Gewinn von sehr erheblichem negativem Betrag erreicht wird. Man muß gegen diese Orgien des Formalismus, mit dem man heute sogar die Techniker zu belästigen beginnt, nachdrücklich protestieren.

§ 7. Symmetrie-Eigenschaften der Tensoren.

Aus den Beispielen des vorigen Paragraphen geht mit aller Deutlichkeit hervor, daß die symmetrischen und die schiefsymmetrischen Tensoren 2. Stufe, wo sie in den Anwendungen auftreten, völlig verschiedene Größenarten darstellen. Der Charakter einer Größe ist demnach im allgemeinen noch nicht vollständig durch die Angabe beschrieben, sie sei ein Tensor so und sovielter Stufe, sondern es treten *Symmetrie-Merkmale* hinzu.

Eine Linearform mehrerer Variablenreihen heißt *symmetrisch*, wenn sie sich bei Vertauschung irgend zweier dieser Variablenreihen nicht ändert; *schiefsymmetrisch*, wenn sie durch diesen Prozeß stets in ihr Negatives umschlägt. Eine symmetrische Linearform ändert sich nicht, wenn man die Variablenreihen irgendwie untereinander permutiert; eine schiefsymmetrische ändert sich nicht, wenn man mit den Variablenreihen eine gerade Permutation vornimmt, sie nimmt das entgegengesetzte Vorzeichen an, wenn jene einer ungeraden Permutation unterworfen werden. Die Koeffizienten a_{ikl} einer symmetrischen Trilinearform (um die Anzahl 3 wiederum als Beispiel zu gebrauchen) genügen den Bedingungen

$$a_{ikl} = a_{kli} = a_{lik} = a_{kil} = a_{lki} = a_{ilk}\,,$$

von den Koeffizienten einer schiefsymmetrischen Trilinearform können nur die mit drei verschiedenen Indizes behafteten $\neq 0$ sein, und sie erfüllen die Gleichungen

$$a_{ikl} = a_{kli} = a_{lik} = -a_{kil} = -a_{lki} = -a_{ilk}\,.$$

Es kann also im Gebiet von n Variablen keine (nicht-verschwindenden) schiefsymmetrischen Formen von mehr als n Variablenreihen geben. Wie eine symmetrische Bilinearform vollständig ersetzt werden kann durch die quadratische Form, welche aus ihr durch Identifizierung der beiden Variablenreihen hervorgeht, so ist auch eine symmetrische Trilinearform eindeutig bestimmt durch die kubische Form einer einzigen Variablenreihe mit den Koeffizienten a_{ikl}, welche aus der Trilinearform durch den gleichen Prozeß entsteht. Nimmt man in einer schiefsymmetrischen Trilinearform

$$F = \sum_{ikl} a_{ikl} \xi^i \eta^k \zeta^l$$

die 3! Permutationen der Variablenreihen ξ, η, ζ vor, versieht die so entstehenden Formen jeweils mit dem positiven oder negativen Vorzeichen, je nachdem die Permutation gerade oder ungerade ist, so steht sechsmal die ursprüngliche Form da. Addiert man alles, so erhält man für diese die folgende Schreibweise:

$$F = \frac{1}{3!} \sum a_{ikl} \begin{vmatrix} \xi^i & \xi^k & \xi^l \\ \eta^i & \eta^k & \eta^l \\ \zeta^i & \zeta^k & \zeta^l \end{vmatrix} . \tag{36}$$

Die Eigenschaft einer Linearform, symmetrisch oder schiefsymmetrisch zu sein, wird nicht zerstört, wenn jede Variablenreihe der gleichen linearen Transformation unterworfen wird. Infolgedessen hat es einen Sinn, von *symmetrischen und schiefsymmetrischen kovarianten oder kontravarianten Tensoren* zu sprechen. Im Gebiete der gemischten Tensoren aber haben diese Ausdrücke keinen Sinn. Die symmetrischen Tensoren geben zu keinen weiteren Bemerkungen Anlaß; etwas ausführlicher müssen wir bei den schiefsymmetrischen kovarianten Tensoren verweilen, weil diese eine ganz besondere Bedeutung haben.

Durch die Komponenten ξ^i einer Verschiebung wird die Richtung einer Geraden samt Richtungssinn und Größe festgelegt. Sind ξ^i, η^i irgend zwei voneinander linear unabhängige Verschiebungen, so wird von ihnen, wenn man sie von einem beliebigen Punkt O aufträgt, eine Ebene aufgespannt. Die Größen

$$\xi^i \eta^k - \xi^k \eta^i = \xi^{ik}$$

bestimmen durch ihr Verhältnis in der gleichen Weise die »Stellung« dieser Ebene (eine »Flächenrichtung«), wie die ξ^i durch ihr Verhältnis die Richtung einer Geraden (eine »Linienrichtung«) bestimmen. Die ξ^{ik} sind dann und nur dann alle $= 0$, wenn die beiden Verschiebungen ξ^i, η^i linear abhängig sind und also keine zweidimensionale Mannigfaltigkeit aufspannen. Mit zwei linear unabhängigen Verschiebungen ξ und η ist in der aufgespannten Ebene ein Drehungssinn verknüpft: der Sinn derjenigen Drehung in der Ebene um O, welche die Richtung von ξ durch einen Winkel $< 180^\circ$ in die Richtung von η überführt; und außerdem eine bestimmte Maßzahl (Größe), nämlich der Flächeninhalt des von ξ und η aufgespannten Parallelogramms. Trägt man zwei Verschiebungen ξ, η von einem beliebigen Punkt O, zwei Verschiebungen ξ_*, η_* von einem beliebigen Punkt O_* ab, so sind diese dem einen und dem andern Paar zugehörigen Dinge: Ebenenstellung, Drehsinn und Größe dann und nur dann miteinander identisch, wenn die ξ^{ik} des einen und andern Paares miteinander übereinstimmen:

$$\xi^i \eta^k - \xi^k \eta^i = \xi^i_* \eta^k_* - \xi^k_* \eta^i_* .$$

Wie also die ξ^i die Richtung einer Geraden samt Richtungssinn und

Größe bestimmen, so die ξ^{ik} die Stellung einer Ebene samt Umlaufssinn und Größe; man sieht die volle Analogie.

Um ihr Ausdruck zu geben, könnte man das erste Gebilde ein *eindimensionales*, das zweite ein *zweidimensionales Raumelement* nennen. Wie das Quadrat der Größe eines eindimensionalen Raumelements durch die Invariante

$$\xi_i \xi^i = g_{ik} \xi^i \xi^k = Q(\xi)$$

gegeben wird, so das Quadrat der Größe des zweidimensionalen Raumelements nach den Formeln der analytischen Geometrie durch

$$\tfrac{1}{2} \xi^{ik} \xi_{ik};$$

man kann dafür auch schreiben

$$\begin{aligned} \xi_i \eta_k (\xi^i \eta^k - \xi^k \eta^i) &= (\xi_i \xi^i)(\eta^k \eta_k) - (\xi_i \eta^i)(\xi^k \eta_k) \\ &= Q(\xi) \cdot Q(\eta) - Q^2(\xi\eta). \end{aligned}$$

In dem gleichen Sinne sind die aus drei unabhängigen Verschiebungen ξ, η, ζ entspringenden Determinanten

$$\xi^{ikl} = \begin{vmatrix} \xi^i & \xi^k & \xi^l \\ \eta^i & \eta^k & \eta^l \\ \zeta^i & \zeta^k & \zeta^l \end{vmatrix}$$

die Komponenten eines *dreidimensionalen Raumelements*, dessen Größe durch die Quadratwurzel aus der Invariante

$$\tfrac{1}{3!} \xi^{ikl} \xi_{ikl}$$

gegeben ist. Im dreidimensionalen Raum ist diese Invariante

$$= \xi_{123} \xi^{123} = g_{1i} g_{2k} g_{3l} \xi^{ikl} \xi^{123},$$

und da $\xi^{ikl} = \pm \xi^{123}$ ist, je nachdem ikl eine gerade oder ungerade Vertauschung von 123 ist, so bekommt sie den Wert

$$g \cdot (\xi^{123})^2,$$

wo g die Determinante der Koeffizienten g_{ik} der metrischen Fundamentalform ist. Das Volumen des Parallelepipeds wird somit

$$= \sqrt{g} \cdot \text{abs.} \begin{vmatrix} \xi^1 & \xi^2 & \xi^3 \\ \eta^1 & \eta^2 & \eta^3 \\ \zeta^1 & \zeta^2 & \zeta^3 \end{vmatrix}.$$

Das befindet sich in Übereinstimmung mit elementaren Formeln der analytischen Geometrie. — In einem mehr als dreidimensionalen Raum können wir dann weiter zu vierdimensionalen Raumelementen übergehen, usf.

Wie nun ein kovarianter Tensor 1. Stufe jedem eindimensionalen Raumelement (jeder Verschiebung) in linearer, vom Koordinatensystem unabhängiger Weise eine Zahl zuordnet, so ein schiefsymmetrischer kovarianter Tensor 2. Stufe jedem zweidimensionalen Raumelement, ein schiefsymmetrischer kovarianter Tensor 3. Stufe jedem dreidimensionalen Raumelement usf.; das geht aus der Schreibweise (36) unmittelbar hervor. Aus diesem

Grunde halten wir uns für berechtigt, die kovarianten schiefsymmetrischen Tensoren schlechtweg als *lineare Tensoren* zu bezeichnen. Von Operationen im Gebiet der linearen Tensoren erwähnen wir die beiden folgenden:

$$a_i b_k - a_k b_i = c_{ik}. \tag{37}$$

$$a_i b_{kl} + a_k b_{li} + a_l b_{ik} = c_{ikl}; \tag{38}$$

die erste erzeugt aus zwei linearen Tensoren 1. Stufe einen solchen 2. Stufe, die zweite aus einem linearen Tensor 1. und einem 2. Stufe einen solchen 3. Stufe.

Zuweilen treten *kompliziertere Symmetrie-Bedingungen* auf als die bisher betrachteten. So spielen im Gebiet der Quadrilinearformen $F(\xi\,\eta\,\xi'\,\eta')$ diejenigen eine besondere Rolle, welche den Bedingungen genügen:

$$F(\eta\xi\xi'\eta') = F(\xi\eta\eta'\xi') = -F(\xi\eta\xi'\eta'); \tag{39$_1$}$$

$$F(\xi'\eta'\xi\eta) = F(\xi\eta\xi'\eta'); \tag{39$_2$}$$

$$F(\xi\eta\xi'\eta') + F(\xi\xi'\eta'\eta) + F(\xi\eta'\eta\xi') = 0. \tag{39$_3$}$$

Es zeigt sich nämlich, daß zu jeder quadratischen Form eines willkürlichen zweidimensionalen Raumelements

$$\xi^{ik} = \xi^i\eta^k - \xi^k\eta^i$$

eine und nur eine diesen Symmetriebedingungen genügende Quadrilinearform F gehört, aus der durch Identifizierung des zweiten Variablenpaares $\xi'\,\eta'$ mit dem ersten $\xi\,\eta$ jene quadratische Form entsteht. Kovariante Tensoren 4. Stufe mit den Symmetrie-Eigenschaften (39) hat man demnach zur Darstellung von Funktionen zu benutzen, die quadratisch von einem Flächenelement abhängen.

Die *allgemeinste Gestalt der Symmetriebedingung* für einen Tensor F der 5. Stufe — wir halten uns an ein bestimmtes Beispiel — dessen 1., 2. und 4. Variablenreihe kontragredient, dessen 3. und 5. kogredient zu transformieren ist, lautet so:

$$\sum_S e_S F_S = 0;$$

darin bedeutet S alle Permutationen der 5 Variablenreihen, bei denen die kontragredienten untereinander vertauscht werden und ebenso die kogredienten, F_S diejenige Form, die durch die Permutation S aus F entsteht, e_S ein System bestimmter Zahlen, die den Permutationen S zugeordnet sind. Die Summation erstreckt sich über alle Permutationen S. Der Symmetriecharakter einer bestimmten Art von Tensoren drückt sich in einer oder mehreren solchen Symmetriebedingungen aus.

§ 8. Tensoranalysis. Spannungen.

Größen, die den von Ort zu Ort wechselnden Zustand eines räumlich ausgebreiteten physikalischen Systems beschreiben, haben nicht einen Wert schlechthin, sondern nur »in jedem Punkte«; sie sind, mathematisch aus-

gedrückt, »Funktionen des Orts«. Je nachdem es sich um einen Skalar, Vektor oder Tensor handelt, sprechen wir von einem skalaren, Vektor- oder Tensor-*Feld*. Ein solches ist also gegeben, wenn jedem Punkte des Raumes oder eines bestimmten Raumgebietes ein Skalar, Vektor oder Tensor der betr. Art zugeordnet ist. Benutzen wir ein bestimmtes Koordinatensystem, so erscheinen dann der Wert der skalaren Größe, bzw. die Werte der Komponenten der vektoriellen oder tensoriellen Größe in diesem Koordinatensystem als Funktionen der Koordinaten eines in dem betreffenden Gebiete variablen Raumpunktes.

Die Tensoranalysis lehrt, wie durch Differentiation nach den Raumkoordinaten aus einem Tensorfeld ein neues in einer vom Koordinatensystem unabhängigen Weise hergeleitet werden kann. Sie ist wie die Tensoralgebra von äußerster Einfachheit: sie kennt nur eine Operation, die *Differentiation*.

Ist

$$\varphi = f(x_1 x_2 \cdots x_n) = f(x)$$

ein gegebenes Skalarfeld, so ist die einer infinitesimalen Verrückung des Argumentpunktes, bei welcher dessen Koordinaten x_i die Änderung dx_i erfahren, entsprechende Änderung von φ gegeben durch das totale Differential

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_2 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n .$$

Der Sinn dieser Formel ist der, daß, wenn Δx_i zunächst die Komponenten einer endlichen Verrückung sind und Δf die zugehörige Änderung von f, der Unterschied zwischen

$$\Delta f \text{ und } \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i} \Delta x_i$$

mit den Verrückungskomponenten nicht nur absolut zu o herabsinkt, sondern relativ zu der Größe der Verrückung, die etwa durch $|\Delta x_1| + |\Delta x_2| + \cdots + |\Delta x_n|$ gemessen werde. Wir ordnen diesem Differential die Linearform

$$\sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i} \xi^i$$

der Variablen ξ^i zu. Führen wir die ganze Konstruktion noch in einem andern, überstrichenen Koordinatensystem durch, so geht aus der Bedeutung des Differentials hervor, daß die erste Linearform in die zweite übergeht, wenn die ξ^i der zu den Grundvektoren kontragredienten Transformation unterworfen werden. Es sind daher

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}, \quad \frac{\partial f}{\partial x_2}, \quad \cdots, \quad \frac{\partial f}{\partial x_n}$$

die kovarianten Komponenten eines Vektors, der aus dem Skalarfeld φ in einer vom Koordinatensystem unabhängigen Weise entspringt. In der

gewöhnlichen Vektorrechnung tritt er als *Gradient* auf und wird durch das Symbol grad φ bezeichnet.

Diese Operation läßt sich sofort von einem skalaren auf ein beliebiges Tensorfeld übertragen. Seien z. B. $f_{ik}^{h}(x)$ die in bezug auf i, k kovarianten, in bezug auf h kontravarianten Komponenten eines Tensorfeldes 3. Stufe; dann ist

$$f_{ik}^{h}\xi_{h}\eta^{i}\zeta^{k}$$

eine Invariante, wenn wir unter den ξ_h die Komponenten eines willkürlichen, aber konstanten, d. h. vom Orte unabhängigen kovarianten Vektors verstehen, unter η^i, ζ^i die Komponenten je eines ebensolchen kontravarianten Vektors. Die einer infinitesimalen Verrückung mit den Komponenten dx_i entsprechende Änderung dieser Invariante ist gegeben durch

$$\frac{\partial f_{ik}^{h}}{\partial x_l}\xi_h\eta^i\zeta^k dx_l,$$

und folglich sind

$$f_{ikl}^{h} = \frac{\partial f_{ik}^{h}}{\partial x_l}$$

die Komponenten eines Tensorfeldes 4. Stufe, das in einer vom Koordinatensystem unabhängigen Weise aus dem gegebenen entspringt. *Das ist der Prozeß der Differentiation*; durch ihn wird, wie man sieht, die Stufenzahl des Tensors um 1 erhöht. Es ist noch zu bemerken: wegen der Unabhängigkeit des metrischen Fundamentaltensors vom Ort erhält man z. B. die in bezug auf den Index k kontravarianten Komponenten des eben gebildeten Tensors, indem man unter dem Differentiationszeichen den Index k nach oben schafft: $\frac{\partial f_{i}^{hk}}{\partial x_l}$; die Verwandlung von kovariant in kontravariant und die Differentiation sind vertauschbar. Die Differentiation kann rein formal so ausgeführt werden, als ob der betr. Tensor mit einem Vektor multipliziert würde, dessen kovariante Komponenten

$$\frac{\partial}{\partial x_1}, \quad \frac{\partial}{\partial x_2}, \quad \ldots, \quad \frac{\partial}{\partial x_n} \tag{40}$$

sind; dabei wird der Differentialquotient $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ als symbolisches Produkt von f mit $\frac{\partial}{\partial x_i}$ behandelt. Den symbolischen Vektor (40) findet man in der Literatur öfter mit dem geheimnisvollen Namen »Nabla-Vektor« belegt.

Beispiele. Aus dem Vektor mit den kovarianten Komponenten u_i entspringt der Tensor 2. Stufe $\frac{\partial u_i}{\partial x_k} = u_{ik}$. Daraus bilden wir insbesondere

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_k} - \frac{\partial u_k}{\partial x_i}. \tag{41}$$

Diese Größen sind die kovarianten Komponenten eines linearen Tensors 2. Stufe; in der gewöhnlichen Vektorrechnung tritt er (mit entgegengesetztem Vorzeichen) als *Rotation* (rot oder curl) auf. Hingegen sind die Größen

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k}+\frac{\partial u_k}{\partial x_i}\right)$$

die kovarianten Komponenten eines symmetrischen Tensors 2. Stufe. Bedeutet der Vektor u die Geschwindigkeit kontinuierlich ausgebreiteter, sich bewegender Materie als Funktion des Orts, so gibt das Verschwinden dieses Tensors an einer Stelle kund, daß die unmittelbare Umgebung der Stelle sich wie ein starrer Körper bewegt; er verdient daher, als »*Verzerrungs-Tensor*« bezeichnet zu werden. Endlich aber entsteht aus u_k^i durch Verjüngung der Skalar

$$\frac{\partial u^i}{\partial x_i},$$

in der Vektorrechnung als *Divergenz* (div) bekannt.

Aus einem Tensor 2. Stufe mit den gemischten Komponenten S_i^k entspringt durch Differentiation und Verjüngung der Vektor

$$\frac{\partial S_i^k}{\partial x_k}.$$

Sind v_{ik} die Komponenten eines linearen Tensorfeldes 2. Stufe, so entsteht entsprechend der Formel (38), in der wir b durch v und a durch den symbolischen Vektor »Differentiation« ersetzen, aus ihm der lineare Tensor 3. Stufe mit den Komponenten

$$\frac{\partial v_{kl}}{\partial x_i}+\frac{\partial v_{li}}{\partial x_k}+\frac{\partial v_{ik}}{\partial x_l}. \tag{42}$$

Der Tensor (41), rot, verschwindet, wenn u_i Gradient eines Skalarfeldes ist; der Tensor (42) verschwindet, wenn v_{ik} die rot eines Vektors u_i ist.

Spannungen. Ein wichtiges Beispiel für ein Tensorfeld bilden die Spannungen in einem elastischen Körper; von diesem Beispiel her haben die Tensoren ihren Namen erhalten. In einem elastischen Körper, an dessen Oberfläche Zug- oder Druckkräfte angreifen, auf dessen Inneres außerdem irgendwelche an den einzelnen Teilen der Materie angreifende »Volumkräfte« (z. B. die Schwerkraft) wirken, stellt sich ein Gleichgewichtszustand her, in dem die durch die Verzerrung beanspruchten Kohäsionskräfte der Materie jenen eingeprägten Kräften das Gleichgewicht halten. Schneiden wir ein beliebiges Stück J der Materie in Gedanken aus dem Körper heraus, lassen es erstarren und entfernen die übrige Materie, so werden die eingeprägten Volumkräfte für sich an diesem Stück der Materie sich nicht das Gleichgewicht halten; sie sind aber ins Gleichgewicht gesetzt durch die auf die Oberfläche Ω des Stückes J wirkenden Druckkräfte, die von dem weggeschnittenen Teil der Materie auf J ausgeübt werden. In der Tat haben wir uns, wenn wir auf die

atomistische Feinstruktur der Materie nicht eingehen, vorzustellen, daß die Kohäsionskräfte nur in der unmittelbaren Berührung wirksam sind, so daß also die Einwirkung des weggeschnittenen Materieteils auf J durch solche oberflächlichen Druckkräfte muß ersetzt werden können; und zwar darf, wenn $\mathfrak{S}\,do$ die auf ein Oberflächenelement do wirkende Druckkraft ist, $\mathfrak{S}$ also den Druck pro Flächeneinheit bedeutet, $\mathfrak{S}$ nur abhängen von der Stelle, an der sich das Flächenelement do befindet und von der ins Innere von J gerichteten Normalen n dieses Flächenelements (welche die »Stellung« von do charakterisiert). Für $\mathfrak{S}$ schreiben wir, um die letztere Abhängigkeit auszudrücken, $\mathfrak{S}_n$. Bedeutet $-n$ die der Normale n entgegengesetzte Normalenrichtung, so folgt aus dem Gleichgewicht für eine kleine, unendlich dünne Scheibe, daß

$$\mathfrak{S}_{-n} = -\mathfrak{S}_n \tag{43}$$

sein muß.

Wir benutzen Cartesische Koordinaten x_1, x_2, x_3. Die Druckkräfte pro Flächeneinheit an einer Stelle, welche gegen ein Flächenelement daselbst wirken, dessen innere Normale in die Richtung der positiven x_1, bzw. x_2, bzw. x_3-Achse fällt, mögen mit $\mathfrak{S}_1, \mathfrak{S}_2, \mathfrak{S}_3$ bezeichnet werden. Wir wählen irgend drei positive Zahlen a_1, a_2, a_3 und eine positive Zahl ε, die gegen 0 konvergieren soll (während die a_i festbleiben). Wir tragen vom betrachteten Punkt O aus in Richtung der positiven Koordinatenachsen die Strecken

$$OP_1 = \varepsilon a_1, \quad OP_2 = \varepsilon a_2, \quad OP_3 = \varepsilon a_3$$

ab und betrachten das infinitesimale Tetraeder $OP_1P_2P_3$ mit den »Wänden« OP_2P_3, OP_3P_1, OP_1P_2 und dem »Dach« $P_1P_2P_3$. Ist f der Flächeninhalt des Daches und $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ die Richtungskosinusse seiner inneren Normalen n, so sind die Flächeninhalte der Wände

$$-f\cdot\alpha_1 \; (= \tfrac{1}{2}\varepsilon^2 a_2 a_3), \quad -f\cdot\alpha_2, \quad -f\cdot\alpha_3.$$

Der Druck auf die Wände und das Dach beträgt also insgesamt bei unendlich kleinem ε:

$$f\{\mathfrak{S}_n - (\alpha_1\mathfrak{S}_1 + \alpha_2\mathfrak{S}_2 + \alpha_3\mathfrak{S}_3)\}.$$

f ist von der Größenordnung ε^2; die auf das Tetraedervolumen wirkende Volumkraft ist aber nur von der Größenordnung ε^3. Daher muß zufolge der Gleichgewichtsbedingung

$$\mathfrak{S}_n = \alpha_1\mathfrak{S}_1 + \alpha_2\mathfrak{S}_2 + \alpha_3\mathfrak{S}_3$$

sein. Mit Hilfe von (43) überträgt sich diese Formel unmittelbar auf den Fall, daß das Tetraeder in einem der übrigen 7 Oktanten gelegen ist. Nennen wir die Komponenten von $\mathfrak{S}_i$ in bezug auf die Koordinatenachsen S_{i1}, S_{i2}, S_{i3} und sind ξ^i, η^i die Komponenten zweier beliebiger Verschiebungen von der Länge 1, so ist

$$\sum_{ik} S_{ik}\xi^i\eta^k \tag{44}$$

die in die Richtung von η fallende Komponente derjenigen Druckkraft, die gegen ein Flächenelement mit der inneren Normale ξ stattfindet. Die Bilinearform (44) hat also eine vom Koordinatensystem unabhängige Bedeutung, und S_{ik} sind die Komponenten eines Tensorfeldes »Spannung«. Wir operieren hier auch weiter mit rechtwinkligen Koordinatensystemen, so daß wir zwischen kovariant und kontravariant nicht zu unterscheiden brauchen.

Wir bilden den Vektor $\mathfrak{S}'_i$ mit den Komponenten S_{1i}, S_{2i}, S_{3i}. Die in die Richtung der inneren Normale n eines Flächenelements fallende Komponente von $\mathfrak{S}'_1$ ist dann gleich der x_1-Komponente von $\mathfrak{S}_n$. Die x_1-Komponente der Gesamt-Druckkraft, die auf der Oberfläche Ω des herausgeschnittenen Materiestücks J liegt, ist daher gleich dem Oberflächenintegral der normalen Komponente von $\mathfrak{S}'_1$, und das ist nach dem Gaußschen Satz gleich dem Volumintegral

$$-\int_J \operatorname{div} \mathfrak{S}'_1 \cdot dV;$$

das gleiche gilt für die x_2- und x_3-Komponente. Wir haben also den Vektor $\mathfrak{p}$ mit den Komponenten

$$p_i = -\sum_k \frac{\partial S^k{}_i}{\partial x_k}$$

zu bilden (das ist, wie wir wissen, ein invariantes Bildungsgesetz); einer Volumkraft von der Richtung und Stärke $\mathfrak{p}$ pro Volumeinheit sind die Druckkräfte $\mathfrak{S}$ in dem Sinne äquivalent, daß für jedes herausgegriffene Stück Materie J

$$\int_\Omega \mathfrak{S}_n do = \int_J \mathfrak{p} dV \tag{45}$$

ist. Ist $\mathfrak{k}$ die eingeprägte Kraft pro Volumeinheit, so lautet die erste Gleichgewichtsbedingung für das erstarrt gedachte Materiestück

$$\int_J (\mathfrak{p} + \mathfrak{k}) dV = 0,$$

und da dies für jeden Teil J zutreffen muß:

$$\mathfrak{p} + \mathfrak{k} = 0. \tag{46}$$

Wählen wir einen beliebigen Anfangspunkt O und bedeutet $\mathfrak{r}$ den Radiusvektor $\overrightarrow{OP}$ nach dem Argumentpunkt P, die eckige Klammer das »vektorielle« Produkt, so lautet die zweite Gleichgewichtsbedingung, die Momentengleichung:

$$\int_\Omega [\mathfrak{r}, \mathfrak{S}_n]\, do + \int_J [\mathfrak{r}, \mathfrak{k}]\, dV = 0,$$

und da allgemein (46) gilt, muß also außer (45) auch noch

$$\int_\Omega [\mathfrak{r}, \mathfrak{S}_n]\, do = \int_J [\mathfrak{r}, \mathfrak{p}]\, dV$$

sein. Die x_1-Komponente von $[\mathfrak{r}, \mathfrak{S}_n]$ ist gleich der in der Richtung n genommenen Komponente von $x_2\mathfrak{S}'_3 - x_3\mathfrak{S}'_2$; daher ist nach dem Gaußschen Satz die x_1-Komponente der linken Seite

$$= -\int_{\mathfrak{J}} \operatorname{div}(x_2\mathfrak{S}'_3 - x_3\mathfrak{S}'_2)\,dV,$$

und es kommt die Gleichung

$$\operatorname{div}(x_2\mathfrak{S}'_3 - x_3\mathfrak{S}'_2) = -(x_2 p_3 - x_3 p_2).$$

Die linke Seite ist aber

$$= (x_2 \operatorname{div}\mathfrak{S}'_3 - x_3 \operatorname{div}\mathfrak{S}'_2) + (\mathfrak{S}'_3\cdot\operatorname{grad} x_2 - \mathfrak{S}'_2\cdot\operatorname{grad} x_3)$$
$$= -(x_2 p_3 - x_3 p_2) + (S_{23} - S_{32}).$$

Demnach ergibt diese Gleichgewichtsbedingung, wenn wir außer der x_1- noch die x_2- und x_3-Komponente bilden:

$$S_{23} = S_{32}, \quad S_{31} = S_{13}, \quad S_{12} = S_{21},$$

d. h. die Symmetrie des *Spannungstensors* S. Für eine beliebige Verschiebung mit den Komponenten ξ^i ist

$$\frac{\sum S_{ik}\xi^i\xi^k}{\sum g_{ik}\xi^i\xi^k}$$

die in die Richtung von ξ fallende Komponente der Druckkraft pro Flächeneinheit, welche gegen ein senkrecht zu dieser Richtung gestelltes Flächenelement wirkt. (Hier darf nun wieder ein beliebiges affines Koordinatensystem benutzt werden.) *Die Spannungen sind einer Volumkraft vollständig äquivalent, deren Dichte p sich nach den invarianten Formeln*

$$-p_i = \frac{\partial S_i^k}{\partial x_k} \tag{47}$$

berechnet. — Im Falle eines allseitig gleichen Drucks p ist

$$S_i^k = p\cdot\delta_i^k, \quad p_i = -\frac{\partial p}{\partial x_i}.$$

Durch das Vorige hat nur der Begriff der Spannung seine exakte Formulierung und mathematische Darstellung gefunden. Zur Aufstellung der Grundgesetze der Elastizitätstheorie ist es weiterhin erforderlich, die Abhängigkeit der Spannung von der durch die eingeprägten Kräfte bewirkten Verzerrung der Materie zu ermitteln. Wir haben keinen Anlaß, hier darauf näher einzugehen.

§ 9. Das stationäre elektromagnetische Feld.

Wo bisher von mechanischen oder physikalischen Dingen die Rede war, geschah es zunächst zu dem Zweck, zu zeigen, worin sich deren räumliche Natur kundgibt: nämlich darin, daß sich ihre Gesetze als invariante Tensorrelationen ausdrücken. Wir hatten dadurch aber zugleich Gelegenheit, die Bedeutung der Tensorrechnung an konkreten Beispielen

klar zu machen und spätere Auseinandersetzungen vorzubereiten, die sich gründlicher mit physikalischen Theorien — um ihrer selbst willen und wegen ihrer Bedeutung für das Zeitproblem — befassen werden. In dieser Hinsicht wird nun namentlich die *Theorie des elektromagnetischen Feldes*, das vollkommenste Stück Physik, das wir heute kennen, von größter Wichtigkeit werden. Hier betrachten wir sie nur insofern, als die Zeit noch nicht in Frage kommt, d. h. wir beschränken uns auf zeitlich unveränderliche stationäre Verhältnisse.

Das *Coulombsche Gesetz* der Elektrostatik läßt sich folgendermaßen aussprechen: Sind im Raum irgendwelche Ladungen mit der Dichte ϱ verteilt, so üben sie auf eine Punktladung e die Kraft

$$\mathfrak{K} = e \cdot \mathfrak{E} \tag{48}$$

aus, worin

$$\mathfrak{E} = -\int \frac{\varrho \cdot \mathfrak{r}}{4\pi r^3} dV. \tag{49}$$

Hier bedeutet $\mathfrak{r}$ den Vektor $\overrightarrow{OP}$, der vom »Aufpunkt« O, in welchem $\mathfrak{E}$ bestimmt werden soll, zum Argument- oder »Quell«-Punkt P führt, nach dem integriert wird; r seine Länge; dV das Volumelement. Die Kraft setzt sich also aus zwei Faktoren zusammen, der Ladung e des kleinen Probekörpers, die nur von dessen Zustand abhängt, und der »Feldstärke« $\mathfrak{E}$, welche im Gegenteil allein durch die gegebene Ladungsverteilung im Raum bestimmt ist. Wir machen uns die Vorstellung, daß auch dann, wenn wir an keinem Probekörper die Kraft $\mathfrak{K}$ beobachten, durch die im Raume verteilten Ladungen ein »elektrisches Feld« hervorgerufen wird, das durch den Vektor $\mathfrak{E}$ beschrieben ist; an einer hereingebrachten Punktladung e gibt es sich durch die Kraft (48) kund. $\mathfrak{E}$ können wir aus einem Potential*) — φ ableiten nach der Formel

$$\mathfrak{E} = \operatorname{grad} \varphi, \qquad -4\pi\varphi = \int \frac{\varrho}{r} dV. \tag{50}$$

Daraus folgt, 1) daß $\mathfrak{E}$ wirbelfrei ist, und 2) daß der Fluß von $\mathfrak{E}$ durch irgend eine geschlossene Oberfläche gleich den von dieser Oberfläche umschlossenen Ladungen ist, oder daß die Elektrizität Quelle des elektrischen Feldes ist; in Formeln

$$\operatorname{rot} \mathfrak{E} = 0, \qquad \operatorname{div} \mathfrak{E} = \varrho. \tag{51}$$

Aus diesen einfachen Differentialgesetzen geht rückwärts wieder das Coulombsche Gesetz hervor unter Hinzunahme der Bedingung, daß das Feld $\mathfrak{E}$ im Unendlichen verschwindet. Machen wir nämlich zufolge der ersten dieser Gleichungen (51) den Ansatz $\mathfrak{E} = \operatorname{grad} \varphi$, so ergibt sich aus der zweiten zur Bestimmung von φ die Poissonsche Gleichung $\Delta\varphi = \varrho$, deren Lösung durch (50) geliefert wird.

---

*) Um späterer Zwecke willen (§ 26) muß ich hier die übliche Bezeichnung φ des Potentials in — φ abändern.

Das Coulombsche Gesetz ist ein *Fernwirkungsgesetz*: in ihm erscheint die Feldstärke an einer Stelle abhängig von den Ladungen an allen andern Stellen, den nächsten und fernsten, im Raum. Im Gegensatz dazu drücken die viel einfacheren Formeln (51) *Nahewirkungsgesetze* aus: da zur Bestimmung des Differentialquotienten einer Funktion an einer Stelle die Kenntnis ihres Wertverlaufs in einer beliebig kleinen Umgebung dieser Stelle genügt, sind durch (51) die Werte von ϱ und $\mathfrak{E}$ an einer Stelle und deren unmittelbarer Umgebung miteinander in Zusammenhang gebracht. Diese Nahewirkungsgesetze fassen wir als den wahren Ausdruck des in der Natur bestehenden Wirkungszusammenhanges auf, (49) aber nur als eine daraus sich ergebende mathematische Konsequenz; auf Grund der Gesetze (51), die eine so einfache anschauliche Bedeutung haben, glauben wir zu *verstehen*, woher das Coulombsche Gesetz kommt. Gewiß folgen wir hier vor allem einem erkenntnistheoretischen Zwang; schon Leibniz hat die Forderung der Kontinuität, der Nahewirkung als ein allgemeines Prinzip formuliert und sich aus diesem Grunde mit dem Newtonschen Fernwirkungsgesetz der Gravitation, das ja dem Coulombschen völlig entspricht, nicht befreunden können. Daneben kommt aber die mathematische Durchsichtigkeit und der einfache anschauliche Sinn der Gesetze (51) in Betracht; immer wieder machen wir in der Physik die Erfahrung, daß, wenn wir erst einmal dazu gelangt sind, die Gesetzmäßigkeit eines bestimmten Erscheinungsgebietes völlig zu durchdringen, sie sich in Formeln von vollendeter mathematischer Harmonie ausspricht. Schließlich legt, was das Physikalische betrifft, die Maxwellsche Theorie in ihrer Weiterentwicklung beständig Zeugnis davon ab, von wie ungeheurer Fruchtbarkeit der Schritt von der alten Fernwirkungsvorstellung zu der modernen der Nahewirkung war.

Das Feld übt auf die Ladungen, welche es erzeugen, eine Kraft aus, deren Dichte pro Volumeinheit durch die Formel

$$\mathfrak{p} = \varrho \mathfrak{E} \tag{52}$$

gegeben ist: so werden wir die Gleichung (48) in strenger Weise zu deuten haben. Bringen wir einen geladenen Probekörper in das Feld hinein, so gehört auch seine Ladung mit zu den felderzeugenden Ladungen, und die Formel (48) wird nur dann zur richtigen Bestimmung des vor dem Hineinbringen des Probekörpers herrschenden Feldes $\mathfrak{E}$ dienen können, wenn die Probeladung e so schwach ist, daß sie das Feld nur unmerklich verändert. Es ist das eine Schwierigkeit, die sich durch die ganze experimentelle Physik hindurchzieht: daß wir durch das Hereinbringen des Meßinstruments die ursprünglichen Verhältnisse, welche gemessen werden sollen, stören; daher stammen zum guten Teil die Fehlerquellen, auf deren Elimination der Experimentator so viel Scharfsinn verwenden muß.

Das Grundgesetz der Mechanik: *Masse* $\times$ *Beschleunigung* = *Kraft* lehrt, was für eine Bewegung der Massen unter dem Einfluß gegebener

Kräfte (bei gegebenen Anfangsgeschwindigkeiten) eintritt. Was aber *Kraft* ist, lehrt die Mechanik nicht; das erfahren wir in der Physik. *Das Grundgesetz der Mechanik ist ein offenes Schema, das einen konkreten Inhalt erst gewinnt, wenn der in ihm auftretende Kraftbegriff durch die Physik ausgefüllt wird.* Die unglücklichen Versuche, die Mechanik als eine abgeschlossene Disziplin für sich zu entwickeln, haben sich daher auch niemals anders zu helfen gewußt als dadurch, daß sie das Grundgesetz zu einer Worterklärung machten: Kraft *bedeutet* Masse × Beschleunigung. Hier in der Elektrostatik erkennen wir aber für ein besonderes physikalisches Erscheinungsgebiet, was Kraft ist und wie sie sich gesetzmäßig durch (52) aus den *Zustandsgrößen* Ladung und Feld bestimmt. Sehen wir die Ladungen als gegeben an, so liefern die Feldgleichungen (51) den Zusammenhang, durch welchen die Ladungen das von ihnen erzeugte Feld determinieren. Was aber die Ladungen betrifft, so weiß man, daß sie an die Materie gebunden sind. Die moderne Elektronentheorie zeigte, daß das in einem ganz strengen Sinne verstanden werden kann: die Materie besteht aus Elementarquanten, den Elektronen, die eine völlig bestimmte unveränderliche Masse und dazu eine völlig bestimmte unveränderliche Ladung besitzen. Wo immer wir das Auftreten neuer Ladungen beobachten, beruht dies lediglich darauf, daß positive und negative Elementarladungen, die vorher so nahe beieinander waren, daß sie sich in ihrer Fernwirkung vollständig kompensierten, auseinandertreten; es »entsteht« daher bei solchen Prozessen auch immer gleichviel positive und negative Elektrizität. Damit schließen sich die Gesetze zu einem Zykel: die Verteilung der mit ein für allemal festen Ladungen versehenen Elementarquanten der Materie und (wie man bei nicht-stationären Verhältnissen hinzufügen muß) ihre Geschwindigkeiten bestimmen das Feld; das Feld übt auf die geladene Materie eine durch (52) gegebene ponderomotorische Kraft aus; die Kraft bestimmt nach dem Fundamentalgesetz der Mechanik die Beschleunigung und damit die Verteilung und Geschwindigkeit der Materie im nächsten Moment. *Erst dieser ganze theoretische Zusammenhang ist einer experimentellen Nachprüfung fähig* — wenn wir annehmen, daß die Bewegung der Materie das ist, was wir direkt beobachten können (was übrigens auch nur bedingt zugegeben werden kann); nicht aber ein einzelnes, aus diesem theoretischen Gefüge herausgerissenes Gesetz! Der Zusammenhang zwischen der unmittelbaren Erfahrung und dem, was die Vernunft begrifflich als das hinter ihr steckende Objektive in einer Theorie zu erfassen sucht, ist nicht so einfach, daß jede einzelne Aussage der Theorie für sich einen unmittelbar in der Anschauung zu verifizierenden Sinn besäße. Wir werden im folgenden immer deutlicher sehen, daß Geometrie, Mechanik und Physik in dieser Weise eine unlösbare theoretische Einheit bilden, etwas, das man immer *als Ganzes* vor Augen haben muß, wenn man danach fragt, ob jene Wissenschaften die in allem subjektiven Bewußtseins-Erleben sich bekundende, dem Bewußtsein transzendente Wirklichkeit vernünftig deuten:

die Wahrheit bildet ein *System*. — Im übrigen ist das hier in seinen ersten Zügen geschilderte physikalische Weltbild charakterisiert durch den Dualismus von *Materie* und *Feld*, die sich in gegenseitiger Wechselwirkung befinden; erst durch die Relativitätstheorie ist dieser Dualismus, und zwar zugunsten einer reinen Feldphysik, überwunden worden (vgl. § 25).

Die ponderomotorische Kraft im elektrischen Feld ist schon von Faraday auf *Spannungen* zurückgeführt worden. Benutzen wir ein rechtwinkliges Koordinatensystem x_1, x_2, x_3, in welchem E_1, E_2, E_3 die Komponenten der elektrischen Feldstärke sind, so ist die x_i-Komponente der Kraftdichte

$$p_i = \varrho E_i = E_i\left(\frac{\partial E_1}{\partial x_1} + \frac{\partial E_2}{\partial x_2} + \frac{\partial E_3}{\partial x_3}\right).$$

Durch eine einfache, die Wirbellosigkeit von $\mathfrak{E}$ berücksichtigende Umrechnung findet man daraus, daß die Komponenten p_i der Kraftdichte sich nach den Formeln (47) aus einem Spannungstensor ableiten, dessen Komponenten S_{ik} in dem folgenden quadratischen Schema zusammengestellt sind:

$$(53)\qquad \begin{vmatrix} \frac{1}{2}(E_2^2 + E_3^2 - E_1^2), & -E_1 E_2, & -E_1 E_3 \\ -E_2 E_1, & \frac{1}{2}(E_3^2 + E_1^2 - E_2^2), & -E_2 E_3 \\ -E_3 E_1, & -E_3 E_2, & \frac{1}{2}(E_1^2 + E_2^2 - E_3^2) \end{vmatrix}.$$

Wir sehen, daß die Symmetriebedingung $S_{ki} = S_{ik}$ erfüllt ist. Vor allem ist aber von Wichtigkeit, daß die Komponenten des Spannungstensors an einer Stelle nur von der elektrischen Feldstärke *an dieser Stelle* abhängen. (Sie hängen zudem nur von dem *Feld*, nicht auch von der *Ladung* ab.) Immer wenn eine Kraft p sich nach (47) auf Spannungen S, die einen symmetrischen Tensor 2. Stufe bilden, zurückführen läßt, welcher nur von den Werten der den physikalischen Zustand beschreibenden Zustandsgrößen an der betreffenden Stelle abhängt, werden wir diese Spannungen als das Primäre, die Kraftwirkungen als ihre Folge zu betrachten haben. Mathematisch erhellt die Berechtigung dieser Auffassungsweise daraus, daß die Kraft p sich aus der Spannung durch Differentiation ergibt; die Spannungen liegen also gegenüber den Kräften sozusagen um eine Differentiationsstufe weiter zurück und hängen trotzdem nicht, wie es für ein beliebiges Integral der Fall wäre, von dem ganzen Verlauf der Zustandsgrößen, sondern nur von ihrem Wert an der betr. Stelle ab. Daraus, daß sich die elektrostatischen Kräfte, welche geladene Körper aufeinander ausüben, auf einen symmetrischen Spannungstensor zurückführen lassen, folgt noch, daß die resultierende Gesamtkraft wie auch das resultierende Drehmoment verschwindet (weil das über den ganzen Raum erstreckte Integral einer Divergenz stets 0 ist); das besagt, daß sich ein abgeschlossenes System geladener Massen, das anfangs ruht, nicht aus sich selbst als Ganzes in translatorische oder rotatorische Bewegung versetzen kann.

Der Tensor (53) ist natürlich unabhängig von der Wahl des Koordinatensystems. Führen wir das Quadrat des Betrages der Feldstärke ein

$$|E|^2 = E_i E^i,$$

so ist in der Tat

$$S_{ik} = \tfrac{1}{2} g_{ik} \,|\, E \,|^2 - E_i E_k:$$

das sind die kovarianten Spannungskomponenten nicht nur in einem Cartesischen, sondern in einem beliebigen affinen Koordinatensystem, wenn die E_i die kovarianten Komponenten der Feldstärke sind. Die anschauliche Bedeutung der Spannungen ist überaus einfach. Benutzen wir an einer Stelle rechtwinklige Koordinaten, deren x_1-Achse in die Richtung von $\mathfrak{E}$ weist:

$$E_1 = |\, E \,|, \qquad E_2 = 0, \qquad E_3 = 0,$$

so finden wir: sie bestehen aus einem Zug von der Stärke $\frac{1}{2} |\, E \,|^2$ in Richtung der Kraftlinien und einem Druck von der gleichen Stärke senkrecht zu ihnen.

Die elektrostatischen Grundgesetze können wir in invarianter Tensorgestalt jetzt so zusammenfassen:

$$(54) \quad \begin{cases} \text{(I)} & \dfrac{\partial E_i}{\partial x_k} - \dfrac{\partial E_k}{\partial x_i} = 0, \quad \textit{bzw.} \quad E_i = \dfrac{\partial \varphi}{\partial x_i}; \\ \text{(II)} & \dfrac{\partial E^i}{\partial x_i} = \varrho; \\ \text{(III)} & S_{ik} = \tfrac{1}{2} g_{ik} \,|\, E \,|^2 - E_i E_k. \end{cases}$$

Einem System einzelner Punktladungen $e_1, e_2, e_3, \ldots$ kommt die potentielle Energie

$$U = \frac{1}{8\pi} \sum_{i \neq k} \frac{e_i e_k}{r_{ik}}$$

zu; r_{ik} bedeutet die Entfernung der beiden Ladungen e_i und e_k. Dies besagt, daß die virtuelle Arbeit, welche die an den einzelnen Punkten angreifenden (von den Ladungen der übrigen Punkte herrührenden) Kräfte bei einer infinitesimalen Verrückung der Punkte leisten, ein totales Differential, nämlich $= \delta U$ ist. Für kontinuierlich verteilte Ladungen geht diese Formel über in:

$$U = \iint \frac{\varrho(P)\varrho(P')}{8\pi r_{PP'}} \, dV \, dV';$$

beide Volumintegrationen nach P und P' erstrecken sich über den ganzen Raum, $r_{PP'}$ ist die Entfernung dieser beiden Punkte. Unter Benutzung des Potentials φ können wir dafür schreiben

$$U = -\tfrac{1}{2} \int \varrho \varphi \, dV.$$

Der Integrand ist $\varphi \cdot \operatorname{div} \mathfrak{E}$. Zufolge der Gleichung

$$\operatorname{div}(\varphi \mathfrak{E}) = \varphi \cdot \operatorname{div} \mathfrak{E} + \mathfrak{E} \cdot \operatorname{grad} \varphi$$

und des Gaußschen Satzes, nach dem das über den gesamten Raum erstreckte Integral von $\operatorname{div}(\varphi \mathfrak{E})$ gleich 0 wird, ist

$$-\int \varrho \varphi \, dV = \int (\mathfrak{E} \cdot \operatorname{grad} \varphi) \, dV = \int |\, E \,|^2 \, dV;$$

$$(55) \qquad U = \int \tfrac{1}{2} |\, E \,|^2 \, dV.$$

Diese Darstellung der Energie setzt unmittelbar in Evidenz, daß die Energie einen positiven Betrag besitzt. Führen wir die Kräfte auf Spannungen zurück, so müssen wir uns vorstellen, daß diese Spannungen (wie die Spannungen des elastischen Körpers) überall mit positiver potentieller Spannungsenergie verbunden sind; der Sitz der Energie wird also im Felde zu suchen sein. Darüber gibt die Formel (55) völlig befriedigende Rechenschaft; sie lehrt, daß die mit der Spannung verbundene Energie pro Volumeinheit $\frac{1}{2}|E|^2$ beträgt, also genau gleich dem Zug und Druck ist, welche in Richtung und senkrecht zu den Kraftlinien stattfinden. Wieder ist es natürlich entscheidend für die Zulässigkeit dieser Auffassungsweise, daß die erhaltene Energiedichte nur von dem Werte der das Feld charakterisierenden Zustandsgröße $\mathfrak{E}$ *an der betr. Stelle* abhängt. Es kommt jetzt nicht nur dem Gesamtfeld, sondern auch jedem Stück des Feldes ein bestimmter potentieller Energieinhalt $\int \frac{1}{2} |E|^2 dV$ zu. In der Statik spielt nur die Gesamtenergie eine Rolle; erst wenn wir hernach zur Betrachtung veränderlicher Felder übergehen, werden sich unzweifelhafte Bestätigungen der Richtigkeit dieser Auffassung einstellen.

Auf Leitern sammeln sich im statischen Feld die Ladungen auf der Oberfläche, und im Innern der Konduktoren herrscht kein elektrisches Feld. Dann reichen die Gleichungen (51) aus, um das elektrische Feld im leeren Raum, im »Äther«, zu bestimmen. Befinden sich aber Nicht-Leiter, Dielektrika, im Felde, so ist die Erscheinung der *dielektrischen Polarisation* zu berücksichtigen. — Zwei an den Stellen P_1 und P_2 befindliche Ladungen $+e$ und $-e$, ein »Quellpaar«, wie wir kurz sagen wollen, erzeugen ein Feld, das aus dem Potential

$$\frac{e}{4\pi}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)$$

entspringt, in welchem r_1 und r_2 die Entfernungen der Punkte P_1, P_2 vom Aufpunkt O bedeuten. Das Produkt aus e und dem Vektor $\overrightarrow{P_2 P_1}$ heiße das Moment $\mathfrak{m}$ des Quellpaares. Lassen wir die beiden Ladungen an einer Stelle P in bestimmter Richtung zusammenrücken, indem wir dabei die Ladung gleichzeitig so wachsen lassen, daß das Moment $\mathfrak{m}$ konstant bleibt, so entsteht im Limes die »Doppelquelle« vom Moment $\mathfrak{m}$, deren Potential durch

$$\frac{\mathfrak{m}}{4\pi} \cdot \operatorname{grad}_P \frac{1}{r}$$

gegeben ist. In einem Dielektrikum hat nun ein elektrisches Feld zur Folge, daß in den einzelnen Volumelementen desselben derartige Doppelquellen entstehen; diesen Vorgang bezeichnet man als Polarisation. Ist $\mathfrak{m}$ das elektrische Moment der Doppelquellen pro Volumeinheit, so gilt dann für das Potential statt (50) die Formel

$$-4\pi\varphi = \int \frac{\varrho}{r} dV + \int \mathfrak{m} \cdot \operatorname{grad}_P \frac{1}{r} \cdot dV. \tag{56}$$

Vom Standpunkt der Elektronentheorie können wir diesen Vorgang ohne weiteres verstehen. Stellen wir uns etwa vor, daß ein Atom aus einem ruhenden, positiv geladenen »Kern« besteht, um den ein Elektron von der entgegengesetzten Ladung in einer Kreisbahn rotiert. Im Zeitmittel für einen vollen Umlauf des Elektrons wird dann die mittlere Lage des Elektrons mit der des Kerns zusammenfallen und das Atom nach außen als völlig neutral erscheinen. Wenn aber ein elektrisches Feld wirkt, so übt dieses auf das negative Elektron eine Kraft aus, die zur Folge haben wird, daß seine Bahn zum Atomkern exzentrisch liegt, etwa eine Ellipse wird, in deren einem Brennpunkt der Kern sich befindet. Im Mittel für solche Zeiten, die groß sind gegenüber der Umlaufszeit des Elektrons, wird das Atom dann wirken wie ein ruhendes Quellpaar; oder wenn wir die Materie als kontinuierlich behandeln, werden wir in ihr kontinuierlich verbreitete Doppelquellen annehmen müssen. Schon vor einer genaueren atomistischen Durchführung dieses Gedankens werden wir sagen können, daß wenigstens in erster Annäherung dabei das Moment pro Volumeinheit $\mathfrak{m}$ der erregenden elektrischen Feldstärke $\mathfrak{E}$ proportional sein wird: $\mathfrak{m} = \varkappa\mathfrak{E}$, wo $\varkappa$ eine Materialkonstante bedeutet, die von der chemischen Beschaffenheit der Substanz, nämlich dem Bau ihrer Atome und Moleküle, abhängt. Da

$$\operatorname{div}\left(\frac{\mathfrak{m}}{r}\right) = \mathfrak{m} \cdot \operatorname{grad} \frac{1}{r} + \frac{\operatorname{div} \mathfrak{m}}{r}$$

ist, können wir die Gleichung (56) ersetzen durch

$$-4\pi\varphi = \int \frac{\varrho - \operatorname{div} \mathfrak{m}}{r} dV.$$

Für die Feldstärke $\mathfrak{E} = \operatorname{grad} \varphi$ ergibt sich daraus

$$\operatorname{div} \mathfrak{E} = \varrho - \operatorname{div} \mathfrak{m}.$$

Führen wir also die »elektrische Verschiebung«

$$\mathfrak{D} = \mathfrak{E} + \mathfrak{m}$$

ein, so lauten die Grundgleichungen jetzt

$$\operatorname{rot} \mathfrak{E} = 0, \qquad \operatorname{div} \mathfrak{D} = \varrho. \tag{57}$$

Sie entsprechen den Gleichungen (51); in der einen von ihnen tritt aber jetzt die Feldstärke $\mathfrak{E}$, in der andern die elektrische Verschiebung $\mathfrak{D}$ auf; die Ladungen sind die Quelle der elektrischen Verschiebung. Bei der obigen Annahme $\mathfrak{m} = \varkappa\mathfrak{E}$ erhält man, wenn man die Materialkonstante $\varepsilon = 1 + \varkappa$, die sog. Diëlektrizitätskonstante einführt, das Materialgesetz

$$\mathfrak{D} = \varepsilon\mathfrak{E}. \tag{58}$$

Durch die Beobachtung bestätigen sich diese Gesetze aufs beste. Der von Faraday experimentell nachgewiesene Einfluß des Zwischenmediums, der sich in diesen Gesetzen kundgibt, ist, wie man weiß, für die Ausbildung der Nahewirkungstheorie von großer Bedeutung gewesen. — Auf eine entsprechende Erweiterung der Formeln für Spannung, Energie und Kraft können wir hier verzichten.

Es versteht sich aus dieser Herleitung, daß (57), (58) keine streng gültigen Gesetze sind, sondern sich auf Mittelwerte beziehen, zu bilden für Räume, die viele Atome enthalten, und für Zeiten, die groß sind gegenüber den Umlaufszeiten der Elektronen im Atom. *Als die exakten Naturgesetze sehen wir nach wie vor* (51) *an.* Unser Absehen hier und im folgenden ist durchaus auf die exakten Naturgesetze gerichtet. Es bilden aber, wenn man von den Erscheinungen ausgeht, solche »phänomenologischen« Gesetze wie (57), (58) den notwendigen Durchgangspunkt von dem, was die Beobachtungen direkt ergeben, zu der exakten Theorie. Im allgemeinen können wir erst von ihnen aus uns eine derartige Theorie erarbeiten. Diese wird sich dann als gültig erweisen, wenn es gelingt, unter Zuhilfenahme bestimmter Vorstellungen über die atomistische Konstitution der Materie von ihr aus durch Mittelwertbildung wieder zu den phänomenologischen Gesetzen zu gelangen. Es müssen sich dabei, wenn der Atombau bekannt ist, zugleich die Werte der in diesen Gesetzen auftretenden Materialkonstanten ergeben (in den exakten Naturgesetzen kommen keine solchen Konstanten vor). Da die Gültigkeit der Materialgesetze wie (58), die den Einfluß der Materie nur in Bausch und Bogen berücksichtigen, bei Vorgängen, für welche die feinere Struktur der Materie nicht gleichgültig ist, sicher versagt, müssen sich aus einer solchen atomistischen Theorie ferner die Grenzen der Gültigkeit der phänomenologischen Theorie ergeben und diejenigen Gesetze, welche jenseits dieser Grenzen an ihre Stelle treten. Die Elektronentheorie hat in alle dem große Erfolge aufzuweisen, wenn sie auch wegen der Schwierigkeit, über den feineren Aufbau des Atoms und die Vorgänge im Innern desselben Aufschluß zu erhalten, noch lange nicht zum Abschluß gekommen ist. —

Der *Magnetismus* scheint nach den ersten Erfahrungen an permanenten Magneten nur eine Wiederholung der Elektrizität: auch hier das Coulombsche Gesetz! Sogleich aber macht sich ein charakteristischer Unterschied geltend: man kann positiven und negativen Magnetismus nicht voneinander trennen; es gibt keine Quellen, sondern nur Doppelquellen des Magnetfeldes; der Magnet besteht aus unendlichkleinen Elementarmagneten, deren jeder schon positiven und negativen Magnetismus in sich trägt. De facto ist aber die Magnetismusmenge in jedem Materiestück $= 0$, und das heißt denn doch: es gibt in Wahrheit gar keinen Magnetismus. Die Aufklärung brachte die Entdeckung der magnetischen Wirkung des elektrischen Stromes durch Örsted. Die im *Biot-Savartschen Gesetz* niedergelegte genaue quantitative Formulierung dieser Wirkung führt ebenso wie das Coulombsche auf zwei einfache Nahewirkungsgesetze: bedeutet $\mathfrak{s}$ die Dichte des elektrischen Stroms, $\mathfrak{H}$ die magnetische Feldstärke, so gilt

$$\operatorname{rot}\mathfrak{H} = \mathfrak{s}\,, \qquad \operatorname{div}\mathfrak{H} = 0\,. \tag{59}$$

Die zweite Gleichung sagt die Nicht-Existenz von Quellen des Magnetfeldes aus. Die Gleichungen (59) sind ein genaues Seitenstück zu (51)

unter Vertauschung von div und rot. Diese beiden Operationen der Vektoranalysis entsprechen sich in derselben Weise, wie in der Vektoralgebra skalare und vektorielle Multiplikation (div ist skalare, rot vektorielle Multiplikation mit dem symbolischen Vektor »Differentiation«). Die im Unendlichen verschwindende Lösung der Gleichungen (59) bei gegebener Stromverteilung lautet daher auch ganz entsprechend zu (49):

$$\mathfrak{H} = \int \frac{[\mathfrak{s}\mathfrak{r}]}{4\pi r^3} dV; \tag{60}$$

das ist eben das Biot-Savartsche Gesetz. Man kann diese Lösung aus einem »Vektorpotential« $-\mathfrak{f}$ ableiten nach den Formeln

$$\mathfrak{H} = -\operatorname{rot}\mathfrak{f}, \qquad -4\pi\mathfrak{f} = \int \frac{\mathfrak{s}}{r} dV.$$

Schließlich lautet die Formel für die Kraftdichte des Magnetfeldes ganz analog zu (52):

$$\mathfrak{p} = [\mathfrak{s}\mathfrak{H}]. \tag{61}$$

Es ist kein Zweifel, daß wir durch diese Gesetze die Wahrheit über den Magnetismus erfahren. Sie sind keine Wiederholung, aber ein genaues Seitenstück der elektrischen; sie entsprechen ihnen wie das vektorielle Produkt dem skalaren. Es läßt sich aus ihnen mathematisch beweisen, daß ein kleiner Kreisstrom genau so wirkt wie ein kleiner, senkrecht durch den Kreisstrom hindurchgesteckter Elementarmagnet. Wir haben uns infolgedessen nach Ampère vorzustellen, daß die magnetische Wirkung magnetisierter Körper auf Molekularströmen beruhe; nach der Elektronentheorie sind diese ohne weiteres gegeben durch die im Atom umlaufenden Elektronen.

Auch die Kraft $\mathfrak{p}$ des Magnetfeldes kann auf Spannungen zurückgeführt werden, und zwar ergeben sich für die Spannungskomponenten genau die gleichen Werte wie im elektrostatischen Felde: man braucht nur $\mathfrak{E}$ durch $\mathfrak{H}$ zu ersetzen. Wir werden infolgedessen für die Dichte der im Felde enthaltenen potentiellen Energie hier genau den entsprechenden Ansatz $\frac{1}{2}\mathfrak{H}^2$ machen; seine volle Rechtfertigung findet er erst in der Theorie der zeitlich veränderlichen Felder.

Aus (59) folgt, daß der Strom quellenfrei verteilt ist: $\operatorname{div}\mathfrak{s} = 0$. Das Strömungsfeld kann daher in lauter in sich zurücklaufende Stromröhren zerlegt werden; durch alle Querschnitte einer einzelnen Stromröhre fließt derselbe Gesamtstrom. Aus den Gesetzen des stationären Feldes geht in keiner Weise hervor und es kommt für sie in keiner Weise in Betracht, daß dieser Strom elektrischer Strom im wörtlichen Sinne ist, d. h. aus bewegter Elektrizität besteht; dies ist aber zweifellos der Fall. Im Lichte dieser Tatsache besagt das Gesetz $\operatorname{div}\mathfrak{s} = 0$, daß Elektrizität weder entsteht noch vergeht. Nur darum, weil der Fluß des Stromvektors $\mathfrak{s}$ durch eine geschlossene Oberfläche Null ist, kann die Dichte der Elektrizität allerorten unverändert bleiben — es handelt sich jetzt ausschließlich um

stationäre Felder! —, ohne daß Elektrizität entsteht oder vergeht. — Das oben eingeführte Vektorpotential $\mathfrak{f}$ genügt ebenfalls der Gleichung div $\mathfrak{f} = 0$.

$\mathfrak{s}$ ist als elektrischer Strom ohne Zweifel ein Vektor im eigentlichen Sinne des Worts. Dann geht aber aus dem Biot-Savartschen Gesetz hervor, daß $\mathfrak{H}$ *nicht ein Vektor, sondern ein linearer Tensor 2. Stufe ist*, dessen Komponenten in irgend einem (Cartesischen oder auch nur affinen Koordinatensystem) H_{ik} heißen mögen. Das Vektorpotential $\mathfrak{f}$ ist ein wirklicher Vektor. Sind φ_i seine kovarianten Komponenten und s^i die kontravarianten der Stromdichte (der Strom ist von Hause aus wie die Geschwindigkeit ein kontravarianter Vektor), so enthält die folgende Tabelle die endgültige (von der Dimensionszahl unabhängige) Form der *Gesetze des Magnetfeldes eines stationären elektrischen Stromes:*

(62, I) $$\frac{\partial H_{kl}}{\partial x_i} + \frac{\partial H_{li}}{\partial x_k} + \frac{\partial H_{ik}}{\partial x_l} = 0, \quad \textit{bzw.} \quad H_{ik} = \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_k} - \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_i}$$

und

(62, II) $$\frac{\partial H^{ik}}{\partial x_k} = s^i.$$

Die Spannungen bestimmen sich aus

(62, III) $$S_i^k = H_{ir}H^{kr} - \tfrac{1}{2}\delta_i^k |H|^2,$$

wo $|H|$ *den Betrag des Magnetfeldes bedeutet:*

$$|H|^2 = \tfrac{1}{2} H_{ik}H^{ik}.$$

Der Spannungstensor ist symmetrisch, da

$$H_{ir}H_k^r = H_i^r H_{kr} = g^{rs} H_{ir} H_{ks}.$$

Die Komponenten der Kraftdichte sind

(62, IV) $$p_i = H_{ik}s^k,$$

die Energiedichte $$= \tfrac{1}{2}|H|^2.$$

Das sind die Gesetze, wie sie für das Feld im leeren Raum gelten; wir betrachten sie wie im elektrischen Fall als die allgemein gültigen exakten Naturgesetze. Für eine phänomenologische Theorie muß aber wieder die der dielektrischen Polarisation analoge Erscheinung der *Magnetisierung* beachtet werden; hier tritt dann wie $\mathfrak{D}$ neben $\mathfrak{E}$ die »Magnetinduktion« $\mathfrak{B}$ neben der Feldstärke $\mathfrak{H}$ auf, es gelten die Feldgesetze

$$\text{rot}\,\mathfrak{H} = \mathfrak{s}, \qquad \text{div}\,\mathfrak{B} = 0$$

und das Materialgesetz

(63) $$\mathfrak{B} = \mu\mathfrak{H};$$

die Materialkonstante μ heißt magnetische Permeabilität. Während aber das einzelne Atom durch die Wirkung der elektrischen Feldstärke erst polarisiert (zu einer Doppelquelle) wird, und zwar in Richtung der Feldstärke, ist das Atom wegen der in ihm befindlichen rotierenden Elektronen von vornherein ein Elementarmagnet (wenigstens bei den para- und

ferromagnetischen Körpern). Aber alle diese Elementarmagnete heben ihre Wirkungen gegenseitig auf, solange sie ungeordnet sind und alle Stellungen der Elektronen-Kreisbahnen im Durchschnitt gleich oft vorkommen. Die einwirkende magnetische Kraft hat hier lediglich die Funktion, die vorhandenen Doppelquellen zu *richten*. Damit hängt es offenbar zusammen, daß der Geltungsbereich der Gleichung (63) ein viel engerer ist als der der entsprechenden Gleichung (58). Ihm sind vor allem die permanenten Magnete und die ferromagnetischen Körper (Eisen, Nickel, Kobalt) nicht unterstellt.

Zu den bisherigen tritt in der phänomenologischen Theorie als weiteres das *Ohmsche Gesetz*

$$\mathfrak{s} = \sigma \mathfrak{E} \quad (\sigma = \text{Leitfähigkeit});$$

es sagt aus, daß der Strom dem Potentialgefälle folgt und ihm bei gegebener Leitersubstanz proportional ist. In der atomistischen Theorie entspricht dem Ohmschen Gesetz das Grundgesetz der Mechanik, nach welchem die auf die »freien« Elektronen wirkende elektrische und magnetische Kraft deren Bewegung bestimmt und so den elektrischen Strom erzeugt. Infolge der Zusammenstöße mit den Molekülen wird dabei keine dauernde Beschleunigung eintreten, sondern (wie bei einem schweren fallenden Körper infolge des Luftwiderstandes) sich alsbald eine mittlere Grenzgeschwindigkeit herausbilden, die man wenigstens in erster Annäherung der treibenden elektrischen Kraft $\mathfrak{E}$ proportional setzen kann; so wird das Ohmsche Gesetz verständlich.

Wird der Strom durch ein galvanisches Element oder einen Akkumulator erzeugt, so wird durch den sich abspielenden chemischen Prozeß zwischen Anfang und Ende der Drahtleitung eine konstante Potentialdifferenz aufrecht erhalten, die »elektromotorische Kraft«. Da die Vorgänge, die sich in dem Stromerzeuger abspielen, offenbar nur von einer atomistischen Theorie verstanden werden können, ist es phänomenologisch am einfachsten, ihn durch einen Querschnitt im geschlossenen Leitungskreis zur Darstellung zu bringen, über den hinüber das Potential einen Sprung erleidet, welcher gleich der elektromotorischen Kraft ist.

Dieser kurze Überblick über die Maxwellsche Theorie des stationären Feldes wird uns für das Folgende genügen. Auf Einzelheiten und konkrete Anwendungen können wir uns hier natürlich nicht einlassen.

Kapitel II.

Das metrische Kontinuum.

§ 10. Bericht über Nicht-Euklidische Geometrie[1]).

Der Zweifel an der Euklidischen Geometrie scheint so alt zu sein wie diese selbst und ist keineswegs erst, wie das von unsern Philosophen meist angenommen wird, eine Ausgeburt moderner mathematischer Hyperkritik. Dieser Zweifel hat sich von jeher an das *V. Postulat des*

Euklid geknüpft. Es besagt im wesentlichen, daß in einer Ebene, in der eine Gerade g und ein nicht auf ihr gelegener Punkt P gegeben sind, nur eine einzige Gerade existiert, welche durch P hindurchgeht und g nicht schneidet; sie heißt die Parallele. Während die übrigen Axiome des Euklid ohne weiteres als evident zugestanden wurden, haben sich schon die ältesten Erklärer bemüht, diesen Satz auf Grund der übrigen Axiome zu beweisen. Heute, wo wir wissen, daß das gesteckte Ziel nicht erreicht werden konnte, müssen wir in diesen Betrachtungen die ersten Anfänge der »Nicht-Euklidischen« Geometrie erblicken, d. h. des Aufbaus eines geometrischen Systems, das zu seinen logischen Grundlagen die sämtlichen Axiome des Euklid mit Ausnahme des Parallelenpostulats annimmt. Wir besitzen von Proklus (5. Jahrh. n. Chr.) einen Bericht über derartige Versuche. Proklus warnt darin ausdrücklich vor dem Mißbrauch, der mit Berufungen auf Evidenz getrieben werden kann, (man darf nicht müde werden, diese Warnung zu wiederholen; man darf aber auch nicht müde werden, zu betonen, daß trotz ihres vielfachen Mißbrauchs die Evidenz letzter Ankergrund aller Erkenntnis ist, auch der empirischen) und besteht auf der Möglichkeit, daß es »asymptotische Gerade« geben könne.

Dazu mag man sich folgendes Bild machen. In einer Ebene sei eine feste Gerade g, ein nicht auf ihr gelegener Punkt P gegeben und eine durch P hindurchgehende, um P drehbare Gerade s. In ihrer Ausgangslage möge sie etwa senkrecht auf g sein. Drehen wir jetzt s, so gleitet der Schnittpunkt von s und g auf g entlang, z. B. nach rechts hinüber, und es tritt ein bestimmter Moment ein, wo dieser Schnittpunkt gerade ins Unendliche entschwunden ist: dann hat s die Lage einer »asymptotischen« Geraden. Drehen wir weiter, so nimmt Euklid an, daß im selben Moment schon ein Schnittpunkt von links her auftritt. Proklus dagegen weist auf die Möglichkeit hin, daß man vielleicht erst durch einen gewissen Winkel weiter drehen muß, ehe ein Schnittpunkt auf der linken Seite zustande kommt. Dann hätten wir zwei »asymptotische« Gerade, eine nach rechts s' und eine nach links s''. Liegt die Gerade s durch P in dem Winkelraum zwischen s'' und s' (bei der eben geschilderten Drehung), so schneidet sie g; liegt sie zwischen s' und s'', so schneidet sie nicht. — *Eine* nicht-schneidende muß mindestens existieren; das folgt aus den übrigen Axiomen Euklids. Ich erinnere an eine aus dem ersten Elementarunterricht in der Geometrie vertraute ebene Figur, bestehend aus der Geraden h und zwei Geraden g und g', die h in A und A' unter gleichen Winkeln schneiden. g und g' werden beide durch ihren Schnitt mit h in eine rechte und eine

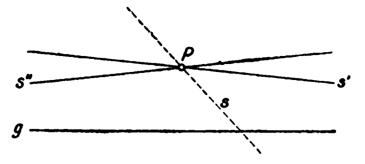


Fig. 2.

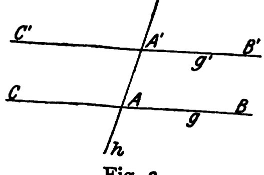


Fig. 3.

linke Hälfte zerlegt. Hätten nun g und g' etwa einen auf der rechten Seite von h gelegenen Schnittpunkt S gemein, so würde sich, da (s. Fig. 3) $BAA'B'$ kongruent zu $C'A'AC$ ist, auch auf der linken Seite ein solcher Schnittpunkt S^* ergeben; dies ist aber unmöglich, da durch zwei Punkte S und S^* nur eine einzige Gerade hindurchgeht.

Die Versuche, das Euklidische Postulat zu erweisen, setzen sich unter den Arabern und unter den abendländischen Mathematikern des Mittelalters fort. Wir nennen nur, sofort in die neuere Zeit hinüberspringend, die Namen der letzten bedeutendsten Vorläufer der Nicht-Euklidischen Geometrie: den Jesuitenpater Saccheri (Beginn des 18. Jahrh.), die Mathematiker Lambert und Legendre. Saccheri weiß, daß die Frage der Gültigkeit des Parallelenpostulats der andern äquivalent ist, ob die Winkelsumme im Dreieck gleich oder kleiner als 180° ist. Ist sie in *einem* Dreieck $= 180^\circ$, so ist sie es in jedem, und es gilt die Euklidische Geometrie; ist sie in *einem* Dreieck $< 180^\circ$, so ist sie in jedem Dreieck $< 180^\circ$. Daß sie $> 180^\circ$ ausfällt, ist aus dem gleichen Grunde ausgeschlossen, aus dem eben gefolgert wurde, daß nicht alle Gerade durch P die feste Gerade g schneiden können. Lambert entdeckte, daß unter der Voraussetzung einer Winkelsumme $< 180^\circ$ in der Geometrie eine ausgezeichnete Länge existiert; es hängt das eng mit der schon von Wallis gemachten Bemerkung zusammen, daß es in der Nicht-Euklidischen Geometrie (ganz so wie in der Geometrie auf einer festen Kugel) keine ähnlichen Figuren verschiedener Größe gibt: wenn es also so etwas gibt wie *Gestalt* unabhängig von Größe, so besteht die Euklidische Geometrie zu Recht. Außerdem leitete Lambert eine Formel für den Dreiecksinhalt her, aus welcher hervorgeht, daß dieser Inhalt in der Nicht-Euklidischen Geometrie nicht über alle Grenzen wachsen kann. Es scheint, daß sich durch die Untersuchungen dieser Männer allmählich in weiteren Kreisen der Glaube an die Unbeweisbarkeit des Parallelenpostulats Bahn gebrochen hat. Die Frage hat damals viele Gemüter bewegt; d'Alembert bezeichnete es als einen Skandal der Geometrie, daß sie noch immer nicht zur Entscheidung gebracht sei. Die Autorität Kants, dessen philosophisches System die Euklidische Geometrie als apriorische, den Gehalt der reinen Raumanschauung in adäquaten Urteilen wiedergebende Erkenntnis in Anspruch nimmt, konnte den Zweifel nicht auf die Dauer unterdrücken.

Auch Gauß ist ursprünglich noch darauf aus gewesen, das Parallelenaxiom zu beweisen; doch hat er bald die Überzeugung gewonnen, daß dies unmöglich sei, und hat die Prinzipien einer Nicht-Euklidischen Geometrie, in welcher jenes Axiom nicht erfüllt ist, bis zu einem solchen Punkte entwickelt, daß von da ab der weitere Ausbau mit der nämlichen Leichtigkeit vollzogen werden kann wie der der Euklidischen Geometrie. Er hat aber über seine Untersuchungen nichts bekannt gegeben; er fürchtete, wie er später einmal in einem Privatbriefe schrieb, das »Geschrei der Böoter«; denn es gäbe nur wenige, welche verstünden, worauf es bei diesen Dingen eigentlich ankäme. Unabhängig von Gauß ist

Schweikart, ein Professor der Jurisprudenz, zu vollem Einblick in die Verhältnisse der Nicht-Euklidischen Geometrie gelangt, wie aus einem knapp gehaltenen, an Gauß gerichteten Notitzblatt hervorgeht. Er hielt es wie Gauß für keineswegs selbstverständlich und ausgemacht, daß in unserm wirklichen Raum die Euklidische Geometrie gilt. Sein Neffe Taurinus, den er zur Beschäftigung mit diesen Fragen anregte, war zwar im Gegensatz zu ihm ein Euklid-Gläubiger; ihm verdanken wir aber die Entdeckung, daß die Formeln der sphärischen Trigonometrie auf einer Kugel vom imaginären Radius $\sqrt{-1}$ reell sind und durch sie auf analytischem Wege ein geometrisches System konstruiert ist, das den Axiomen des Euklid außer dem V. Postulat, diesem aber nicht genügt.

Vor der Öffentlichkeit müssen sich in den Ruhm, Entdecker und Erbauer der Nicht-Euklidischen Geometrie zu sein, teilen der Russe *Nikolaj Iwanowitsch Lobatschefskij* (1793—1856), Professor der Mathematik in Kasan, und der Ungar *Johann Bolyai* (1802—1860), Offizier der österreichischen Armee. Beide kamen mit ihren Ideen um 1826 ins Reine; die Hauptschrift beider, die der Öffentlichkeit ihre Entdeckung mitteilte und eine Begründung der neuen Geometrie im Stile Euklids darbot, stammt aus den Jahren 1830/31. Die Darstellung bei Bolyai ist besonders durchsichtig dadurch, daß er die Entwicklung so weit als möglich führt, ohne über die Gültigkeit oder Ungültigkeit des V. Postulats eine Annahme zu machen, und erst am Schluß aus den Sätzen dieser seiner »absoluten« Geometrie, je nachdem ob man sich für oder wider Euklid entscheidet, die Theoreme der Euklidischen und der Nicht-Euklidischen Geometrie herleitet.

Wenn so auch das Gebäude errichtet war, so war es noch immer nicht definitiv sichergestellt, ob sich schließlich nicht doch einmal in der absoluten Geometrie das Parallelenaxiom als ein Folgesatz herausstellen würde; der strenge *Beweis der Widerspruchslosigkeit der Nicht-Euklidischen Geometrie* stand noch aus. Er ergab sich aber aus der Weiterentwicklung der Nicht-Euklidischen Geometrie fast wie von selbst. Der einfachste Weg zu diesem Beweis wurde freilich, wie das oft geschieht, nicht zuerst eingeschlagen; er ist erst von Klein um 1870 aufgefunden worden und beruht auf der Konstruktion eines *Euklidischen Modells* für die Nicht-Euklidische Geometrie[2]). Beschränken wir uns auf die Ebene! In einer Euklidischen Ebene mit den rechtwinkligen Koordinaten x, y zeichnen wir den Kreis U vom Radius 1 um den Koordinatenursprung. Führen wir homogene Koordinaten ein,

$$x = \frac{x_1}{x_3}, \quad y = \frac{x_2}{x_3}$$

(so daß also die Lage eines Punktes durch das Verhältnis von drei Zahlen $x_1 : x_2 : x_3$ charakterisiert ist), so lautet die Gleichung des Kreises

$$-x_1^2 - x_2^2 + x_3^2 = 0.$$

Die auf der linken Seite stehende quadratische Form werde mit $\Omega(x)$ bezeichnet, die zugehörige symmetrische Bilinearform zweier Wertsysteme x_i, x'_i mit $\Omega(xx')$. Eine Abbildung, die jedem Punkt x einen Bildpunkt x' durch die linearen Formeln

$$x'_i = \sum_{k=1}^{3} \alpha_{ik} x_k \qquad (|\alpha_{ik}| \neq 0)$$

zuordnet, heißt bekanntlich eine Kollineation (die affinen Abbildungen sind spezielle Kollineationen). Sie führt jede Gerade Punkt für Punkt wieder in eine Gerade über und läßt das Doppelverhältnis von 4 Punkten auf einer Geraden ungeändert. Wir stellen jetzt ein Lexikon auf, durch das die Begriffe der Euklidischen Geometrie in eine fremde Sprache, die »Nicht-Euklidische«, übersetzt werden, deren Worte wir durch Anführungsstriche kennzeichnen. Das Lexikon besteht nur aus drei Vokabeln.

»*Punkt*« heißt jeder Punkt im Innern von U.

»*Gerade*« heißt das innerhalb U verlaufende Stück einer Geraden. Unter den Kollineationen, welche den Kreis U in sich überführen, gibt es zwei verschiedene Arten: solche, welche den Umlaufssinn auf U nicht ändern, und solche, welche ihn in sein Gegenteil verkehren. Die Kollineationen der ersten Art nennen wir »kongruente« Abbildungen und zwei aus »Punkten« bestehende Figuren »*kongruent*«, wenn sie durch eine solche Abbildung ineinander übergeführt werden können. Für diese »Punkte« und »Geraden« und für diesen Begriff der »Kongruenz« gelten die sämtlichen Axiome Euklids mit Ausnahme des Parallelenpostulats. In Fig. 4 ist ein ganzes Büschel von »Geraden« durch den »Punkt« P gezeichnet, die alle die eine »Gerade« g nicht schneiden. Die Widerspruchslosigkeit der Nicht-Euklidischen Geometrie ist damit erwiesen; denn es sind Dinge und Beziehungen aufgewiesen, für welche bei geeigneter Namengebung die sämtlichen Sätze jener Geometrie erfüllt sind. — Die Übertragung des Kleinschen Modells auf die räumliche Geometrie ist offenbar ohne weiteres möglich.

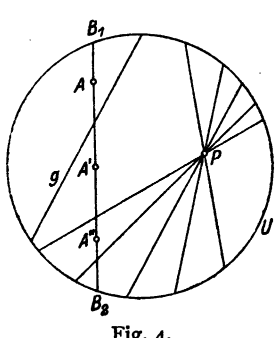


Fig. 4.

Wir wollen in diesem Modell noch die Nicht-Euklidische Entfernung zweier »Punkte«

$$A = (x_1 : x_2 : x_3), \qquad A' = (x'_1 : x'_2 : x'_3)$$

bestimmen. Die Gerade AA' schneide den Kreis U in den beiden Punkten B_1, B_2. Die homogenen Koordinaten y_i jedes dieser beiden Punkte haben die Form

$$y_i = \lambda x_i + \lambda' x'_i,$$

und das zugehörige Parameterverhältnis $\lambda : \lambda'$ ergibt sich aus der Gleichung $\Omega(y) = 0$:

$$\frac{\lambda}{\lambda'} = \frac{-\Omega(xx') \pm \sqrt{\Omega^2(xx') - \Omega(x)\Omega(x')}}{\Omega(x)}.$$

Das Doppelverhältnis der vier Punkte $AA'\ B_1 B_2$ ist daher

$$[AA'] = \frac{\Omega(xx') + \sqrt{\Omega^2(xx') - \Omega(x)\Omega(x')}}{\Omega(xx') - \sqrt{\Omega^2(xx') - \Omega(x)\Omega(x')}}.$$

Diese von den beiden willkürlichen »Punkten« A, A' abhängige Größe ändert sich nicht bei einer »kongruenten« Abbildung. Sind $A\ A'\ A''$ irgend drei, in der hingeschriebenen Reihenfolge auf einer »Geraden« gelegene »Punkte«, so ist

$$[AA''] = [AA'] \cdot [A'A''].$$

Die Größe

$$\tfrac{1}{2}\lg[AA'] = \overline{AA'} = r$$

hat also die Funktionaleigenschaft

$$\overline{AA'} + \overline{A'A''} = \overline{AA''}.$$

Da sie außerdem für »kongruente« Strecken AA' den gleichen Wert hat, ist sie als die Nicht-Euklidische Entfernung der beiden Punkte AA' anzusprechen. Indem wir unter lg den natürlichen Logarithmus verstehen, erhalten wir in Einklang mit der Erkenntnis Lamberts eine absolute Festlegung der Maßeinheit. Die Definition läßt sich einfacher so schreiben:

$$\text{(1)} \qquad \mathfrak{Cof}\, r = \frac{\Omega(xx')}{\sqrt{\Omega(x) \cdot \Omega(x')}}. \qquad (\mathfrak{Cof} = \text{Cosinus hyperbolicus.})$$

Diese Maßbestimmung ist unter Zugrundelegung eines beliebigen reellen oder imaginären Kegelschnitts $\Omega(x) = 0$ vor Klein bereits von Cayley als »projektive Maßbestimmung« aufgestellt worden [3]; aber erst Klein erkannte, daß sie für einen reellen Kegelschnitt zur Nicht-Euklidischen Geometrie führt.

Man muß nicht wähnen, das Kleinsche Modell zeige, daß die Nicht-Euklidische Ebene endlich sei. Vielmehr kann ich, Nicht-Euklidisch gemessen, auf einer »Geraden« dieselbe Strecke unendlich oft hintereinander abtragen; nur im *Euklidischen* Modell *Euklidisch* gemessen, werden die Abstände dieser »äquidistanten« Punkte immer kleiner und kleiner. Für die Nicht-Euklidische Ebene ist der Grenzkreis U das unerreichbare Unendlichferne.

Die Cayleysche Maßbestimmung für einen imaginären Kegelschnitt führt auf die gewöhnliche sphärische Geometrie, wie sie auf einer Kugel im Euklidischen Raum Geltung hat. Die größten Kreise treten darin an Stelle der geraden Linien, es muß aber jedes aus zwei sich diametral gegenüberliegenden Punkten bestehende Punktepaar als einzelner »Punkt«

betrachtet werden, damit sich zwei »Geraden« nur in einem »Punkte« schneiden. Wir projizieren die Kugelpunkte durch geradlinige Strahlen vom Zentrum auf die in einem Kugelpunkte, dem Südpol, gelegte Tangentenebene: in dieser Bildebene fallen alsdann je zwei diametral gegenüberliegende Punkte zusammen. Die Ebene müssen wir aber wie in der projektiven Geometrie mit einer unendlich fernen Geraden ausstatten, die das Bild des Äquatorkreises ist. Wir nennen zwei Figuren in dieser Ebene jetzt »kongruent«, wenn ihre durch die Zentralprojektion auf der Kugel entstehenden Bilder im gewöhnlichen Euklidischen Sinne kongruent sind. Unter Anwendung dieses »Kongruenz«-Begriffs gilt dann in der Ebene eine Nicht-Euklidische Geometrie, in der alle Axiome Euklids erfüllt sind mit Ausnahme des V. Postulats. An dessen Stelle tritt aber hier die Tatsache, daß je zwei Gerade ohne Ausnahme sich schneiden, und in Übereinstimmung damit ist die Winkelsumme $> 180°$. Das scheint mit einem oben erwähnten Euklidischen Beweis in Widerspruch zu stehen. Die Antinomie löst sich dadurch, daß in der jetzigen, »sphärischen« Geometrie die Gerade eine geschlossene Linie ist, während Euklid, ohne es allerdings in den Axiomen auszusprechen, stillschweigend voraussetzt, daß sie eine offene Linie ist, nämlich durch jeden ihrer Punkte in zwei Hälften zerfällt. Nur unter dieser Vorraussetzung ist der in seinem Beweis gezogene Schluß zwingend, daß der auf der »rechten« Seite gelegene hypothetische Schnittpunkt S von dem auf der »linken« Seite gelegenen S^* verschieden ist.

Wir benutzen im Raum ein Cartesisches Koordinatensystem $x_1\, x_2\, x_3$, dessen Nullpunkt im Kugelzentrum liegt, dessen x_3-Achse in die Verbindungslinie Nord-Südpol fällt und welchem als Maßeinheit der Kugelradius zugrunde liegt. Sind x_1, x_2, x_3 die Koordinaten irgend eines Kugelpunktes:

$$\Omega(x) \equiv x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1,$$

so sind $\frac{x_1}{x_3}, \frac{x_2}{x_3}$ die erste und zweite Koordinate des Bildpunktes in unserer Ebene $x_3 = 1$; $x_1 : x_2 : x_3$ ist also das Verhältnis der homogenen Koordinaten des Bildpunktes. Kongruente Abbildungen der Kugel sind lineare Transformationen, welche die quadratische Form $\Omega(x)$ invariant lassen; die »kongruenten« Abbildungen der Ebene im Sinne unserer »sphärischen« Geometrie sind also durch solche lineare Transformationen der homogenen Koordinaten gegeben, welche die Gleichung $\Omega(x) = 0$, die einen imaginären Kegelschnitt bedeutet, in sich überführen. Damit ist unsere Behauptung betreffs des Zusammenhanges der sphärischen Geometrie mit der Cayleyschen Maßbestimmung bewiesen. Im Einklang damit lautet die Formel für die Entfernung r zweier Punkte A, A' hier

$$\cos r = \frac{\Omega(xx')}{\sqrt{\Omega(x)\,\Omega(x')}}. \tag{2}$$

Zugleich haben wir die Entdeckung des Taurinus bestätigt, daß die Nicht-

Euklidische Geometrie identisch ist mit der sphärischen auf einer Kugel vom Radius $\sqrt{-1}$.

Zwischen die Bolyai-Lobatschefskysche und die sphärische Geometrie schiebt sich als Grenzfall die Euklidische ein. Lassen wir nämlich einen reellen Kegelschnitt durch einen ausgearteten in einen imaginären übergehen, so verwandelt sich die mit der zugehörigen Cayleyschen Maßbestimmung ausgestattete Ebene von einer Bolyai-Lobatschefskyschen durch eine Euklidische hindurch in eine sphärische.

§ 11. Riemannsche Geometrie.

Die für uns vor allem bedeutsame Weiterentwicklung der Idee der Nicht-Euklidischen Geometrie durch Riemann knüpft an die Grundlagen der Infinitesimalgeometrie, insbesondere der Flächentheorie an, wie sie von Gauß in seinen Disquisitiones circa superficies curvas gelegt worden sind.

Die ursprünglichste Eigenschaft des Raumes ist die, daß seine Punkte eine dreidimensionale Mannigfaltigkeit bilden. Was verstehen wir darunter? Wir sagen z. B., daß die Ellipsen (nach Größe und Gestalt, d. h. wenn man kongruente Ellipsen als gleich, nicht-kongruente als verschieden betrachtet) eine zweidimensionale Mannigfaltigkeit bilden, weil die einzelne Ellipse innerhalb dieser Gesamtheit durch zwei Zahlangaben, den Wert der halben großen und kleinen Achse, festgelegt werden kann. Die Gleichgewichtszustände eines idealen Gases, deren Verschiedenheit etwa durch die Unabhängigen: Druck und Temperatur charakterisiert werde, bilden eine zweidimensionale Mannigfaltigkeit, ebenso die Punkte auf einer Kugel — oder die einfachen Töne nach Intensität und Qualität. Die Farben bilden gemäß der physiologischen Theorie, nach der die Farbwahrnehmung bestimmt ist durch die Kombination dreier chemischer Prozesse auf der Retina, des Schwarz-Weiß, Rot-Grün und Gelb-Blau-Prozesses, deren jeder in einer bestimmten Richtung mit bestimmter Intensität vor sich gehen kann, eine dreidimensionale Mannigfaltigkeit nach Qualität und Intensität, die Farbqualitäten jedoch nur eine zweidimensionale; es findet dies seine Bestätigung durch die bekannte Maxwellsche Konstruktion des Farbdreiecks. Die möglichen Lagen eines starren Körpers bilden eine sechsdimensionale Mannigfaltigkeit, die möglichen Lagen eines mechanischen Systems von n Freiheitsgraden allgemein eine n-dimensionale. *Für eine n-dimensionale Mannigfaltigkeit ist charakteristisch, daß man das einzelne zu ihr gehörige Element* (in unsern Beispielen: die einzelnen Punkte oder Zustände, Farben oder Töne) *festlegen kann durch die Angabe der Zahlwerte von n Größen, den »Koordinaten«, die stetige Funktionen innerhalb der Mannigfaltigkeit sind.* Dabei ist aber nicht erforderlich, zu verlangen, daß die ganze Mannigfaltigkeit mit allen ihren Elementen umkehrbar-eindeutig und stetig in dieser Weise durch die Wertsysteme von n Koordinaten repräsentiert werde (z. B. ist das ausgeschlossen für die Kugel, $n = 2$), sondern es kommt nur darauf an, daß, wenn P ein beliebiges

Element der Mannigfaltigkeit ist, jedesmal eine gewisse Umgebung der Stelle P umkehrbar-eindeutig und stetig auf die Wertsysteme von n Koordinaten abgebildet werden kann. Ist x_i ein System von n Koordinaten, x_i^* irgend ein anderes, so werden die Koordinatenwerte x_i und x_i^* desselben Elementes allgemein durch Relationen

$$x_i = f_i(x_1^* x_2^* \cdot \cdot x_n^*) \qquad (i = 1, 2, \cdots, n) \tag{3}$$

miteinander verknüpft sein, die nach den x_i^* auflösbar sind und in denen die f_i stetige Funktionen ihrer Argumente bedeuten. Solange wir von der Mannigfaltigkeit nichts weiter wissen, sind wir nicht imstande, irgend ein Koordinatensystem vor den andern auszuzeichnen. Zur analytischen Behandlung beliebiger stetiger Mannigfaltigkeiten wird also eine Theorie der Invarianz gegenüber beliebigen Koordinatentransformationen (3) nötig, während wir uns im vorigen Kapitel zur Durchführung der affinen Geometrie auf die viel speziellere Theorie der Invarianz gegenüber *linearen* Transformationen stützten.[1]

Die Infinitesimalgeometrie beschäftigt sich mit dem Studium von Kurven und Flächen im dreidimensionalen Euklidischen Raum, der auf die Cartesischen Koordinaten x, y, z bezogen werde. Eine *Kurve* ist allgemein eine eindimensionale Punktmannigfaltigkeit; ihre einzelnen Punkte können durch die Werte eines Parameters u voneinander unterschieden werden. Befindet sich der Kurvenpunkt u an der Raumstelle mit den Koordinaten xyz, so werden x, y, z bestimmte stetige Funktionen von u sein:

$$x = x(u), \qquad y = y(u), \qquad z = z(u), \tag{4}$$

und (4) ist die »Parameterdarstellung« der Kurve. Deuten wir u als Zeit, so gibt (4) das Gesetz der Bewegung eines Punktes, welcher die gegebene Kurve durchläuft. Durch die Kurve selbst ist aber die Parameterdarstellung (4) nicht eindeutig bestimmt; vielmehr kann der Parameter u noch einer beliebigen stetigen Transformation unterworfen werden.

Eine zweidimensionale Punktmannigfaltigkeit heißt *Fläche*; ihre Punkte können durch die Werte zweier Parameter u_1, u_2 unterschieden werden, und sie besitzt daher eine Parameterdarstellung der Art:

$$x = x(u_1 u_2), \qquad y = y(u_1 u_2), \qquad z = z(u_1 u_2). \tag{5}$$

Wieder können die Parameter u_1, u_2 noch einer beliebigen stetigen Transformation unterworfen werden, ohne daß die so dargestellte Fläche sich ändert. Wir wollen annehmen, daß die Funktionen in (5) nicht nur stetig, sondern auch stetig differentiierbar sind. Von dieser Darstellung (5) einer beliebigen Fläche geht Gauß in seiner allgemeinen Theorie aus; die Parameter u_1, u_2 bezeichnet man daher als Gaußsche (oder krummlinige) Koordinaten auf der Fläche. — Ein Beispiel: Projizieren wir wie im vorigen Paragraphen die Punkte der Einheitskugel um den Nullpunkt des Koordinatensystems vom Zentrum auf die Tangentenebene $z = 1$ im Südpol, nennen xyz die Koordinaten eines beliebigen Kugelpunktes und u_1, u_2 die x- und y-Koordinate des Projektionspunktes in dieser Ebene, so ist

$$(6)\quad x = \frac{u_1}{\sqrt{1 + u_1^2 + u_2^2}}, \quad y = \frac{u_2}{\sqrt{1 + u_1^2 + u_2^2}}, \quad z = \frac{1}{\sqrt{1 + u_1^2 + u_2^2}}.$$

Das ist eine Parameterdarstellung der Kugel; sie erfaßt jedoch nicht die ganze Kugel, sondern nur eine gewisse Umgebung des Südpols, nämlich die südliche Halbkugel bis zum Äquator, aber mit Ausschluß desselben. Eine andere Parameterdarstellung liefern die geographischen Koordinaten Länge und Breite.

In der Thermodynamik benutzen wir zur graphischen Darstellung eine Bildebene mit einem rechtwinkligen Koordinatenkreuz, in der wir den etwa durch Druck p und Temperatur ϑ gegebenen Zustand eines Gases repräsentieren durch einen Punkt mit den rechtwinkligen Koordinaten p, ϑ. Das gleiche Verfahren können wir hier anwenden: dem Punkt $u_1 u_2$ auf der Fläche ordnen wir in einer »Bildebene« den Bildpunkt mit den rechtwinkligen Koordinaten $u_1 u_2$ zu. Die Formeln (5) stellen dann nicht nur die Fläche, sondern gleichzeitig eine bestimmte stetige *Abbildung* dieser Fläche auf die $u_1 u_2$-Ebene dar. Beispiele solcher ebenen Abbildungen krummer Flächenstücke sind jedermann in den geographischen Karten geläufig. Eine Kurve auf der Fläche ist mathematisch gegeben durch eine Parameterdarstellung

$$(7)\qquad u_1 = u_1(t), \qquad u_2 = u_2(t),$$

ein Flächenstück durch ein »mathematisches Gebiet« in den Variablen $u_1 u_2$, das mittels Ungleichungen zwischen u_1, u_2 charakterisiert werden muß; graphisch gesprochen also: durch die Bildkurve, bzw. das Bildgebiet in der $u_1 u_2$-Ebene. Bedeckt man die Bildebene nach Art des Millimeterpapiers mit einem Koordinatennetz, so überträgt sich dieses vermöge der Abbildung auf die krumme Fläche als ein aus kleinen parallelogrammatischen Maschen bestehendes Netz, das von den beiden Scharen von »Koordinatenlinien« $u_1 =$ konst., bzw. $u_2 =$ konst. gebildet wird. Wird dies Raster hinreichend fein genommen, so ermöglicht es einem Zeichner, jede in der Bildebene gegebene Figur auf die krumme Fläche zu übertragen.

Der Abstand ds zweier unendlichnaher Punkte auf der Fläche:

$$(u_1, u_2) \qquad \text{und} \qquad (u_1 + du_1, u_2 + du_2)$$

bestimmt sich aus

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2,$$

wenn man darin

$$(8)\qquad dx = \frac{\partial x}{\partial u_1} du_1 + \frac{\partial x}{\partial u_2} du_2$$

und entsprechende Ausdrücke für dy, dz einsetzt. Es ergibt sich für ds^2 eine quadratische Differentialform

$$(9)\qquad ds^2 = \sum_{i,k=1}^{2} g_{ik}\, du_i\, du_k \qquad (g_{ki} = g_{ik}),$$

deren Koeffizienten

$$g_{ik} = \frac{\partial x}{\partial u_i}\frac{\partial x}{\partial u_k} + \frac{\partial y}{\partial u_i}\frac{\partial y}{\partial u_k} + \frac{\partial z}{\partial u_i}\frac{\partial z}{\partial u_k}$$

im allgemeinen keine Konstante, sondern Funktionen von u_1, u_2 sind. Für die Parameterdarstellung (6) der Kugel findet man z. B.

$$(10) \qquad ds^2 = \frac{(1 + u_1^2 + u_2^2)(du_1^2 + du_2^2) - (u_1 du_1 + u_2 du_2)^2}{(1 + u_1^2 + u_2^2)^2}.$$

Gauß erkannte, daß diese metrische Fundamentalform bestimmend ist für die *Geometrie auf der Fläche*. Kurvenlängen, Winkel und die Größe gegebener Gebiete auf der Fläche hängen allein von ihr ab; die Geometrie auf zwei Flächen ist also dieselbe, wenn für sie bei geeigneter Parameterdarstellung die Koeffizienten g_{ik} der metrischen Fundamentalform übereinstimmen. Beweis: Die Länge einer beliebigen durch (7) gegebenen Kurve auf der Fläche wird geliefert durch das Integral

$$\int ds = \int \sqrt{\sum_{ik} g_{ik} \frac{du_i}{dt}\frac{du_k}{dt}} \cdot dt.$$

Fassen wir einen bestimmten Punkt $P^0 = (u_1^0, u_2^0)$ auf der Fläche ins Auge und benutzen für dessen unmittelbare Umgebung die relativen Koordinaten

$$u_i - u_i^0 = du_i; \qquad x - x^0 = dx, \quad y - y^0 = dy, \quad z - z^0 = dz,$$

so gilt um so genauer, je kleiner du_1, du_2, die Gleichung (8), in der die Werte der Ableitungen an der Stelle P^0 zu nehmen sind; wir sagen, sie gilt für »unendlichkleine« Werte du_1 und du_2. Fügen wir die analogen Gleichungen für dy, dz hinzu, so drücken sie aus, daß die unmittelbare Umgebung von P^0 eine Ebene ist und du_1, du_2 affine Koordinaten in ihr*). Demnach können wir in der unmittelbaren Umgebung von P^0 die Formeln der affinen Geometrie anwenden. Wir finden für den Winkel θ zweier Linienelemente oder infinitesimaler Verschiebungen mit den Komponenten du_1, du_2, bzw. δu_1, δu_2, wenn wir die zu (9) gehörige symmetrische Bilinearform

$$\sum_{ik} g_{ik} du_i \delta u_k \quad \text{mit} \quad Q(d\delta)$$

*) Dabei machen wir die Voraussetzung, daß die zweireihigen Determinanten, welche aus dem Koeffizientenschema dieser Gleichungen gebildet werden können,

$$\left| \begin{array}{ccc} \frac{\partial x}{\partial u_1} & \frac{\partial y}{\partial u_1} & \frac{\partial z}{\partial u_1} \\ \frac{\partial x}{\partial u_2} & \frac{\partial y}{\partial u_2} & \frac{\partial z}{\partial u_2} \end{array} \right|,$$

nicht alle drei verschwinden; diese Bedingung ist für die regulären Punkte der Fläche, in denen eine Tangentenebene existiert, erfüllt. Die drei Determinanten sind dann und nur dann identisch 0, wenn die Fläche in eine Kurve ausartet, nämlich die Funktionen x, y, z von u_1 und u_2 in Wahrheit nur von *einem* Parameter, einer Funktion von u_1 und u_2, abhängen.

bezeichnen:

$$\cos\theta = \frac{Q(d\delta)}{\sqrt{Q(dd)\,Q(\delta\delta)}};$$

und für den Flächeninhalt des unendlichkleinen Parallelogramms, das von diesen beiden Verschiebungen aufgespannt wird,

$$\sqrt{g}\begin{vmatrix} du_1 & du_2 \\ \delta u_1 & \delta u_2 \end{vmatrix},$$

wenn g die Determinante der g_{ik} bedeutet. Der Inhalt eines krummen Flächenstücks ist demnach gegeben durch das über das Bildgebiet zu erstreckende Integral

$$\iint \sqrt{g}\, du_1\, du_2 .$$

Damit ist die Gaußsche Behauptung erwiesen. Die Werte der erhaltenen Ausdrücke sind natürlich unabhängig von der Wahl der Parameterdarstellung; diese ihre Invarianz gegenüber beliebigen Transformationen der Parameter kann analytisch ohne weiteres bestätigt werden. Alle geometrischen Verhältnisse auf der Fläche können wir im »Bilde« verfolgen; die Geometrie in der Bildebene fällt mit der Geometrie auf der krummen Fläche zusammen, wenn wir nur übereinkommen, unter dem Abstand ds zweier unendlich naher Punkte nicht den durch die Pythagoreische Formel

$$ds^2 = du_1^2 + du_2^2$$

gelieferten Wert zu verstehen, sondern (9).

Die Geometrie auf der Fläche handelt von den inneren Maßverhältnissen der Fläche, die ihr unabhängig davon zukommen, in welcher Weise sie in den Raum eingebettet ist; es sind diejenigen Beziehungen, welche durch *Messen auf der Fläche selbst* festgestellt werden können. Gauß ging bei seinen flächentheoretischen Untersuchungen von der praktischen geodätischen Arbeit der Hannoverschen Landesvermessung aus. Daß die Erde keine Ebene ist, kann durch die Vermessung eines hinreichend großen Stücks der Erdoberfläche selbst ermittelt werden; wenn auch das einzelne Dreieck des Triangulationsnetzes so klein genommen wird, daß an ihm die Abweichung von der Ebene nicht in Betracht fällt, so könnten sich doch die einzelnen Dreiecke nicht in der Weise in der Ebene zu einem Netz zusammenschließen, wie sie es auf der Erdoberfläche tun. Um das noch etwas deutlicher darzutun, zeichne man auf einer Kugel vom Radius 1 (der Erdkugel) einen Kreis $\mathfrak{k}$ mit dem auf der Kugel gelegenen Mittelpunkt P; ferner die Radien dieses Kreises, d. h. die von P ausstrahlenden und an der Kreisperipherie endenden Bogen größter Kreise auf der Kugel $\left(\text{sie seien} < \frac{\pi}{2}\right)$. Durch Messen auf der Kugel kann ich nun feststellen: diese nach allen Richtungen ausgehenden Radien sind die Linien kleinster Länge, welche vom Punkte P zu der Kurve $\mathfrak{k}$ führen; sie haben

alle die gleiche Länge r; die Länge der geschlossenen Kurve $\mathfrak{k}$ ist $= s$. Läge nun eine Ebene vor, so folgte daraus, daß die »Radien« gerade Linien sind, die Kurve $\mathfrak{k}$ also ein Kreis, und es müßte $s = 2\pi r$ sein. Statt dessen aber findet sich, daß s kleiner ist, als es dieser Formel entspricht, nämlich $= 2\pi \sin r$. Damit ist durch Messung auf der Kugel festgestellt, daß sie keine Ebene ist. Nehme ich hingegen ein Papierblatt, auf das ich irgendwelche Figuren zeichne, und rolle es zusammen, so werde ich durch Ausmessen der Figuren auf dem zusammengerollten Blatt die gleichen Werte finden wie vorher, wenn das Zusammenrollen mit keinen Verzerrungen verbunden war: auf ihm gilt genau die gleiche Geometrie wie in der Ebene; durch seine geodätische Vermessung bin ich außerstande, festzustellen, daß es gekrümmt ist. So gilt allgemein auf zwei Flächen, die durch Verbiegung ohne Verzerrung auseinander hervorgehen, die gleiche Geometrie.

Daß auf der Kugel nicht die Geometrie der Ebene gilt, besagt, analytisch ausgedrückt: es ist unmöglich, die quadratische Differentialform (10) durch irgendeine Transformation

$$\begin{array}{ll|ll} u_1 &= u_1(u_1^* u_2^*) & u_1^* &= u_1^*(u_1 u_2) \\ u_2 &= u_2(u_1^* u_2^*) & u_2^* &= u_2^*(u_1 u_2) \end{array}$$

auf die Gestalt

$$(du_1^*)^2 + (du_2^*)^2$$

zu bringen. Zwar wissen wir, daß es an jeder Stelle möglich ist, durch eine lineare Transformation der Differentiale

$$du_i^* = \alpha_{i1} du_1 + \alpha_{i2} du_2 \qquad (i = 1, 2) \tag{11}$$

dies zu erzielen; aber es ist ausgeschlossen, die Transformation der Differentiale dabei an jeder Stelle so zu wählen, daß die Ausdrücke (11) für du_1^*, du_2^* *totale* Differentiale werden.

Krummlinige Koordinaten werden nicht nur in der Flächentheorie, sondern auch zur Behandlung *räumlicher Probleme* verwendet, namentlich in der mathematischen Physik, wo man häufig in die Notwendigkeit versetzt ist, sich mit dem Koordinatensystem vorgegebenen Körpern anzupassen; ich erinnere an die Zylinder-, Kugel- und elliptischen Koordinaten. Das Quadrat des Abstandes ds^2 zweier unendlich benachbarter Punkte im Raum wird bei Benutzung beliebiger Koordinaten $x_1 x_2 x_3$ stets durch eine quadratische Differentialform

$$\sum_{i,k=1}^{3} g_{ik}\, dx_i\, dx_k \tag{12}$$

ausgedrückt. Glauben wir an die Euklidische Geometrie, so sind wir überzeugt, daß jene Form sich durch Transformation in eine solche Gestalt überführen läßt, daß ihre Koeffizienten Konstante werden.

Nach diesen Vorbereitungen sind wir imstande, die Riemannschen Ideen, die von ihm in seinem Habilitationsvortrag »Über die Hypothesen, welche der Geometrie zugrunde liegen«[4]) in vollendeter Form entwickelt wurden, voll zu erfassen. Aus Kap. I ist zu ersehen, daß in einem vierdimensionalen Euklidischen Raum auf einem dreidimensionalen *linearen* Punktgebilde die Euklidische Geometrie gilt; aber krumme dreidimensionale Räume, die im vierdimensionalen Raum ebensogut existieren wie krumme Flächen im dreidimensionalen, sind von anderer Art. Ist es nicht möglich, daß unser dreidimensionaler Anschauungsraum ein solcher gekrümmter Raum ist? Freilich: er ist nicht eingebettet in einen vierdimensionalen; aber es könnte sein, daß seine inneren Maßverhältnisse solche sind, wie sie in einem »ebenen« Raum nicht stattfinden können; es könnte sein, daß eine sorgfältige geodätische Vermessung unseres Raumes in der gleichen Weise wie die geodätische Vermessung der Erdoberfläche ergäbe, daß er nicht eben ist. — Wir bleiben dabei, daß er eine dreidimensionale Mannigfaltigkeit ist; wir bleiben dabei, daß sich unendlichkleine Linienelemente unabhängig von ihrem Ort und ihrer Richtung messend miteinander vergleichen lassen und daß das Quadrat ihrer Länge, des Abstandes zweier unendlich benachbarter Punkte bei Benutzung beliebiger Koordinaten x_i durch eine quadratische Differentialform (12) gegeben wird. (Diese Voraussetzung hat in der Tat allgemein ihren guten Sinn; denn da jede Transformation von einem auf ein anderes Koordinatensystem *lineare* Transformationsformeln für die Koordinatendifferentiale nach sich zieht, geht dabei eine quadratische Differentialform immer wieder in eine quadratische Differentialform über.) Was wir aber nicht mehr voraussetzen, ist, daß sich diese Koordinaten insbesondere als affine Koordinaten so wählen lassen, daß die Koeffizienten g_{ik} der Fundamentalform konstant werden.

Der Übergang von der Euklidischen zur Riemannschen Geometrie beruht im Grunde auf dem gleichen Gedanken wie die Nahewirkungs-Physik. Durch die Beobachtung stellen wir z. B. fest (Ohmsches Gesetz), daß der in einem Leitungsdraht fließende Strom proportional ist zu der Potentialdifferenz am Anfang und Ende der Leitung. Aber wir sind überzeugt, daß wir nicht in diesem auf einen langen Draht sich beziehenden Messungsergebnis das allgemein gültige exakte Naturgesetz vor uns haben, sondern dieses aus jenem sich herleitet, indem wir das Ohmsche Gesetz, so wie es aus den Messungen abgelesen wird, auf ein *unendlichkleines* Drahtstück anwenden. Dann kommen wir zu jener Formulierung (Kap. I, S. 68), die der Maxwellschen Theorie zugrunde gelegt wird. Aus dem Differentialgesetz folgt rückwärts auf mathematischem Wege *unter Voraussetzung überall homogener Verhältnisse* das Integralgesetz, das wir direkt durch die Beobachtung feststellen. Genau so hier: Die Grundtatsache der Euklidischen Geometrie ist, daß das Quadrat der Entfernung zweier Punkte eine quadratische Form der relativen Koordinaten der beiden Punkte ist *(Pythagoreischer Lehrsatz)*. *Sehen wir aber dieses Gesetz nur*

dann als streng gültig an, wenn jene beiden Punkte unendlich benachbart sind, so kommen wir zur Riemannschen Geometrie: zugleich sind wir damit einer genaueren Festlegung des Koordinatenbegriffs überhoben, da das so gefaßte Pythagoreische Gesetz invariant ist gegenüber beliebigen Transformationen. Es entspricht der Übergang von der Euklidischen »Fern«- zur Riemannschen »Nahe«-Geometrie demjenigen von der Fernwirkungs- zur Nahewirkungs-Physik; die Riemannsche Geometrie ist die dem Geiste der Kontinuität gemäß formulierte Euklidische, sie nimmt aber durch diese Formulierung sogleich einen viel allgemeineren Charakter an. Die Euklidische Fern-Geometrie ist geschaffen für die Untersuchung der geraden Linie und der Ebene, an diesen Problemen hat sie sich orientiert; sobald man aber zur Infinitesimalgeometrie übergeht, ist es das Natürlichste und Vernünftigste, den infinitesimalen Ansatz Riemanns zugrunde zu legen: es wird dadurch keine Komplikation bedingt, und man ist vor unsachgemäßen, fern-geometrischen Überlegungen geschützt. Auch im Riemannschen Raum ist eine Fläche als zweidimensionale Mannigfaltigkeit durch eine Parameterdarstellung $x_i = x_i(u_1\, u_2)$ gegeben; setzen wir die daraus sich ergebenden Differentiale

$$dx_i = \frac{\partial x_i}{\partial u_1}\, du_1 + \frac{\partial x_i}{\partial u_2}\, du_2$$

in die metrische Fundamentalform (12) des Riemannschen Raumes ein, so bekommen wir für das Quadrat des Abstandes zweier unendlich benachbarter Flächenpunkte eine quadratische Differentialform von du_1, du_2 (wie im Euklidischen Raum): die Metrik des dreidimensionalen Riemannschen Raums überträgt sich unmittelbar auf jede in ihm gelegene Fläche und macht sie damit zu einem zweidimensionalen Riemannschen Raum. Während also bei Euklid der Raum von vornherein von viel speziellerer Natur angenommen ist als die in ihm möglichen Flächen, nämlich als eben, hat bei Riemann der Raumbegriff gerade denjenigen Grad der Allgemeinheit, der nötig ist, um diese Diskrepanz völlig zum Verschwinden zu bringen. — *Das Prinzip, die Welt aus ihrem Verhalten im Unendlichkleinen zu verstehen,* ist das treibende erkenntnistheoretische Motiv der Nahewirkungsphysik wie der Riemannschen Geometrie, ist aber auch das treibende Motiv in dem übrigen, vor allem auf die komplexe Funktionentheorie gerichteten grandiosen Lebenswerk Riemanns. Heute erscheint uns die Frage nach der Gültigkeit des »V. Postulats«, von dem die historische Entwicklung, an die Euklidischen »Elemente« anknüpfend, ausgegangen ist, nur als ein bis zu einem gewissen Grade zufälliger Ansatzpunkt. Die wahre Erkenntnis, zu der man sich erheben mußte, um über den Euklidischen Standpunkt hinauszugelangen, glauben wir, ist uns von Riemann aufgedeckt worden.

Wir müssen uns noch davon überzeugen, daß die Bolyai-Lobatschefskysche Geometrie so gut wie die Euklidische und die sphärische (auf die als eine Nicht-Euklidische Möglichkeit übrigens erst Riemann hingewiesen

hat) als spezielle Fälle in der Riemannschen enthalten sind. In der Tat, benutzen wir als Koordinaten eines Punktes der Bolyai-Lobatschefskyschen Ebene die rechtwinkligen Koordinaten $u_1 u_2$ jenes Bildpunktes, der ihm in dem Kleinschen Modell entspricht, so ergibt sich für den Abstand ds zweier unendlich benachbarter Punkte aus (1):

$$(13) \qquad ds^2 = \frac{(1 - u_1^2 - u_2^2)(du_1^2 + du_2^2) + (u_1 du_1 + u_2 du_2)^2}{(1 - u_1^2 - u_2^2)^2}.$$

Der Vergleich mit (10) bestätigt wiederum den Satz von Taurinus. Die metrische Fundamentalform des dreidimensionalen Nicht-Euklidischen Raumes lautet genau entsprechend.

Wenn wir im Euklidischen Raum eine krumme Fläche herstellen können, für die bei Benutzung geeigneter Gaußscher Koordinaten $u_1 u_2$ die Formel (13) gültig ist, so besteht auf ihr die Bolyai-Lobatschefskysche Geometrie. Solche Flächen kann man sich in der Tat verschaffen; die einfachste ist die Umdrehungsfläche der Traktrix. Die Traktrix ist eine ebene Kurve von der nebenstehenden Gestalt, mit einer Spitze und einer Asymptote; sie ist geometrisch dadurch charakterisiert, daß die Tangente vom Berührungspunkt bis zum Schnitt mit der Asymptote eine konstante Länge besitzt. Man lasse sie um ihre Asymptote rotieren: auf der entstehenden Drehfläche gilt die Nicht-Euklidische Geometrie. Dieses durch seine Anschaulichkeit ausgezeichnete Euklidische Modell derselben ist zuerst von Beltrami angegeben [5]. Es leidet freilich an gewissen Übelständen; es ist erstens (in dieser anschaulichen Form) auf die zweidimensionale Geometrie beschränkt, und zweitens realisiert jede der beiden Hälften der Umdrehungsfläche, in welche sie durch ihre scharfe Kante zerfällt, nur einen Teil der Nicht-Euklidischen Ebene. Von Hilbert wurde streng bewiesen, daß eine singularitätenfreie Fläche im Euklidischen Raum, welche die ganze Lobatschefskysche Ebene realisiert, nicht vorhanden sein kann [6]. Beide Übelstände besitzt das elementargeometrische Kleinsche Modell nicht.

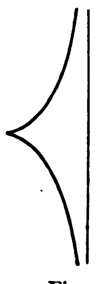


Fig. 5.

Bislang sind wir rein spekulativ vorgegangen und ganz in der Domäne des Mathematikers geblieben. Ein anderes ist aber die Widerspruchslosigkeit der Nicht-Euklidischen Geometrie, ein anderes *die Frage, ob sie oder die Euklidische im wirklichen Raume Gültigkeit besitzt.* Schon Gauß hat zur Prüfung dieser Frage das Dreieck Inselsberg, Brocken, Hoher Hagen (bei Göttingen) mit großer Sorgfalt gemessen, aber die Abweichung der Winkelsumme von 180° innerhalb der Fehlergrenzen gefunden. Lobatschefsky schloß aus dem geringen Betrag der Fixsternparallaxen, daß die Abweichung des wirklichen Raumes vom Euklidischen außerordentlich gering sein müsse. Auf philosophischer Seite ist der Standpunkt vertreten worden, daß durch empirische Beobachtungen die Gültigkeit oder Ungültigkeit der Euklidischen Geometrie nicht erwiesen werden könne.

6*

Und in der Tat muß zugestanden werden, daß bei allen solchen Beobachtungen wesentlich physikalische Voraussetzungen, wie etwa die, daß die Lichtstrahlen gerade Linien sind, und dgl., eine Rolle spielen. Wir finden damit aber lediglich eine schon oben gemachte Bemerkung bestätigt, daß nur das Ganze von Geometrie und Physik einer empirischen Nachprüfung fähig ist. Entscheidende Experimente sind also erst dann möglich, wenn nicht nur die Geometrie, sondern auch die Physik im Euklidischen *und* im allgemeinen Riemannschen Raum entwickelt ist. Wir werden bald sehen, daß es auf sehr einfache und völlig willkürlose Weise gelingt, beispielsweise die Gesetze des elektromagnetischen Feldes, die zunächst nur unter der Voraussetzung der Euklidischen Geometrie aufgestellt sind, auf den Riemannschen Raum zu übertragen. Ist dies aber geschehen, so kann sehr wohl die Erfahrung darüber entscheiden, ob der spezielle Euklidische Standpunkt aufrecht zu erhalten ist oder ob wir zu dem allgemeineren Riemannschen übergehen müssen. Wir sehen aber, daß für uns an dem Punkte, an dem wir jetzt stehen, diese Frage noch nicht spruchreif ist.

Zum Schluß stellen wir noch einmal die Grundlagen der Riemannschen Geometrie in geschlossener Formulierung und unter Abstreifung der speziellen Dimensionszahl $n = 3$ vor Augen.

Ein n-dimensionaler Riemannscher Raum ist eine n-dimensionale Mannigfaltigkeit; aber nicht eine beliebige, sondern eine solche, der durch eine positiv-definite quadratische Differentialform eine Maßbestimmung aufgeprägt ist. Die beiden Hauptgesetze, nach denen jene Form die Maßgrößen festlegt, sind die folgenden (die x_i bedeuten irgendwelche Koordinaten):

1. Ist g die Determinante der Koeffizienten der Fundamentalform, so ist die Größe irgend eines Raumstücks gegeben durch das Integral

$$\int \sqrt{g}\, dx_1 dx_2 \ldots dx_n, \tag{14}$$

das zu erstrecken ist über dasjenige mathematische Gebiet der Variablen x_i, welches dem Raumstück entspricht.

2. Bedeutet $Q(d\delta)$ die der quadratischen Fundamentalform entsprechende symmetrische Bilinearform zweier an derselben Stelle befindlichen Linienelemente d und δ, so ist der von ihnen gebildete Winkel θ zu berechnen aus

$$\cos\theta = \frac{Q(d\delta)}{\sqrt{Q(dd)\cdot Q(\delta\delta)}}. \tag{15}$$

Eine in dem n-dimensionalen Raum liegende m-dimensionale Mannigfaltigkeit $(1 \leqq m \leqq n)$ ist gegeben durch eine Parameterdarstellung:

$$x_i = x_i(u_1 u_2 \ldots u_m) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Aus der metrischen Fundamentalform des Raumes entsteht durch Einsetzen der Differentiale

$$dx_i = \frac{\partial x_i}{\partial u_1} du_1 + \frac{\partial x_i}{\partial u_2} du_2 + \cdots + \frac{\partial x_i}{\partial u_m} du_m$$

die metrische Fundamentalform dieser m-dimensionalen Mannigfaltigkeit; sie ist damit selber ein Riemannscher m-dimensionaler Raum, und die Berechnung der Größe eines beliebigen Stücks von ihr geschieht nach der auf sie übertragenen Formel (14). So kann die Länge von Linienstücken, der Inhalt von Flächenstücken usw. ermittelt werden.

§ 12. Fortsetzung. Dynamische Auffassung der Metrik.

Wir kehren noch einmal zur Flächentheorie im Euklidischen Raum zurück. Die *Krümmung* einer ebenen Kurve kann als Maß dafür, wie stark die Kurvennormalen divergieren, in folgender Weise definiert werden. Wir tragen den zur Kurve in einem beliebigen Punkte P senkrecht stehenden Vektor »Normale« von der Länge 1 von einem festen Punkt O aus ab: Op, und erhalten dadurch einen Bildpunkt p zu P auf dem Einheitskreis um O. Durchläuft P ein kleines Bogenstück Δs der Kurve, so wird der Bildpunkt p einen Bogen $\Delta \sigma$ jenes Kreises durchlaufen; $\Delta \sigma$ ist der ebene Winkel, welchen die in den sämtlichen Punkten des Kurvenbogens errichteten Normalen miteinander bilden.

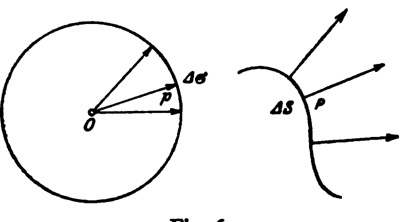


Fig. 6.

Der Limes des Quotienten $\frac{\Delta \sigma}{\Delta s}$ für ein Bogenstück Δs, das auf einen Punkt P zusammenschrumpft, ist die Krümmung in P. Ganz analog definiert Gauß die Krümmung einer Fläche als Maß der Divergenz ihrer Normalen. Anstelle des Einheitskreises um O tritt die Einheitskugel; einem kleinen Flächenstück do entspricht durch das gleiche Abbildungsprinzip ein Stück dieser Kugel $d\omega$; $d\omega$ ist gleich dem räumlichen Winkel, welchen die in den Punkten von do errichteten Normalen miteinander bilden. Das Verhältnis $\frac{d\omega}{do}$ in der Grenze für unendlichkleines do ist die *Gaußsche Krümmung. Gauß machte die wichtige Entdeckung, daß diese Krümmung durch die inneren Maßverhältnisse der Fläche allein bestimmt ist und aus den Koeffizienten der metrischen Fundamentalform als ein Differentialausdruck 2. Ordnung berechnet werden kann.* Die Krümmung bleibt demnach ungeändert, wenn man die Fläche verbiegt, ohne sie zu verzerren. Damit war auf geometrischem Wege eine *Differentialinvariante der quadratischen Differentialformen* von zwei Variablen entdeckt, eine Größe nämlich, die aus den Koeffizienten der Differentialform in solcher Weise gebildet ist, daß sie für zwei Differentialformen, die durch Transformation auseinander hervorgehen (und für Argumentpaare, die sich durch die Transformation entsprechen) gleiche Werte besitzt.

Riemann gelang es, den Begriff der Krümmung auf quadratische

Differentialformen von drei und mehr Variablen zu übertragen; es stellte sich heraus, daß sie dann kein Skalar mehr ist, sondern ein Tensor (mit dem wir uns in § 15 dieses Kapitels beschäftigen werden). Genauer verhält es sich so, daß ein Riemannscher Raum an jeder Stelle in jeder Flächenrichtung eine bestimmte Krümmung besitzt. Der Euklidische Raum ist dadurch charakterisiert, daß er überall und in jeder Richtung die Krümmung 0 besitzt. Für die Bolyai-Lobatschefskysche wie für die sphärische Geometrie aber besitzt die Krümmung einen von Ort und Flächenrichtung unabhängigen konstanten Wert a; und zwar einen positiven im Falle der sphärischen, einen negativen im Falle der Bolyai-Lobatschefskyschen Geometrie (sie kann also, wenn die Einheit des Längenmaßes geeignet gewählt wird, $= \pm 1$ angenommen werden). Hat der n-dimensionale Raum die konstante Krümmung a, so hat seine metrische Fundamentalform bei Einführung geeigneter Koordinaten x_i notwendig die Gestalt

$$\frac{\left(1 + a\sum_i x_i^2\right)\cdot\sum_i dx_i^2 - a\left(\sum_i x_i\,dx_i\right)^2}{\left(1 + a\sum_i x_i^2\right)^2};$$

sie ist also vollständig eindeutig bestimmt. Ist der Raum überall in allen Richtungen homogen, so muß seine Krümmung eine Konstante sein und seine metrische Fundamentalform demnach die angegebene Gestalt besitzen: ein solcher Raum ist notwendig Euklidisch, sphärisch oder Lobatschefskysch. Unter diesen Umständen haben nicht nur die Linienelemente eine von Ort und Richtung unabhängige Existenz, sondern eine beliebige, endlich ausgedehnte Figur kann kongruent ohne Änderung ihrer Maßverhältnisse an einen beliebigen Ort verpflanzt und in eine beliebige Richtung gestellt werden, Damit kehren wir zu dem Begriff der kongruenten Abbildung zurück, von dem unsere Betrachtungen über den Raum in § 1 ihren Ausgang nahmen. Innerhalb der drei möglichen Fälle ist der Euklidische dadurch charakterisiert, daß sich aus der Gruppe der kongruenten Abbildungen die Gruppe der Translationen mit den besonderen, in § 1 auseinandergesetzten Eigenschaften heraushebt. Die hier zusammengestellten Tatsachen sind in Riemanns Vortrag kurz erwähnt, von Christoffel, Lipschitz, Helmholtz und Sophus Lie eingehender begründet worden [7].

Der Raum ist Form der Erscheinungen und, sofern er das ist, notwendig homogen. Damit scheint es, als ob aus der ganzen Fülle der möglichen Geometrien, welche der Riemannsche Begriff umfaßt, von vornherein nur die erwähnten drei speziellen Fälle in Betracht kämen und alle übrigen als bedeutungslos unbesehen fallen gelassen werden müßten: parturiunt montes, nascetur ridiculus mus! Riemann dachte darüber anders, die Schlußworte seines Vortrags geben darüber Auskunft. Sie konnten von seinen Zeitgenossen in ihrer Tragweite nicht verstanden werden und sind

damals so gut wie ungehört verhallt (nur aus den Schriften von W. K. Clifford klingt uns ein einsames Echo entgegen). Erst heute, nachdem uns Einstein durch seine Gravitationstheorie die Augen geöffnet hat, sehen wir, was eigentlich dahinter steckt. Zu ihrem Verständnis bemerke ich vorweg, daß Riemann dort den *kontinuierlichen* Mannigfaltigkeiten die *diskreten*, aus einzelnen isolierten Elementen bestehenden gegenüberstellt. Das Maß eines jeden Teiles einer solchen Mannigfaltigkeit ist durch die *Anzahl* der zu ihm gehörigen Elemente gegeben. So trägt eine diskrete Mannigfaltigkeit zufolge des Anzahlbegriffs das Prinzip ihrer Maßbestimmung, wie Riemann sagt, a priori in sich. Nun zu Riemanns eigenen Worten:

»Die Frage über die Gültigkeit der Voraussetzungen der Geometrie im Unendlichkleinen hängt zusammen mit der Frage nach dem innern Grunde der Maßverhältnisse des Raumes. Bei dieser Frage, welche wohl noch zur Lehre vom Raum gerechnet werden darf, kommt die obige Bemerkung zur Anwendung, daß bei einer diskreten Mannigfaltigkeit das Prinzip der Maßverhältnisse schon in dem Begriffe dieser Mannigfaltigkeit enthalten ist, bei einer stetigen aber anders woher hinzukommen muß. Es muß also entweder das dem Raume zugrunde liegende Wirkliche eine diskrete Mannigfaltigkeit bilden, oder der Grund der Maßverhältnisse außerhalb, *in darauf wirkenden bindenden Kräften*, gesucht werden.

»Die Entscheidung dieser Fragen kann nur gefunden werden, indem man von der bisherigen durch die Erfahrung bewährten Auffassung der Erscheinungen, wozu Newton den Grund gelegt, ausgeht und diese, durch Tatsachen, die sich aus ihr nicht erklären lassen, getrieben, allmählich umarbeitet; solche Untersuchungen, welche wie die hier geführte von allgemeinen Begriffen ausgehen, können nur dazu dienen, daß diese Arbeit nicht durch die Beschränktheit der Begriffe gehindert und der Fortschritt im Erkennen des Zusammenhangs der Dinge nicht durch überlieferte Vorurteile gehemmt wird.

»Es führt dies hinüber in das Gebiet einer anderen Wissenschaft, in das Gebiet der Physik, welches wohl die Natur der heutigen Veranlassung nicht zu betreten erlaubt.«

Sehen wir von der ersten Möglichkeit ab, es könnte »das dem Raume zugrunde liegende Wirkliche eine diskrete Mannigfaltigkeit bilden« — obschon wir es durchaus nicht abschwören wollen, heute im Angesicht der Quantentheorie weniger denn je, daß darin vielleicht einmal die endgültige Lösung des Raumproblems gefunden werden kann —, so leugnet Riemann also, was bis dahin immer die Meinung gewesen war, daß die Metrik des Raumes von vornherein unabhängig von den physikalischen Vorgängen, deren Schauplatz er abgibt, festgelegt sei und das Reale in diesen metrischen Raum wie in eine fertige Mietskaserne einziehe; *er behauptet vielmehr, daß der Raum an sich nichts weiter als eine völlig formlose dreidimensionale Mannigfaltigkeit ist und erst der den Raum erfüllende materiale Gehalt ihn gestaltet und seine Maßverhältnisse be-*

stimmt. Es bleibt die Aufgabe, zu ermitteln, nach welchen Gesetzen dies geschieht; jedenfalls aber wird sich die metrische Fundamentalform im Laufe der Zeit ändern, wie sich das Materiale in der Welt ändert. Die Möglichkeit der Ortsversetzung eines Körpers ohne Änderung seiner Maßverhältnisse ist zurückgewonnen, wenn der Körper das von ihm erzeugte »metrische Feld« (welches durch die metrische Fundamentalform dargestellt wird) bei der Bewegung mitnimmt; genau so wie eine Masse, die unter dem Einfluß eines von ihr selbst erzeugten Kraftfeldes eine Gleichgewichtsgestalt angenommen hat, sich deformieren müßte, wenn man das Kraftfeld festhalten und die Masse an eine andere Stelle desselben schieben könnte, in Wahrheit aber bei (hinreichend langsamer) Bewegung ihre Gestalt behält, da sie das von ihr selbst erzeugte Kraftfeld mitnimmt. Wir wollen den kühnen Gedanken Riemanns von dem durch die Materie erzeugten metrischen Felde etwas genauer erläutern und zeigen, daß, wenn diese Ansicht zutrifft, irgend zwei Raumstücke, die durch stetige Deformation ineinander übergeführt werden können, als kongruent bezeichnet werden müssen in dem von uns zugrunde gelegten Sinne, daß derselbe materiale Gehalt so gut das eine Raumstück wie das andere erfüllen kann.

Zur Vereinfachung unserer prinzipiellen Auseinandersetzung nehmen wir an, daß das Materiale allein durch skalare Zustandsgrößen wie Massendichte, Ladungsdichte usw. beschrieben werden kann. Wir fassen einen bestimmten Moment ins Auge; in ihm wird die Ladungsdichte ϱ z. B. bei Zugrundelegung eines bestimmten räumlichen Koordinatensystems eine bestimmte Funktion $f(x_1\, x_2\, x_3)$ der Koordinaten x_i sein, bei Benutzung eines andern Koordinatensystems x_i^* aber durch eine andere Funktion $f^*(x_1^*\, x_2^*\, x_3^*)$ dargestellt werden. — Eine Zwischenbemerkung. Es entspringt bei Anfängern daraus oft Verwirrung, daß sie nicht beachten: in der mathematischen Literatur werden die Buchstaben durchweg zur Bezeichnung der *Funktionen* benutzt, in der physikalischen und auch mathematisch-physikalischen durchweg zur Bezeichnung der »*Größen*«. So gebraucht man in der Thermodynamik etwa für die Energie eines Gases einen bestimmten Buchstaben, sagen wir E, einerlei ob man sie als Funktion von Druck p und Temperatur ϑ oder als Funktion des Volumens v und der Temperatur ϑ auffaßt. Der Mathematiker aber schreibt mit zwei verschiedenen Zeichen:

$$E = \Phi(p,\ \vartheta) = \Psi(v,\ \vartheta).$$

Die partiellen Ableitungen $\frac{\partial \Phi}{\partial \vartheta}$, $\frac{\partial \Psi}{\partial \vartheta}$, die eine ganz verschiedene Bedeutung haben, treten infolgedessen in den Physikbüchern unter der gemeinsamen Bezeichnung $\frac{\partial E}{\partial \vartheta}$ auf; es muß dann aber durch einen angehängten Index (nach dem Vorgang von Boltzmann) oder durch hinzugefügte Textworte angegeben werden, daß in einem Falle bei der Differentiation p,

im andern Falle v konstant gehalten wird. Die mathematische Symbolik ist ohne solchen Zusatz eindeutig*). — Wir legen weiter, obschon sich die Dinge in Wirklichkeit komplizierter verhalten, eine möglichst einfache geometrische Optik zugrunde, deren Grundgesetz besagt: der Lichtstrahl von einem Licht aussendenden Punkt M zu einem Beobachter in P ist eine »geodätische« Linie, die unter allen Verbindungslinien von M mit P die geringste Länge besitzt; von der endlichen Ausbreitungsgeschwindigkeit des Lichtes sehen wir ganz ab. Dem auffassenden Bewußtsein schreiben wir lediglich ein optisches Wahrnehmungsvermögen zu und vereinfachen es uns zu einem »Punktauge«, das die Richtungsunterschiede der auftreffenden Lichtstrahlen, welche durch die aus (15) zu bestimmenden Winkel θ gegeben werden, unmittelbar wahrnimmt und dadurch ein *Richtungsbild* der umgebenden Gegenstände gewinnt (wir ignorieren die Qualitäten der Farbe). Nicht nur die Wirkung der physischen Dinge aufeinander, sondern auch die psychophysische Wechselwirkung wird von dem Gesetz der Kontinuität beherrscht: die Richtung, in der wir Gegenstände wahrnehmen, ist nicht durch deren Ort bestimmt, sondern durch die Richtung des von ihnen auf der Netzhaut auftreffenden Lichtstrahles; also durch den Zustand des optischen Feldes in der unmittelbaren Berührung mit dem Leibe jenes rätselhaften Realen, in dessen Wesen es liegt, daß ihm eine gegenständliche Welt in Bewußtseinserlebnissen »erscheint«. Daß aber ein materialer Gehalt G derselbe ist wie der materiale Gehalt G', kann offenbar nichts anderes heißen, als daß zu jedem Standpunkt P gegenüber G ein Standpunkt P' gegenüber G' gehört (und umgekehrt) derart, daß ein Beobachter in P' von G' das gleiche Richtungsbild empfängt, wie es ein Beobachter in P von G erhält.

Wir legen ein bestimmtes Koordinatensystem x_i zugrunde; die skalaren Zustandsgrößen wie die Elektrizitätsdichte ϱ stellen sich dar durch bestimmte Funktionen

$$\varrho = f(x_1 x_2 x_3),$$

die metrische Fundamentalform sei

$$\sum_{i,k=1}^{3} g_{ik}\, dx_i\, dx_k,$$

wo die g_{ik} gleichfalls (im Sinne der »mathematischen« Bezeichnungsweise) bestimmte Funktionen von $x_1 x_2 x_3$ bedeuten. Ferner sei irgend eine stetige Abbildung des Raumes auf sich selber gegeben, durch die jedem Punkt P ein Punkt P' zugeordnet ist. Unter Benutzung des vorliegenden Koordinatensystems und der Bezeichnungen

$$P = (x_1 x_2 x_3), \qquad P' = (x'_1 x'_2 x'_3)$$

werde diese Abbildung dargestellt durch

$$x'_i = \varphi_i(x_1 x_2 x_3). \tag{16}$$

*) Es soll hier natürlich an der »physikalischen« Bezeichnungsart durchaus keine Kritik geübt werden; sie ist den Zwecken der mit *Größen* operierenden Physik völlig angemessen.

Durch sie gehe ein Raumstück $\mathfrak{S}$ über in $\mathfrak{S}'$; ich will zeigen, daß in dem erläuterten Sinne $\mathfrak{S}'$ kongruent $\mathfrak{S}$ ist, falls Riemanns Ansicht zutrifft.

Ich benutze ein zweites Koordinatensystem, indem ich dem Punkte P die durch (16) gegebenen Zahlen x_i' als seine Koordination zuordne; (16) sind dann die Transformationsformeln. Derjenige mathematische Bereich in drei Variablen, als welcher sich $\mathfrak{S}$ in den Koordinaten x' darstellt, ist identisch mit demjenigen, als welcher sich $\mathfrak{S}'$ in den Koordinaten x darstellt. Ein beliebiger Punkt P hat in x' die gleichen Koordinaten wie P' in x. Ich denke mir nun den Raum auf eine zweite Weise durch einen materialen Gehalt erfüllt, und zwar so, wie es durch die Formeln

$$\varrho = f(x_1' x_2' x_3') \quad \text{im Punkte } P$$

und die analogen für die übrigen skalaren Größen dargestellt wird. Wenn die Maßbestimmung des Raumes unabhängig von dem erfüllenden Materialen vorgegeben ist, wird die metrische Fundamentalform wie bei der ersten Erfüllung den Ausdruck haben:

$$\sum_{ik} g_{ik}\, dx_i\, dx_k = \sum_{ik} g_{ik}'(x_1' x_2' x_3')\, dx_i'\, dx_k';$$

dabei ist auf der rechten Seite die Transformation auf das zweite Koordinatensystem vollzogen. Wenn aber die Maßverhältnisse durch den materialen Gehalt bestimmt werden — und wir wollen jetzt mit Riemann annehmen, daß sich die Sache so verhält —, so wird, da die zweite Erfüllung sich genau so in den Koordinaten x' ausdrückt wie die erste in den Koordinaten x, bei dieser zweiten Erfüllung die metrische Fundamentalform lauten:

$$\sum_{ik} g_{ik}(x_1' x_2' x_3')\, dx_i'\, dx_k'.$$

Nach unserem Prinzip der geometrischen Optik wird dann einem Beobachter in P' der im Raumstück $\mathfrak{S}'$ bei der ersten Erfüllung vorhandene Gehalt genau so erscheinen wie einem Beobachter in P das gemäß der zweiten Erfüllung im Raumstück $\mathfrak{S}$ vorhandene Materiale. Trifft jedoch die alte »Mietskasernen«-Auffassung zu, so ist das natürlich nicht der Fall.

Die einfache Tatsache, daß ich eine Plastelinkugel in meiner Hand zu einer beliebigen Mißgestalt zerdrücken kann, die ganz anders aussieht als eine Kugel, scheint den Riemannschen Standpunkt ad absurdum zu führen. Dies ist jedoch nicht beweisend; denn es wird wohl, wenn Riemann recht hat, u. a. eine ganz andere Deformation der inneren atomistischen Struktur des Plastelins nötig sein, als ich durch meine Hand bewirken kann, und eine Umordnung aller Massen im Universum, damit die verdrückte Gestalt einem Beobachter von allen Seiten als kugelförmig erscheint. Die Sache ist eben die, daß einem Raumstück an sich überhaupt keine visuelle Gestalt zukommt, sondern die letztere von dem die Welt erfüllenden materiellen Gehalt abhängt, und zwar so, daß ich durch eine geeignete Erfüllung ihm jede beliebige visuelle Gestalt erteilen kann. Dafür kann ich dann auch an irgend zwei *verschiedenen* Raumstücken durch geeignete

Erfüllung die *gleiche* visuelle Gestalt hervorzaubern. Einstein hat dem Riemannschen Gedanken zum Siege verholfen (ohne freilich direkt durch Riemann beeinflußt zu sein); von dem durch Einstein gewonnenen Standpunkt rückschauend aber erkennen wir, daß aus diesem Gedanken eine gültige Theorie erst entspringen konnte, nachdem die *Zeit* als vierte zu den drei Raumdimensionen in solcher Weise hinzugetreten war, wie es die sog. spezielle Relativitätstheorie lehrt. Da der Begriff »Kongruenz« nach Riemann überhaupt zu keiner Metrik führt, auch nicht zu der durch eine quadratische Differentialform geregelten allgemeinen Riemannschen Metrik, so muß in der Tat »der innere Grund für die Maßverhältnisse« ganz wo anders gesucht werden. Er liegt nach Einstein in den »bindenden Kräften« der *Gravitation*. In der Einsteinschen Theorie (Kap. IV) spielen die Koeffizienten g_{ik} der metrischen Fundamentalform die gleiche Rolle wie in der Newtonschen Gravitationstheorie das Gravitationspotential; die Gesetze, nach denen das raumerfüllende Materiale die Metrik bestimmt, sind die Gravitationsgesetze. Das Gravitationsfeld bewirkt ein solches Verhalten der Lichtstrahlen und der »starren« Körper, die wir als Maßstäbe verwenden, daß sich, wenn wir die Maßstäbe und Lichtstrahlen in gewohnter Weise zur Ausmessung von Gegenständen benutzen, eine Maßgeometrie als gültig erweist, die in den der Beobachtung zugänglichen Gebieten sehr wenig von der Euklidischen abweicht. Die Maßverhältnisse kommen aber nicht auf Rechnung des Raumes als Form der Erscheinungen, sondern auf Rechnung des durch das Gravitationsfeld bestimmten physikalischen Verhaltens von Maßstäben und Lichtstrahlen.

Nach den durch Riemann gewonnenen Erkenntnissen machten sich die Mathematiker an den formalen Ausbau seines geometrischen Gedankensystems; Christoffel, Ricci, Levi-Civita nahmen daran vor allem teil[8]). Die eigentliche Weiterführung hatte er aber mit den letzten Worten deutlich genug in die Hände eines nach ihm kommenden, seinem mathematischen ebenbürtigen physikalischen Genies gelegt. Nach 70 Jahren ist das von ihm Prophezeite durch Einstein in Erfüllung gegangen.

Bei der durch Einsteins große Konsequenzen angeregten erneuten Prüfung der mathematischen Grundlagen ergab sich dem Verf. die Bemerkung, daß die Riemannsche Geometrie das Ideal einer reinen Infinitesimalgeometrie erst zur Hälfte erreicht; es gilt, noch ein letztes ferngeometrisches Element auszuscheiden, das ihr von ihrer Euklidischen Vergangenheit her anhaftet. Riemann setzt nämlich voraus, daß man irgend zwei Linienelemente auch an *verschiedenen* Stellen des Raumes messend miteinander vergleichen kann; *die Möglichkeit eines solchen Fernvergleichs kann in einer reinen Nahegeometrie nicht zugestanden werden*; es ist nur ein Prinzip zulässig, das die Übertragung einer Maßstrecke von einem Punkte nach den unendlich benachbarten ermöglicht.

Nach diesen vorbereitenden Bemerkungen gehen wir jetzt an den systematischen Aufbau der reinen Infinitesimalgeometrie heran[9]), der sich naturgemäß in drei Stockwerken vollziehen wird: vom jeder näheren Bestimmung baren *Kontinuum* über die *affin zusammenhängende Mannigfal-*

tigkeit zum *metrischen Raum.* Diese Theorie, in der, wie ich glaube, eine große Gedankenentwicklung ihr Ziel erreicht und das Ergebnis derselben seine endgültige Gestalt gewonnen hat, ist eine wirkliche *Geometrie*, eine Lehre vom *Raum selbst*, und nicht bloß wie die Geometrie des Euklid und fast alles, was sonst unter dem Namen Geometrie betrieben wird, eine Lehre von den im Raume möglichen Gebilden.

§ 13. Tensoren und Tensordichten in einer beliebigen Mannigfaltigkeit.

n dimensionale Mannigfaltigkeit. Dem eben skizzierten Aufbau gemäß setzen wir vom Raume zunächst nur voraus, daß er ein n dimensionales Kontinuum ist. Er läßt sich danach auf n Koordinaten $x_1 x_2 \dots x_n$ beziehen, deren jede in jedem Punkt der Mannigfaltigkeit einen bestimmten Zahlwert besitzt; verschiedenen Punkten entsprechen verschiedene Wertsysteme der Koordinaten. Ist $\bar{x}_1 \bar{x}_2 \dots \bar{x}_n$ ein zweites System von Koordinaten, so bestehen zwischen den x- und den $\bar{x}$-Koordinaten desselben willkürlichen Punktes Beziehungen

$$x_i = f_i(\bar{x}_1 \bar{x}_2 \dots \bar{x}_n) \qquad (i = 1, 2, \dots, n), \tag{17}$$

die durch gewisse Funktionen f_i vermittelt werden; von ihnen setzen wir nicht nur voraus, daß sie stetig sind, sondern auch, daß sie stetige Ableitungen

$$\alpha^i_k = \frac{\partial f_i}{\partial \bar{x}_k}$$

besitzen, deren Determinante nicht verschwindet. Die letzte Bedingung ist notwendig und hinreichend, damit im Unendlichkleinen die affine Geometrie gilt, damit nämlich zwischen den Koordinatendifferentialen in beiden Systemen umkehrbare lineare Beziehungen statthaben:

$$dx_i = \sum_k \alpha^i_k \, d\bar{x}_k. \tag{18}$$

Die Existenz und Stetigkeit höherer Ableitungen nehmen wir an, wo wir ihrer im Laufe der Untersuchung bedürfen. Auf jeden Fall hat also der Begriff der stetigen und stetig differentiierbaren Ortsfunktion, ev. auch der 2, 3, ... mal stetig differentiierbaren einen invarianten, vom Koordinatensystem unabhängigen Sinn; die Koordinaten selber sind derartige Funktionen.

Begriff des Tensors. Die relativen Koordinaten dx_i eines zu dem Punkte $P = (x_i)$ unendlich benachbarten Punktes $P' = (x_i + dx_i)$ sind die Komponenten eines *Linienelementes* in P oder einer *infinitesimalen Verschiebung* $\overrightarrow{PP'}$ von P. Bei Übergang zu einem anderen Koordinatensystem gelten für diese Komponenten die Formeln (18), in denen α^i_k die Werte der betreffenden Ableitungen im Punkte P bedeuten. Die infinitesimalen Verschiebungen werden für die Entwicklung des Tensorkalküls die gleiche Rolle übernehmen wie die Verschiebungen in Kap. I. Es ist aber zu beachten, daß hier *eine Verschiebung wesentlich an einen Punkt*

P gebunden ist, daß es keinen Sinn hat, von den infinitesimalen Verschiebungen zweier verschiedener Punkte zu sagen, sie seien gleich oder ungleich. Man könnte ja freilich auf die Festsetzung verfallen, infinitesimale Verschiebungen zweier Punkte gleich zu nennen, wenn sie dieselben Komponenten haben; aber aus dem Umstand, daß die α^i_k in (18) keine Konstante sind, geht hervor, daß, wenn dies in einem Koordinatensystem der Fall ist, es in einem andern Koordinatensystem keineswegs zu gelten braucht. Wir können demnach nur von der infinitesimalen Verschiebung eines *Punktes*, nicht aber wie in Kap. I. des ganzen Raumes sprechen; infolgedessen auch nicht von einem Vektor oder Tensor schlechthin, sondern von einem *Vektor* oder *Tensor in einem Punkte P.* Ein Tensor in P ist eine vom Koordinatensystem, auf das man die Umgebung von P bezieht, abhängige Linearform mehrerer Reihen von Variablen, wenn jene Abhängigkeit von folgender Art ist: die Ausdrücke der Linearform in irgend zwei Koordinatensystemen x und $\bar{x}$ gehen ineinander über, wenn man gewisse der Variablenreihen (die mit oberen Indizes) kogredient, die andern (mit untern Indizes kontragredient zu den Differentialen dx_i transformiert, die ersteren also nach der Gleichung

$$(19) \qquad \xi^i = \sum_k \alpha^i_k \bar{\xi}^k, \quad \text{die zweiten nach} \quad \bar{\xi}_i = \sum_k \alpha^k_i \xi_k.$$

Unter α^i_k sind dabei die Werte dieser Ableitungen *im Punkte P* zu verstehen. Die Koeffizienten der Linearform heißen die Komponenten des Tensors in dem betreffenden Koordinatensystem; sie sind kovariant in denjenigen Indizes, die zu den mit oberen Indizes behafteten Variablen gehören, kontravariant in den übrigen. — Die Möglichkeit des Tensorbegriffs beruht auf dem Umstande, daß der Übergang von einem zum andern Koordinatensystem für die Differentiale in einer *linearen* Transformation sich ausdrückt. Es wird hier Gebrauch gemacht von dem überaus fruchtbaren mathematischen Gedanken, ein Problem durch Rückgang aufs Unendlichkleine zu »linearisieren«. Die ganze *Tensoralgebra*, durch deren Operationen lediglich Tensoren *im selben Punkte P* miteinander zu verknüpfen sind, *kann jetzt völlig ungeändert aus Kap. I herübergenommen werden.* Auch hier wollen wir Tensoren 1. Stufe *Vektoren* nennen. Es gibt kontravariante und kovariante Vektoren; wo das Wort Vektor ohne näheren Zusatz gebraucht wird, ist darunter stets ein kontravarianter Vektor zu verstehen. Unendlichkleine Größen dieser Art sind die Linienelemente in P. Mit jedem Koordinatensystem sind n »Einheitsvektoren« $\mathfrak{e}_i$ in P verbunden, nämlich diejenigen, welche in dem betreffenden Koordinatensystem die Komponenten

$$\begin{array}{c|l} \mathfrak{e}_1 & 1, 0, 0, \ldots, 0 \\ \mathfrak{e}_2 & 0, 1, 0, \ldots, 0 \\ \cdot\cdot & \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot \\ \mathfrak{e}_n & 0, 0, 0, \ldots, 1 \end{array}$$

besitzen. Aus ihnen läßt sich jeder Vektor $\mathfrak{x}$ in P linear zusammensetzen; denn sind ξ^i seine Komponenten, so gilt

$$\mathfrak{x} = \xi^1 \mathfrak{e}_1 + \xi^2 \mathfrak{e}_2 + \cdots + \xi^n \mathfrak{e}_n .$$

Die Einheitsvektoren $\bar{\mathfrak{e}}_i$ eines andern Koordinatensystems $\bar{x}$ gehen aus den $\mathfrak{e}_i$ nach den Gleichungen hervor

$$\bar{\mathfrak{e}}_i = \sum_k \alpha_i^k \mathfrak{e}_k .$$

Die Möglichkeit des Übergangs von kovarianten zu kontravarianten Komponenten eines Tensors kommt natürlich hier nicht in Frage. Je zwei (voneinander linear unabhängige) Linienelemente mit den Komponenten dx_i, δx_i spannen ein *Flächenelement* auf mit den Komponenten

$$dx_i \delta x_k - dx_k \delta x_i = \Delta x_{ik} ,$$

je drei solche Linienelemente ein dreidimensionales Raumelement, usf. Invariante Differentialformen, die je einem willkürlichen Linienelement, bzw. Flächenelement, usw. in linearer Weise eine Zahl zuordnen, sind »lineare Tensoren« (= kovariante schiefsymmetrische Tensoren, siehe § 7). Die alte Festsetzung über das Fortlassen von Summenzeichen wird beibehalten.

Begriff der Kurve. Ist jedem Wert eines Parameters s ein Punkt $P = P(s)$ in stetiger Weise zugeordnet, so ist, wenn wir s als Zeit deuten, damit eine »Bewegung« gegeben; wir wollen diesen Namen in Ermanglung eines andern Ausdrucks in rein mathematischem Sinne auch dann anwenden, wenn wir uns einer solchen Deutung des Parameters s enthalten. Bei Benutzung eines bestimmten Koordinatensystems erhalten wir eine Darstellung

$$x_i = x_i(s) \tag{20}$$

der Bewegung durch n stetige Funktionen $x_i(s)$, von denen wir annehmen, daß sie nicht nur stetig, sondern stetig differentiierbar sind. Beim Übergang vom Parameterwert s zu $s + ds$ erfährt der zugehörige Punkt P eine infinitesimale Verschiebung mit den Komponenten dx_i. Dividieren wir diesen Vektor in P durch ds, so erhalten wir die »*Geschwindigkeit*«, einen Vektor in P mit den Komponenten $\frac{dx_i}{ds} = u^i$. Zugleich ist (20) eine Parameterdarstellung der *Bahnkurve* der Bewegung. Zwei Bewegungen beschreiben dann und nur dann dieselbe *Kurve*, wenn die eine Bewegung aus der andern dadurch hervorgeht, daß man auf den Parameter s eine Transformation ausübt $s = \omega(\bar{s})$, die durch eine stetige (und stetig differentiierbare) monotone Funktion ω vermittelt wird. Für die Kurve sind in einem Punkte nicht die Geschwindigkeitskomponenten selber, sondern nur ihr (die *Richtung* der Kurve kennzeichnendes) Verhältnis ist bestimmt.

Tensoranalysis. Ein *Tensorfeld* gewisser Art ist in einem Raumgebiet gegeben, wenn jedem Punkt P dieses Gebiets ein *Tensor der betreffenden Art in P* zugeordnet ist. Relativ zu einem Koordinatensystem erscheinen

die Komponenten des Tensorfeldes als bestimmte Funktionen der Koordinaten des variablen »Aufpunktes« P; wir setzen sie als stetig und stetig differentiierbar voraus. Die in Kap. I, § 8 entwickelte Tensoranalysis läßt sich auf ein beliebiges Kontinuum nicht ungeändert übertragen. Bei Konstruktion des allgemeinen Prozesses der Differentiation benutzten wir nämlich damals willkürliche kovariante und kontravariante Vektoren, deren Komponenten *vom Orte unabhängig* waren. Diese Bedingung ist wohl gegenüber linearen, nicht aber gegenüber beliebigen Transformationen invariant, da bei solchen die α_k^i keine Konstante sind. In einer beliebigen Mannigfaltigkeit läßt sich infolgedessen, wie wir jetzt zeigen wollen, nur die *Analysis der linearen Tensorfelder* begründen. Aus einem Skalarfeld f entspringt auch hier, unabhängig vom Koordinatensystem, durch Differentiation ein lineares Tensorfeld 1. Stufe mit den Komponenten

$$f_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}; \tag{21}$$

aus einem linearen Tensorfeld 1. Stufe f_i ein solches 2. Stufe:

$$f_{ik} = \frac{\partial f_i}{\partial x_k} - \frac{\partial f_k}{\partial x_i}; \tag{22}$$

aus einem solchen 2. Stufe f_{ik} ein lineares Tensorfeld 3. Stufe:

$$f_{ikl} = \frac{\partial f_{kl}}{\partial x_i} + \frac{\partial f_{li}}{\partial x_k} + \frac{\partial f_{ik}}{\partial x_l}; \tag{23}$$

usf.

Ist φ ein gegebenes Skalarfeld im Raum und bedeuten x_i und $\bar{x}_i$ irgend zwei Koordinatensysteme, so wird in dem einen und andern das Skalarfeld sich durch eine Funktion der x_i bzw. $\bar{x}_i$ darstellen:

$$\varphi = f(x_1 x_2 \ldots x_n) = \bar{f}(\bar{x}_1 \bar{x}_2 \ldots \bar{x}_n).$$

Bilden wir den Zuwachs von φ bei einer infinitesimalen Verschiebung des Argumentpunktes, so kommt

$$d\varphi = \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i = \sum_i \frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{x}_i} d\bar{x}_i.$$

Daraus geht hervor, daß $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ die Komponenten eines kovarianten Tensorfeldes 1. Stufe bilden, das in einer von jedem Koordinatensystem unabhängigen Weise aus dem Skalarfeld φ entspringt. Hier haben wir ein einfaches Beispiel zum Begriff Vektorfeld; zugleich zeigt sich, daß die Operation »grad« invarianten Charakter trägt nicht nur gegenüber linearen, sondern beliebigen Koordinatentransformationen, wie wir behauptet hatten.

Um zu (22) zu gelangen, machen wir folgende Konstruktion. Vom Punkte $P = P_{00}$ ziehen wir die beiden Linienelemente mit den Komponenten dx_i und δx_i, die zu den unendlich benachbarten Punkten P_{10} und P_{01} führen. Wir verschieben (variieren) das Linienelement dx in

irgend einer Weise so, daß sein Anfangspunkt die Strecke $\overrightarrow{P_{00}P_{01}}$ beschreibt; in seiner Endlage sei es übergegangen in $\overrightarrow{P_{01}P_{11}}$. Diesen Prozeß bezeichnen wir als die Verschiebung δ. Die Komponenten dx_i mögen dabei die Zuwächse δdx_i empfangen haben, so daß

$$\delta dx_i = \{x_i(P_{11}) - x_i(P_{01})\} - \{x_i(P_{10}) - x_i(P_{00})\}$$

ist. Jetzt vertauschen wir d und δ. Durch eine analoge Verschiebung d des Linienelements δx an der Strecke $P_{00}P_{10}$ entlang, bei der es schließlich in die Lage $\overrightarrow{P_{10}P'_{11}}$ übergeht, erfahren die Komponenten desselben den Zuwachs

$$d\delta x_i = \{x_i(P'_{11}) - x_i(P_{10})\} - \{x_i(P_{01}) - x_i(P_{00})\}.$$

Daraus folgt

$$\delta dx_i - d\delta x_i = x_i(P_{11}) - x_i(P'_{11}). \tag{24}$$

Dann und nur dann, wenn die beiden Punkte P_{11} und P'_{11} zusammenfallen, wenn also die beiden Linienelemente dx und δx bei ihren Verschiebungen δ bzw. d das gleiche unendlichkleine »Parallelogramm« überfahren — und so wollen wir den Prozeß leiten —, gilt

$$\delta dx_i - d\delta x_i = 0. \tag{25}$$

Ist nun ein kovariantes Vektorfeld mit den Komponenten f_i gegeben, so bilden wir die Änderung der Invariante $df = f_i dx_i$ bei der Verschiebung δ:

$$\delta df = \delta f_i dx_i + f_i \delta dx_i.$$

Vertauschen wir d mit δ und subtrahieren, so kommt

$$\Delta f = (\delta d - d\delta) f = (\delta f_i dx_i - df_i \delta x_i) + f_i(\delta dx_i - d\delta x_i),$$

und wenn beide Verschiebungen das gleiche infinitesimale Parallelogramm durchfegen, insbesondere

$$\Delta f = \delta f_i dx_i - df_i \delta x_i = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_k} - \frac{\partial f_k}{\partial x_i}\right) dx_i \delta x_k. \tag{26}$$

Traut man diesem vielleicht allzu gewagten Operieren mit unendlichkleinen Größen nicht, so ersetze man die Differentiale durch Differentialquotienten. Da sich ein unendlichkleines Flächenelement nur als Teil (oder genauer: als Limes des Teils) einer beliebig kleinen, aber endlich ausgedehnten Fläche fassen läßt, lautet die Überlegung dann so. Es sei jedem Wertepaar zweier Parameter s, t (in einer gewissen Umgebung von $s = 0$, $t = 0$) ein Punkt (st) unserer Mannigfaltigkeit zugeordnet; die Funktionen $x_i = x_i(st)$, welche diese (über eine Fläche sich verbreitende) »zweidimensionale Bewegung« in irgendeinem Koordinatensystem x_i darstellen, seien zweimal stetig differentiierbar. In jedem Punkte (st) gehören dazu die beiden Geschwindigkeitsvektoren mit den Komponenten $\frac{dx_i}{ds}$ und $\frac{dx_i}{dt}$. Wir können die Zuordnung so wählen, daß sich für $s = 0$, $t = 0$ ein vorgeschriebener Punkt $P = (00)$ ergibt und jene

beiden Geschwindigkeitsvektoren in ihm mit zwei willkürlich vorgegebenen Vektoren u^i, v^i zusammenfallen (es genügt ja dazu, die x_i als lineare Funktionen von s und t anzusetzen). d bedeute die Differentiation $\frac{d}{ds}$, δ aber $\frac{d}{dt}$. Dann ist

$$df = f_i \frac{dx_i}{ds}, \quad \delta df = \frac{\partial f_i}{\partial x_k} \frac{dx_i}{ds} \frac{dx_k}{dt} + f_i \frac{d^2 x_i}{dt\,ds}.$$

Durch Vertauschung von δ und d und nachfolgende Subtraktion kommt

$$(27) \qquad \Delta f = \delta df - d\delta f = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_k} - \frac{\partial f_k}{\partial x_i}\right) \frac{dx_i}{ds} \frac{dx_k}{dt}.$$

Indem wir $s = 0$, $t = 0$ setzen. erhalten wir zum Punkte P die von zwei willkürlichen Vektoren u, v daselbst abhängige Invariante

$$\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_k} - \frac{\partial f_k}{\partial x_i}\right) u^i v^k.$$

Der Zusammenhang mit der infinitesimalen Betrachtung besteht darin, daß diese hier in strenger Form für die unendlichkleinen Parallelogramme durchgeführt wird, in welche die Fläche $x_i = x_i(st)$ durch die Koordinatenlinien $s =$ konst. und $t =$ konst. zerlegt ist.

Ich erinnere in diesem Zusammenhang an den *Stokesschen Satz*. Das invariante lineare Differential $f_i dx_i$ heißt *integrabel*, wenn sein Integral längs jeder geschlossenen Kurve, der »Integralwirbel«, $= 0$ ist (was, wie man weiß, nur für ein totales Differential der Fall ist). Man spanne in die geschlossene Kurve eine beliebige Fläche ein, zu geben durch eine Parameterdarstellung $x_i = x_i(st)$, und zerlege sie durch die Koordinatenlinien in infinitesimale Parallelogramme. Der Wirbel um die Begrenzung der ganzen Fläche läßt sich dann zurückführen auf die einzelnen Wirbel um diese kleinen Flächenmaschen herum, deren Wert für jede Masche durch unsern mit $ds\,dt$ zu multiplizierenden) Ausdruck (27) geliefert wird. So kommt eine differentiale Zerlegung des Integralwirbels zustande, und der Tensor (22) ist an jeder Stelle das Maß für die dort vorhandene »Wirbelstärke«.

Auf die gleiche Weise steigt man zur nächst höheren Stufe (23) auf. Statt des infinitesimalen Parallelogramms wird man dabei ein durch drei Linienelemente d, δ, $\mathfrak{d}$ aufgespanntes dreidimensionales Parallelepiped zu benutzen haben. Die Rechnung sei kurz angedeutet:

$$(28) \qquad \mathfrak{d}(f_{ik}\,dx_i\,\delta x_k) = \frac{\partial f_{ik}}{\partial x_l} dx_i\,\delta x_k\,\mathfrak{d}x_l + f_{ik}(\mathfrak{d}dx_i \cdot \delta x_k + \mathfrak{d}\delta x_k \cdot dx_i).$$

Wegen $f_{ki} = -f_{ik}$ ist der zweite Summand rechts

$$(29) \qquad = f_{ik}(\mathfrak{d}dx_i \cdot \delta x_k - \mathfrak{d}\delta x_i \cdot dx_k).$$

Nimmt man in (28) die drei zyklischen Vertauschungen von d, δ, $\mathfrak{d}$ vor und addiert, so zerstören sich die aus (29) entspringenden 6 Glieder zu je zweien wegen der Symmetriebedingungen (25).

Begriff der Tensordichte. Ist $\int \mathfrak{W}\, dx$ — ich schreibe kurz dx für das Integrationselement $dx_1\, dx_2 \ldots dx_n$ — eine Integralinvariante, so ist $\mathfrak{W}$ eine Größe, die vom Koordinatensystem in der Weise abhängt, daß sie sich bei Übergang zu einem andern Koordinatensystem mit dem absoluten Betrag der Funktionaldeterminante multipliziert. Fassen wir jenes Integral als Maß eines das Integrationsgebiet erfüllenden Substanzquantums auf, so ist $\mathfrak{W}$ dessen Dichte. Eine Größe der beschriebenen Art möge deshalb als *skalare Dichte* bezeichnet werden. Das ist ein wichtiger Begriff, der gleichberechtigt neben den des Skalars tritt und sich durchaus nicht auf ihn reduzieren läßt. In einem analogen Sinne wie von einer skalaren können wir auch von einer *tensoriellen Dichte* sprechen. Eine vom Koordinatensystem abhängige Linearform mehrerer Reihen von Variablen, die teils mit oberen teils mit unteren Indizes behaftet sind, ist eine Tensordichte im Punkte P, wenn aus dem Ausdruck dieser Linearform in einem ersten Koordinatensystem ihr Ausdruck in einem beliebigen anderen, dem überstrichenen Koordinatensystem durch Multiplikation mit dem absoluten Betrag der Funktionaldeterminante

$$\Delta = \text{abs.} \left| \alpha_i^k \right|$$

und Transformation der Variablen nach dem alten Schema (19) hervorgeht. Der Gebrauch der Worte Komponenten, kovariant, kontravariant, symmetrisch, schiefsymmetrisch, Feld usw. wie bei Tensoren. Mit der Gegenüberstellung der Tensoren und Tensordichten glaube ich den Unterschied zwischen *Quantität* und *Intensität*, soweit er physikalische Bedeutung hat, in strenger Weise erfaßt zu haben: *die Tensoren sind die Intensitäts-, die Tensordichten die Quantitätsgrößen.* Die gleiche ausgezeichnete Rolle, welche unter den Tensoren die kovarianten schiefsymmetrischen spielen, kommt unter den Tensordichten den kontravarianten schiefsymmetrischen zu, die wir darum kurz als *lineare Tensordichten* bezeichnen wollen.

Algebra der Tensordichten. Wie im Gebiet der Tensoren haben wir hier die folgenden Operationen:

1. Addition von Tensordichten der gleichen Art, Multiplikation einer Tensordichte mit einer Zahl;

2. Verjüngung; und

3. (nicht etwa Multiplikation zweier Tensordichten miteinander, sondern) Multiplikation eines Tensors mit einer Tensordichte. Denn durch Multiplikation zweier skalaren Dichten z. B. würde ja nicht wieder eine skalare Dichte entstehen, sondern eine Größe, die sich beim Übergang von einem zum anderen Koordinatensystem mit dem Quadrat der Funktionaldeterminante multipliziert. Multiplikation eines Tensors mit einer Tensordichte liefert aber stets eine Tensordichte (deren Stufenzahl gleich der Summe der Stufenzahlen der beiden Faktoren ist); so geht z. B. aus einem kontravarianten Vektor mit den Komponenten f^i und einer ko-

varianten Tensordichte mit den Komponenten $\mathfrak{w}_{ik}$ in einer vom Koordinatensystem unabhängigen Weise eine gemischte Tensordichte 3. Stufe mit den Komponenten $f^i \mathfrak{w}_{kl}$ hervor.

Die Analysis der Tensordichten läßt sich in einer beliebigen Mannigfaltigkeit nur für *lineare* Felder begründen. Sie führt zu folgenden *divergenzartigen Prozessen:*

$$\frac{\partial \mathfrak{w}^i}{\partial x_i} = \mathfrak{w}, \tag{30}$$

$$\frac{\partial \mathfrak{w}^{ik}}{\partial x_k} = \mathfrak{w}^i, \tag{31}$$

. . . .

Durch (30) wird aus einem linearen Tensordichte-Feld $\mathfrak{w}^i$ der 1. Stufe ein skalares Dichtefeld $\mathfrak{w}$ erzeugt, durch (31) aus einem linearen Feld 2. Stufe ($\mathfrak{w}^{ki} = -\mathfrak{w}^{ik}$) ein solches der 1. Stufe usf. Die Operationen sind vom Koordinatensystem unabhängig. Von einem Feld 1. Stufe $\mathfrak{w}^i$, das aus einem Feld 2. Stufe $\mathfrak{w}^{ik}$ nach (31) entsteht, ist die Divergenz (30) $= 0$; analog für die höheren Stufen. Den Beweis der Invarianz von (30) erbringen wir durch folgende Betrachtung, die aus der Theorie der Bewegung von kontinuierlich ausgebreiteten Massen bekannt ist.

Ist ξ^i ein gegebenes Vektorfeld, so wird durch

$$\bar{x}_i = x_i + \xi^i \cdot \delta t \tag{32}$$

eine *infinitesimale Verschiebung* der Punkte unseres Kontinuums erklärt, bei welcher der Punkt mit den Koordinaten x_i in den Punkt mit den Koordinaten $\bar{x}_i$ übergeht; den konstanten infinitesimalen Faktor δt mag man als das Zeitelement deuten, während dessen diese Deformation vor sich geht. Die Abweichung der Abbildungsdeterminante

$$\Delta = \left| \frac{\partial \bar{x}_i}{\partial x_k} \right| \text{ von } 1 \text{ ist } = \delta t \cdot \frac{\partial \xi^i}{\partial x_i}.$$

Durch die Verrückung gehe ein Teilstück $\mathfrak{G}$ des Kontinuums, dem bei der Darstellung durch die Koordinaten x_i das mathematische Gebiet $\mathfrak{X}$ der Variablen x_i entspricht, in das unendlich wenig davon verschiedene Gebiet $\bar{\mathfrak{G}}$ über. Ist $\mathfrak{s}$ ein skalares Dichtefeld, das wir als Dichte einer das Kontinuum erfüllenden Substanz auffassen, so ist das in $\mathfrak{G}$ vorhandene Substanzquantum

$$= \int_{\mathfrak{X}} \mathfrak{s}(x)\, dx,$$

das $\bar{\mathfrak{G}}$ erfüllende Quantum aber

$$= \int \mathfrak{s}(\bar{x})\, d\bar{x} = \int_{\mathfrak{X}} \mathfrak{s}(\bar{x}) \Delta\, dx,$$

wo in dem letzten Ausdruck für die Argumente $\bar{x}_i$ von $\mathfrak{s}$ die Werte (32) einzusetzen sind. (Ich verschiebe hier das Volumen gegen die Substanz; man kann statt dessen natürlich auch die Substanz durch das Volumen strömen lassen; dann ist $\mathfrak{s}\xi^i$ die Stromstärke.) Für den Zuwachs an

Substanz, den das Gebiet $\mathfrak{G}$ durch die Verschiebung gewonnen hat, ergibt sich das nach den Variablen x_i über $\mathfrak{X}$ zu erstreckende Integral von

$$\mathfrak{s}(\bar{x}) \cdot \varDelta - \mathfrak{s}(x),$$

für den Integranden aber findet sich

$$\mathfrak{s}(\bar{x})(\varDelta - 1) + \{\mathfrak{s}(\bar{x}) - \mathfrak{s}(x)\} = \delta t \left(\mathfrak{s}\frac{\partial \xi^i}{\partial x_i} + \frac{\partial \mathfrak{s}}{\partial x_i}\xi^i\right) = \delta t \cdot \frac{\partial(\mathfrak{s}\xi^i)}{\partial x_i}.$$

Folglich wird durch die Formel

$$\frac{\partial(\mathfrak{s}\xi^i)}{\partial x_i} = \mathfrak{w}$$

ein invarianter Zusammenhang hergestellt zwischen den beiden skalaren Dichtefeldern $\mathfrak{s}$, $\mathfrak{w}$ und dem kontravarianten Vektorfeld mit den Komponenten ξ^i. Da sich nun jede Vektordichte $\mathfrak{w}^i$ in der Form $\mathfrak{s}\xi^i$ darstellen läßt — denn definiert man in einem *bestimmten* Koordinatensystem eine skalare Dichte $\mathfrak{s}$ und ein Vektorfeld ξ durch $\mathfrak{s} = 1$, $\xi^i = \mathfrak{w}^i$, so gilt in *jedem* die Gleichung $\mathfrak{w}^i = \mathfrak{s}\xi^i$ —, ist der gewünschte Beweis erbracht.

Wir sprechen im Anschluß an diese Überlegung das später oft zu benutzende *Prinzip der partiellen Integration* aus: Verschwinden die Funktionen $\mathfrak{w}^i$ am Rande eines Gebietes $\mathfrak{G}$, so ist das Integral

$$\int_{\mathfrak{G}} \frac{\partial \mathfrak{w}^i}{\partial x_i} dx = 0.$$

Denn dieses Integral, mit δt multipliziert, bedeutet die Änderung, welche das »Volumen« $\int dx$ jenes Gebiets bei einer infinitesimalen Deformation erleidet, deren Komponenten $= \delta t \cdot \mathfrak{w}^i$ sind.

Ist des Divergenzprozesses (30) Invarianz erkannt, erheben wir uns von da aus leicht zu den höheren Stufen, zunächst zu (31). Wir nehmen ein kovariantes Vektorfeld f_i zu Hilfe, das aus einem Potential f entspringt: $f_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}$, bilden die lineare Tensordichte 1. Stufe $\mathfrak{w}^{ik} f_i$ und deren Divergenz

$$\frac{\partial(\mathfrak{w}^{ik} f_i)}{\partial x_k} = f_i \frac{\partial \mathfrak{w}^{ik}}{\partial x_k}.$$

Die Bemerkung, daß die f_i in einem Punkte P willkürlich vorgeschriebene Werte annehmen können, schließt den Beweis ab. Auf gleiche Art ersteigen wir die 3. Stufe usf.

§ 14. Affin zusammenhängende Mannigfaltigkeit.

Begriff des affinen Zusammenhangs. Der Punkt P einer Mannigfaltigkeit hängt mit seiner Umgebung affin zusammen (wollen wir sagen), wenn von jedem Vektor in P feststeht, in welchen Vektor in P' er durch *Parallelverschiebung* von P nach P' übergeht; dabei bedeutet P' einen beliebigen der zu P unendlich benachbarten Punkte [10]). Von diesem Begriff verlangen wir nicht mehr und nicht weniger, als daß er alle die-

jenigen Eigenschaften besitzt, die ihm in der affinen Geometrie des Kap. I zukamen, d. h. wir postulieren: *Es gibt ein Koordinatensystem* (für die Umgebung von P), *bei dessen Benutzung die Komponenten eines jeden Vektors in P durch infinitesimale Parallelverschiebung nicht geändert werden.* Diese Forderung kennzeichnet das Wesen der Parallelverschiebung als einer Verpflanzung, von der wir mit Recht behaupten dürfen, daß sie die Vektoren *ungeändert* läßt. Ein solches Koordinatensystem heißt *geodätisch* in P. Was folgt daraus für ein beliebiges Koordinatensystem x_i? In ihm habe der Punkt P die Koordinaten x_i^0, P' die Koordinaten $x_i^0 + dx_i$, ξ^i seien die Komponenten eines beliebigen Vektors in P, $\xi^i + d\xi^i$ die Komponenten des aus ihm durch Parallelverschiebung nach P hervorgehenden Vektors. Da erstens durch die Parallelverschiebung von P nach P' die sämtlichen Vektoren in P auf die sämtlichen Vektoren in P' linear oder affin abgebildet werden, muß $d\xi^i$ linear von den ξ^i abhängen:

$$d\xi^i = -d\gamma^i_r \xi^r. \tag{33}$$

Zweitens ergibt sich aus der an die Spitze gestellten Forderung, daß die $d\gamma^i_r$ Linearformen der Differentiale dx_i sind:

$$d\gamma^i_r = \Gamma^i_{rs} dx_s, \tag{33'}$$

deren Zahlkoeffizienten Γ, die »*Komponenten des affinen Zusammenhangs*«, der Symmetriebedingung

$$\Gamma^i_{sr} = \Gamma^i_{rs} \tag{33''}$$

genügen.

Um dies zu beweisen, sei $\bar{x}_i$ ein in P geodätisches Koordinatensystem; es gelten Transformationsformeln (17), (18). Aus der geodätischen Natur des Koordinatensystems $\bar{x}_i$ folgt, daß bei Parallelverschiebung

$$d\xi^i = d(\alpha^i_r \bar{\xi}^r) = d\alpha^i_r \cdot \bar{\xi}^r$$

ist. Fassen wir die ξ^i als Komponenten δx_i eines Linienelements in P auf, so muß demnach

$$-d\gamma^i_r \delta x_r = \frac{\partial^2 f_i}{\partial \bar{x}_r \partial \bar{x}_s} \delta \bar{x}_r d\bar{x}_s$$

sein (für die 2. Ableitungen sind natürlich deren Werte an der Stelle P zu setzen). Daraus geht die Behauptung hervor, und zwar bestimmt sich die symmetrische Bilinearform

$$-\Gamma^i_{rs} \delta x_r dx_s \text{ aus } \frac{\partial^2 f_i}{\partial \bar{x}_r \partial \bar{x}_s} \delta \bar{x}_r d\bar{x}_s \tag{34}$$

durch Transformation nach (18). — Die Konsequenzen sind damit vollständig erschöpft. Sind nämlich Γ^i_{rs} beliebig vorgegebene Zahlen, welche der Symmetriebedingung (33'') genügen, und definieren wir den affinen Zusammenhang durch (33), (33'), so liefern die Transformationsformeln

$$x_i - x_i^0 = \bar{x}_i - \tfrac{1}{2}\Gamma^i_{rs} \bar{x}_r \bar{x}_s$$

ein geodätisches Koordinatensystem $\bar{x}_i$ in P, da für sie die Gleichungen (34) in P erfüllt sind. In der Tat gilt für diese Transformation in P:

$$\bar{x}_i = 0, \quad d\bar{x}_i = dx_i \ (\alpha^i_k = \delta^i_k), \quad \frac{\partial^2 f_i}{\partial \bar{x}_r \partial \bar{x}_s} = -\Gamma^i_{rs}.$$

Die Formeln, nach denen sich die Komponenten des affinen Zusammenhangs Γ^i_{rs} bei Übergang von einem zum andern Koordinatensystem transformieren, sind aus der obigen Betrachtung leicht zu entnehmen; wir werden aber von ihnen keinen Gebrauch zu machen haben. Jedenfalls sind die Γ *nicht* die Komponenten eines (in i kontra-, in r und s kovarianten) Tensors im Punkte P; wohl besitzen sie diesen Charakter gegenüber linearer, verlieren ihn jedoch gegenüber einer beliebigen Transformation. Denn in einem geodätischen Koordinatensystem verschwinden sie sämtlich. Doch ist jede virtuelle Änderung des affinen Zusammenhangs $[\Gamma^i_{rs}]$, mag sie endlich- oder unendlichklein sein, ein Tensor. Denn es ist

$$[d\xi^i] = [\Gamma^i_{rs}]\, \xi^r dx_s$$

der Unterschied der beiden Vektoren, welche durch die beiden Parallelverschiebungen des Vektors ξ von P nach P' entstehen.

Was unter *Parallelverschiebung eines kovarianten Vektors* ξ_i im Punkte P von dort nach dem unendlich benachbarten Punkte P' zu verstehen ist, ergibt sich eindeutig aus der Forderung, daß bei der simultanen Parallelverschiebung dieses Vektors ξ_i und eines beliebigen kontravarianten η^i das invariante Produkt $\xi_i \eta^i$ ungeändert bleibe:

$$d(\xi_i \eta^i) = (d\xi_i \cdot \eta^i) + (\xi_r d\eta^r) = (d\xi_i - d\gamma^r_i \xi_r)\eta^i = 0,$$

daher

$$d\xi_i = \sum_r d\gamma^r_i \xi_r. \tag{35}$$

Ein kontravariantes *Vektorfeld* ξ^i werden wir im Punkte P *stationär* nennen, wenn die Vektoren in den zu P unendlich benachbarten Punkten P' aus dem Vektor in P durch Parallelverschiebung hervorgehen, wenn also in P die totalen Differentialgleichungen

$$d\xi^i + d\gamma^i_r \xi^r = 0 \quad \left(\text{oder } \frac{\partial \xi^i}{\partial x_s} + \Gamma^i_{rs}\xi^r = 0\right)$$

erfüllt sind. Es gibt offenbar ein derartiges Vektorfeld, das im Punkte P selbst beliebig vorgeschriebene Komponenten besitzt (eine Bemerkung, von der bei einer späteren Konstruktion Gebrauch zu machen sein wird). Der gleiche Begriff ist für ein kovariantes Vektorfeld aufzustellen.

Wir beschäftigen uns fortan mit einer *affinen Mannigfaltigkeit*; *in ihr steht jeder Punkt P mit seiner Umgebung in affinem Zusammenhang.* Bei Benutzung eines bestimmten Koordinatensystems sind die Komponenten Γ^i_{rs} des affinen Zusammenhangs stetige Funktionen der Koordinaten x_i. Durch geeignete Wahl des Koordinatensystems kann ich die Γ^i_{rs} wohl an einer einzelnen Stelle P zum Verschwinden bringen; es ist aber im

allgemeinen nicht möglich, das Gleiche simultan für alle Punkte der Mannigfaltigkeit zu erzielen. Es gibt keine Unterschiede unter den verschiedenen Punkten der Mannigfaltigkeit hinsichtlich der Natur ihres affinen Zusammenhangs mit der Umgebung; in dieser Hinsicht ist die Mannigfaltigkeit homogen. Auch gibt es keine verschiedenen, nach der Natur des überall in ihnen herrschenden affinen Zusammenhangs zu unterscheidende Arten von Mannigfaltigkeiten. Die von uns an die Spitze gestellte Forderung läßt eben nur eine bestimmte Natur des affinen Zusammenhangs zu.

Geodätische Linie. Führt ein Punkt bei seiner Bewegung einen (irgendwie veränderlichen) Vektor mit, so erhalten wir zu jedem Wert des Zeitparameters s nicht nur einen Punkt

$$P = (s) : x_i = x_i(s)$$

der Mannigfaltigkeit, sondern außerdem einen Vektor in diesem Punkte mit den von s abhängigen Komponenten $v^i = v^i(s)$. Der Vektor bleibt im Momente s stationär, wenn

$$\frac{dv^i}{ds} + \Gamma^i_{\alpha\beta} v^\alpha \frac{dx_\beta}{ds} = 0 \tag{36}$$

ist. (Hier atme auf, wem immer das Operieren mit Differentialen unsympathisch ist; hier haben sie sich glücklich in Differentialquotienten verwandelt.) Bei beliebiger Mitführung des Vektors besteht die linke Seite V^i von (36) aus den Komponenten eines mit der Bewegung invariant verknüpften Vektors in (s), der angibt, in welchem Maße sich der Vektor v^i an dieser Stelle pro Zeiteinheit ändert. Denn beim Übergang vom Punkte $P = (s)$ zu $P' = (s + ds)$ geht der Vektor v^i in P über in den Vektor

$$v^i + \frac{dv^i}{ds} ds$$

in P'. Verschieben wir aber v^i ungeändert von P nach P', so erhalten wir dort

$$v^i + \delta v^i = v^i - \Gamma^i_{\alpha\beta} v^\alpha dx_\beta.$$

Der Unterschied dieser beiden Vektoren in P', die Änderung von v während der Zeit ds, hat demnach die Komponenten

$$\frac{dv^i}{ds} ds - \delta v^i = V^i ds.$$

Rein analytisch kann man den invarianten Charakter des Vektors V am leichtesten so einsehen: Man nehme einen willkürlichen kovarianten Vektor ξ_i in $P = (s)$ zu Hilfe und bilde die Änderung der Invariante $\xi_i v^i$ beim Übergang von (s) zu $(s + ds)$, wobei der Vektor ξ_i ungeändert mitgenommen werde; dann kommt

$$\frac{d(\xi_i v^i)}{ds} = \xi_i V^i.$$

Verschwindet V für alle s, so gleitet der Vektor v bei der Bewegung mit dem Punkte P an der Bahnkurve entlang, *ohne sich zu ändern.*

Jede Bewegung führt den Vektor ihrer Geschwindigkeit $u^i = \frac{dx_i}{ds}$ mit sich; für diesen besonderen Fall ist V der Vektor

$$U^i = \frac{du^i}{ds} + \Gamma^i_{\alpha\beta} u^\alpha u^\beta = \frac{d^2 x_i}{ds^2} + \Gamma^i_{\alpha\beta} \frac{dx_\alpha}{ds}\frac{dx_\beta}{ds}:$$

die *Beschleunigung*, welche die Änderung der Geschwindigkeit pro Zeiteinheit mißt. Eine Bewegung, in deren Verlauf die Geschwindigkeit beständig ungeändert bleibt, heißt eine *Translation*; die Bahnkurve einer Translation, eine Kurve also, die ihre Richtung ungeändert beibehält, eine *gerade* oder *geodätische Linie.* Beruht doch gerade in dieser Eigenschaft gemäß der translativen Auffassung (vergl. Kap. I, § 1) das Wesen der geraden Linie.

Die Analysis der Tensoren und Tensordichten läßt sich in einer affinen Mannigfaltigkeit ebenso einfach und vollständig wie in der linearen Geometrie des Kap. I entwickeln. Sind beispielsweise f_i^k die in i kovarianten, in k kontravarianten Komponenten eines Tensorfeldes 2. Stufe, so nehmen wir im Punkte P zwei willkürliche Vektoren, einen kontravarianten ξ und einen kovarianten η zu Hilfe, bilden die Invariante

$$f_i^k \xi^i \eta_k$$

und ihre Änderung bei einer unendlich kleinen Verrückung d des Argumentpunktes P, bei welcher ξ und η parallel mit sich verschoben werden. Es ist

$$d(f_i^k \xi^i \eta_k) = \frac{\partial f_i^k}{\partial x_l} \xi^i \eta_k dx_l - f_r^k \eta_k d\gamma_i^r \xi^i + f_i^r \xi^i d\gamma_r^k \eta_k,$$

also sind

$$f_{il}^k = \frac{\partial f_i^k}{\partial x_l} - \Gamma^r_{il} f_r^k + \Gamma^k_{rl} f_i^r$$

die in il kovarianten, in k kontravarianten Komponenten eines Tensorfeldes 3. Stufe, das aus dem gegebenen Tensorfeld 2. Stufe in einer vom Koordinatensystem unabhängigen Weise entspringt. Charakteristisch sind hier die Zusatzglieder, welche die Komponenten des affinen Zusammenhangs enthalten und in denen wir später mit Einstein den Einfluß des Gravitationsfeldes erkennen werden. Nach der angegebenen Methode kann in jedem Fall der Prozeß der Differentiation an einem Tensor vollzogen werden.

Wie in der Tensoranalysis die Operation »grad« als die ursprüngliche auftritt, aus der alle übrigen sich herleiten, so liegt der Analysis der *Tensordichten* die durch (30) erklärte Operation »div« zugrunde. Sie führt zunächst für die Tensordichten aller Stufen zu Prozessen ähnlichen Charakters. Will man z. B. die Divergenz einer gemischten Tensordichte

$\mathfrak{w}_i^k$ 2. Stufe bilden, so nimmt man ein in P stationäres Vektorfeld ξ^i zu Hilfe und konstruiert von der Tensordichte $\xi^i \mathfrak{w}_i^k$ die Divergenz:

$$\frac{\partial(\xi^i \mathfrak{w}_i^k)}{\partial x_k} = \frac{\partial \xi^r}{\partial x_k} \mathfrak{w}_r^k + \xi^i \frac{\partial \mathfrak{w}_i^k}{\partial x_k} = \xi^i \left(- \Gamma^r_{ik} \mathfrak{w}_r^k + \frac{\partial \mathfrak{w}_i^k}{\partial x_k} \right).$$

Diese Größe ist eine skalare Dichte, und demnach, da die Komponenten eines in P stationären Vektorfeldes daselbst beliebige Werte annehmen können,

$$\frac{\partial \mathfrak{w}_i^k}{\partial x_k} - \Gamma^r_{is} \mathfrak{w}_r^s \tag{37}$$

eine kovariante Tensordichte 1. Stufe, die aus $\mathfrak{w}_i^k$ in einer von jedem Koordinatensystem unabhängigen Weise entspringt.

Aber man kann nicht nur durch *Divergenzbildung* einer Tensordichte zu einer solchen von einer um 1 geringeren Stufenzahl herabsteigen, sondern auch durch *Differentiation* aus ihr eine Tensordichte bilden, deren Stufenzahl um 1 höher ist. Bedeutet $\mathfrak{s}$ zunächst eine skalare Dichte, so rufe man wiederum ein in P stationäres Vektorfeld ξ^i zu Hilfe und bilde die Divergenz der Stromstärke $\mathfrak{s}\xi^i$:

$$\frac{\partial(\mathfrak{s}\xi^i)}{\partial x_i} = \frac{\partial \mathfrak{s}}{\partial x_i} \xi^i + \mathfrak{s} \frac{\partial \xi^i}{\partial x_i} = \left(\frac{\partial \mathfrak{s}}{\partial x_i} - \Gamma^r_{ir} \mathfrak{s} \right) \xi^i;$$

dann erhält man in

$$\frac{\partial \mathfrak{s}}{\partial x_i} - \Gamma^r_{ir} \mathfrak{s}$$

die Komponenten einer kovarianten Vektordichte. Um die Differentiation von der skalaren auf eine beliebige Tensordichte, z. B. die gemischte $\mathfrak{w}_i^k$ von 2. Stufe auszudehnen, bedient man sich in nun schon geläufiger Weise zweier in P stationärer Vektorfelder ξ^i und η_i, von denen dieses kovariant, jenes kontravariant ist, und differentiiert die skalare Dichte $\mathfrak{w}_i^k \xi^i \eta_k$. Verjüngung der durch Differentiation entsprungenen Tensordichte nach dem Differentiationsindex und einem kontravarianten führt zur Divergenz zurück.

§ 15. Krümmung.

Sind P und P^* zwei durch eine Kurve verbundene Punkte, in deren erstem ein Vektor gegeben ist, so kann man diesen parallel mit sich längs der Kurve von P nach P^* schieben. Die Gleichungen (36) für die unbekannten Komponenten v^i des in beständiger Parallelverschiebung begriffenen Vektors gestatten nämlich bei gegebenen Anfangswerten von v^i eine und nur eine Lösung. Die so zustande kommende *Vektorübertragung* ist jedoch im allgemeinen *nicht integrabel*; d. h. der Vektor, zu dem man in P^* gelangt, ist abhängig von dem Verschiebungswege, auf dem die Übertragung vollzogen wird. Nur in dem besonderen Fall, wo Integrabilität stattfindet, hat es einen Sinn, von dem *gleichen* Vektor

in zwei verschiedenen Punkten P und P^* zu sprechen; es sind darunter solche Vektoren zu verstehen, die durch Parallelverschiebung auseinander hervorgehen. Alsdann heiße die Mannigfaltigkeit *Euklidisch-affin*. Erteilt man allen Punkten einer derartigen Mannigfaltigkeit eine unendlichkleine Verschiebung, jedoch so, daß die Verschiebung eines jeden durch den »*gleichen*« infinitesimalen Vektor dargestellt wird, so ist mit dem Raume eine infinitesimale *Gesamt-Translation* vorgenommen. Mit ihrer Hilfe lassen sich gemäß dem Gedankengang des Kap. I (wir verzichten hier darauf, den Beweis strenge durchzuführen) besondere, »lineare« Koordinatensysteme konstruieren, die dadurch ausgezeichnet sind, daß bei ihrer Benutzung gleiche Vektoren in verschiedenen Punkten gleiche Komponenten besitzen. In einem linearen Koordinatensystem verschwinden die Komponenten des affinen Zusammenhangs identisch. Je zwei solche Systeme hängen durch *lineare* Transformationsformeln zusammen. Die Mannigfaltigkeit ist ein affiner Raum im Sinne von Kap. I: *die Integrabilität der Vektorübertragung ist diejenige infinitesimalgeometrische Eigenschaft, durch welche die »linearen« Räume unter den affin zusammenhängenden ausgezeichnet sind.*

Doch ist jetzt die Aufmerksamkeit auf den *allgemeinen Fall* zu lenken; da dürfen wir nicht erwarten, daß ein Vektor, durch Parallelverschiebung an einer geschlossenen Kurve herumgeführt, in seine Ausgangslage zurückkehrt. Wie beim Beweise des Stokesschen Satzes spannen wir in die geschlossene Kurve eine Fläche ein und zerlegen sie durch die Parameterlinien in unendlich kleine Parallelogramme. Die Änderung eines beliebigen Vektors beim Umfahren der Fläche wird zurückgeführt auf die Änderung beim Umfahren jedes solchen von zwei Linienelementen dx_i und δx_i in einem Punkte P aufgespannten infinitesimalen Parallelogramms; sie gilt es jetzt zu bestimmen. Wir werden konstatieren, daß der Zuwachs $\varDelta \mathfrak{x} = (\varDelta \xi^i)$, den dabei ein Vektor $\mathfrak{x} = (\xi^i)$ erfährt, aus $\mathfrak{x}$ durch eine lineare Abbildung, eine Matrix $\varDelta \mathsf{F}$ hervorgeht:

$$(38) \qquad \varDelta \mathfrak{x} = \varDelta \mathsf{F}(\mathfrak{x}); \quad \varDelta \xi^\alpha = \varDelta F^\alpha_\beta \cdot \xi^\beta.$$

Ist $\varDelta \mathsf{F} = 0$, so ist die Mannigfaltigkeit an der Stelle P in der von unserm Flächenelement eingenommenen Flächenrichtung »*eben*«; trifft dies für alle Elemente einer endlich ausgedehnten Fläche zu, so kehrt jeder Vektor, der längs des Flächenrandes parallel verschoben wird, zu seiner Ausgangslage zurück. — $\varDelta \mathsf{F}$ hängt linear von dem Flächenelement ab:

$$(39) \qquad \varDelta \mathsf{F} = \mathsf{F}_{ik} dx_i \delta x_k = \tfrac{1}{2} \mathsf{F}_{ik} \varDelta x_{ik} \quad (\varDelta x_{ik} = dx_i \delta x_k - dx_k \delta x_i; \\ \mathsf{F}_{ki} = - \mathsf{F}_{ik}).$$

Die hier auftretende Differentialform charakterisiert die *Krümmung*, die Abweichung der Mannigfaltigkeit von der Ebenheit an der Stelle P in allen möglichen Flächenrichtungen; da ihre Koeffizienten keine Zahlen, sondern Matrizen sind, könnte von einem »*linearen Matrix-Tensor 2. Stufe*«

gesprochen werden, und es würde dadurch die Größennatur der Krümmung in der Tat am besten bezeichnet. Gehen wir aber von den Matrizen auf ihre Komponenten zurück — es seien $F^{\alpha}_{\beta ik}$ die Komponenten von F_{ik} oder auch die Koeffizienten der Form

$$\Delta F^{\alpha}_{\beta} = F^{\alpha}_{\beta ik} dx_i \delta x_k -, \tag{40}$$

so ergibt sich, wenn $\mathfrak{e}_i$ die zum Koordinatensystem gehörigen Einheitsvektoren in P sind, die Formel

$$\Delta \mathfrak{x} = F^{\alpha}_{\beta ik} \mathfrak{e}_{\alpha} \xi^{\beta} dx_i \delta x_k . \tag{41}$$

Daraus geht hervor, daß $F^{\alpha}_{\beta ik}$ die in α kontra-, in $\beta i k$ kovarianten Komponenten eines *Tensors 4. Stufe* sind. Ihr Ausdruck durch die Komponenten Γ^{i}_{rs} des affinen Zusammenhangs lautet:

$$F^{\alpha}_{\beta ik} = \left(\frac{\partial \Gamma^{\alpha}_{\beta k}}{\partial x_i} - \frac{\partial \Gamma^{\alpha}_{\beta i}}{\partial x_k}\right) + \left(\Gamma^{\alpha}_{ri}\Gamma^{r}_{\beta k} - \Gamma^{\alpha}_{rk}\Gamma^{r}_{\beta i}\right). \tag{42}$$

Sie erfüllen danach die Bedingungen der »schiefen« und der »zyklischen« Symmetrie:

$$F^{\alpha}_{\beta ki} = - F^{\alpha}_{\beta ik}; \quad F^{\alpha}_{\beta ik} + F^{\alpha}_{ik\beta} + F^{\alpha}_{k\beta i} = 0 . \tag{43}$$

Das Verschwinden der Krümmung ist das invariante Differentialgesetz, durch welches sich die Euklidischen Räume unter den affinen im allgemeinen Sinne der Infinitesimalgeometrie auszeichnen.

Zum Beweise der ausgesprochenen Behauptungen bedienen wir uns desselben Verfahrens der doppelten Durchfegung eines unendlichkleinen Parallelogramms, das wir auf S. 96 zur Herleitung des Wirbeltensors benutzten; wir verwenden die damaligen Bezeichnungen. Im Punkte P_{00} sei ein Vektor $\mathfrak{x} = \mathfrak{x}(P_{00})$ mit den Komponenten ξ^i gegeben. Im Endpunkte P_{10} des Linienelements dx bringen wir denjenigen Vektor $\mathfrak{x}(P_{10})$ an, der aus ihm durch Parallelverschiebung längs des Linienelementes hervorgeht; heißen seine Komponenten $\xi^i + d\xi^i$, so ist also

$$d\xi^{\alpha} = - d\gamma^{\alpha}_{\beta}\xi^{\beta} = - \Gamma^{\alpha}_{\beta i}\xi^{\beta} dx_i .$$

Bei der vorzunehmenden Verschiebung δ des Linienelements dx (die keineswegs eine Parallelverschiebung zu sein braucht) bleibe der Vektor im Endpunkt immer durch die angegebene Bedingung an den Vektor im Anfangspunkt gebunden; dann erleiden die $d\xi^{\alpha}$ bei der Verschiebung den Zuwachs

$$\delta d\xi^{\alpha} = - \delta\Gamma^{\alpha}_{\beta i} dx_i \xi^{\beta} - \Gamma^{\alpha}_{\beta i}\delta dx_i \xi^{\beta} - d\gamma^{\alpha}_{r}\delta\xi^{r} .$$

Bleibt insbesondere der Vektor im Anfangspunkt des Linienelements während der Verschiebung zu sich selbst parallel, so ist hier $\delta\xi^{r}$ durch $-\delta\gamma^{r}_{\beta}\xi^{\beta}$ zu ersetzen; in der Endlage $\overrightarrow{P_{01}P_{11}}$ des Linienelements erhalten wir dann im Punkte P_{01} denjenigen Vektor $\mathfrak{x}(P_{01})$, der aus $\mathfrak{x}(P_{00})$ durch Parallelverschiebung längs $\overrightarrow{P_{00}P_{01}}$ hervorgeht, in P_{11} den Vektor

$\mathfrak{x}(P_{11})$, in welchen $\mathfrak{x}(P_{01})$ durch Parallelverschiebung längs $P_{01}P_{11}$ übergeht, und es ist

$$\delta d\xi^\alpha = \{\xi^\alpha(P_{11}) - \xi^\alpha(P_{01})\} - \{\xi^\alpha(P_{10}) - \xi^\alpha(P_{00})\}.$$

Heißt der aus $\mathfrak{x}(P_{10})$ durch Parallelverschiebung längs $\overrightarrow{P_{10}P_{11}}$ zustande kommende Vektor $\mathfrak{x}_*(P_{11})$, so erhält man durch Vertauschung von d und δ einen analogen Ausdruck für

$$d\delta\xi^\alpha = \{\xi^\alpha_*(P_{11}) - \xi^\alpha(P_{10})\} - \{\xi^\alpha(P_{01}) - \xi^\alpha(P_{00})\}.$$

Durch Subtraktion bildet man

$$\Delta\xi^\alpha = \delta d\xi^\alpha - d\delta\xi^\alpha$$

$$= \left\{\begin{matrix} -\delta\Gamma^\alpha_{\beta i}dx_i + d\gamma^\alpha_r\,\delta\gamma^r_\beta - \Gamma^\alpha_{\beta i}\delta dx_i \\ +d\Gamma^\alpha_{\beta k}\delta x_k - \delta\gamma^\alpha_r\,d\gamma^r_\beta + \Gamma^\alpha_{\beta i}d\delta x_i \end{matrix}\right\}\xi^\beta.$$

Hier zerstören sich wegen $\delta dx_i = d\delta x_i$ die beiden hinteren Terme auf der rechten Seite, und es bleibt

$$\Delta\xi^\alpha = \Delta F^\alpha_\beta \cdot \xi^\beta;$$

dabei sind $\Delta\xi^\alpha$ die Komponenten eines Vektors $\Delta\mathfrak{x}$ in P_{11}, der Differenz der beiden Vektoren $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{x}_*$ *im selben Punkte*:

$$\Delta\xi^\alpha = \xi^\alpha(P_{11}) - \xi^\alpha_*(P_{11}).$$

Da im Limes P_{11} mit $P = P_{00}$ zusammenfällt, sind damit unsere Behauptungen erwiesen.

Die infinitesimale Überlegung verwandelt sich in einen strengen Beweis, sobald wir wie früher d und δ im Sinne der Differentiationen $\frac{d}{ds}$ und $\frac{d}{dt}$ deuten. Um die Schicksale des Vektors $\mathfrak{x}$ bei dem infinitesimalen Schiebungsprozeß wiederzugeben, empfiehlt sich folgende Konstruktion. Es sei jedem Wertepaar s, t nicht nur ein Punkt $P = (st)$, sondern außerdem ein kovarianter Vektor mit den Komponenten $f_i(st)$ in diesem Punkte zugeordnet; ist ξ^i ein beliebiger Vektor in P, so verstehen wir unter $d(f_i\xi^i)$ denjenigen Wert von $\frac{d(f_i\xi^i)}{ds}$, der sich ergibt, wenn ξ^i beim Übergang vom Punkte (st) zum Punkte $(s + ds, t)$ ungeändert mitgenommen wird. $d(f_i\xi^i)$ ist selbst wieder ein Ausdruck von der Form $f_i\xi^i$, nur daß jetzt statt f_i andere Funktionen f'_i von s und t stehen. Wir können deshalb auf ihn von neuem den gleichen Prozeß oder den analogen δ anwenden. Tun wir das letztere, wiederholen den ganzen Vorgang in umgekehrter Reihenfolge und subtrahieren, so bekommen wir zunächst

$$\delta d(f_i\xi^i) = \delta df_i \cdot \xi^i + df_i\delta\xi^i + \delta f_i d\xi^i + f_i\delta d\xi^i$$

und darauf wegen

$$\delta df_i = \frac{d^2 f_i}{dt\,ds} = \frac{d^2 f_i}{ds\,dt} = d\delta f_i:$$

$$\Delta(f_i\xi^i) = (\delta d - d\delta)(f_i\xi^i) = f_i\Delta\xi^i.$$

Dabei ist $\Delta\xi^i$ genau der oben gefundene Ausdruck. Die erhaltene Invariante lautet im Punkte $P = (00)$

$$F^{\alpha}_{\beta i k} f_{\alpha} \xi^{\beta} u^i v^k ;$$

sie hängt von einem willkürlichen kovarianten Vektor mit den Komponenten f_i daselbst ab und von drei kontravarianten ξ, u, v; die $F^{\alpha}_{\beta i k}$ sind demnach die Komponenten eines Tensors 4. Stufe.

§ 16. Der metrische Raum.

Begriff der metrischen Mannigfaltigkeit. Eine Mannigfaltigkeit *trägt im Punkte P eine Maßbestimmung*, wenn die Linienelemente in P sich ihrer Länge nach vergleichen lassen; wir nehmen dabei im Unendlichkleinen die Gültigkeit der Pythagoreisch-Euklidischen Gesetze an. *Es bestimmt dann jeder Vektor* $\mathfrak{x}$ *in P eine Strecke*; *und es gibt eine nicht-ausgeartete quadratische Form* $\mathfrak{x}^2$ *derart, daß zwei Vektoren* $\mathfrak{x}$ *und* $\mathfrak{y}$ *dann und nur dann dieselbe Strecke bestimmen, wenn* $\mathfrak{x}^2 = \mathfrak{y}^2$ *ist.* Durch diese Forderung ist die quadratische Form nur bis auf einen von 0 verschiedenen Proportionalitätsfaktor bestimmt. Indem man ihn festlegt, wird die Mannigfaltigkeit im Punkte *P geeicht.* Die Zahl $\mathfrak{x}^2$ nennen wir alsdann die Maßzahl des Vektors $\mathfrak{x}$ oder, da sie nur von der durch $\mathfrak{x}$ bestimmten Strecke abhängt, die *Maßzahl l dieser Strecke.* Ungleiche Strecken haben verschiedene Maßzahlen; die Strecken in einem Punkte P bilden daher eine eindimensionale Gesamtheit. Ersetzen wir die Eichung durch eine andere, so geht die neue Maßzahl $\bar{l}$ aus der alten l durch Multiplikation mit einem von der Strecke unabhängigen konstanten Faktor $\lambda \neq 0$ hervor $\bar{l} = \lambda l$. Die Verhältnisse zwischen den Maßzahlen der Strecken sind von der Eichung unabhängig. Wie also die Charakterisierung eines Vektors in P durch ein System von Zahlen (seine Komponenten) von der Wahl eines Koordinatensystems abhängt, so ist die Festlegung einer Strecke durch eine Zahl von der Eichung abhängig; und wie die Komponenten eines Vektors beim Übergang zu einem andern Koordinatensystem eine lineare homogene Transformation erleiden, so auch die Maßzahl einer willkürlichen Strecke bei »Umeichen«. — Zwei Vektoren $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ in P, für welche die zu $\mathfrak{x}^2$ gehörige symmetrische Bilinearform $\mathfrak{x}\,\mathfrak{y}$ verschwindet. nennen wir zueinander *senkrecht*; diese Wechselbeziehung wird von dem Eichfaktor nicht beeinflußt. Daß die Form $\mathfrak{x}^2$ definit sei, ist für alle unsere mathematischen Entwicklungen gleichgültig; doch möge man im folgenden in erster Linie immer an diesen Fall denken. Hat sie p positive, q negative Dimensionen ($p + q = n$), so sagen wir kurz, die Mannigfaltigkeit sei in dem betreffenden Punkte ($p + q$)-dimensional. Ist $p \neq q$, so wollen wir durch die Forderung $p > q$ das Vorzeichen der metrischen Fundamentalform $\mathfrak{x}^2$ ein für allemal festlegen; das Eichverhältnis λ ist dann stets positiv. Nach Wahl eines bestimmten Koordinatensystems und Festlegung des Eichfaktors sei für jeden Vektor $\mathfrak{x}$ (mit den Komponenten ξ^i)

(44) $$\mathfrak{x}^2 = \sum_{ik} g_{ik} \xi^i \xi^k \qquad (g_{ki} = g_{ik}).$$

Wir nehmen jetzt an, unsere Mannigfaltigkeit trage in jedem Punkte eine Maßbestimmung. Eichen wir sie überall und legen in sie ein System von n Koordinaten x_i hinein — das muß geschehen, um alle vorkommenden Größen durch Zahlen ausdrücken zu können —, so sind die g_{ik} in (44) völlig bestimmte Funktionen der Koordinaten x_i; wir nehmen an, daß sie stetig und stetig differentiierbar sind. Da die Determinante der g_{ik} nirgendwo verschwindet, werden dann die ganzen Zahlen p und q in der ganzen Ausdehnung der Mannigfaltigkeit die gleichen sein; wir setzen $p > q$ voraus.

Damit eine Mannigfaltigkeit ein metrischer Raum sei, genügt es nicht, daß sie in jedem Punkte eine Maßbestimmung trägt, sondern es muß außerdem jeder Punkt mit seiner Umgebung *metrisch zusammenhängen.* Der Begriff des metrischen ist analog dem des affinen Zusammenhangs; wie dieser die *Vektoren* betrifft, so jener die *Strecken.* Ein Punkt P hängt also mit seiner Umgebung metrisch zusammen, wenn von jeder Strecke in P feststeht, welche Strecke aus ihr durch kongruente Verpflanzung von P nach dem beliebigen zu P unendlich benachbarten Punkte P' hervorgeht. Die einzige Forderung, welche wir an diesen Begriff stellen (zugleich die weitgehendste, die überhaupt möglich ist), ist diese: Die Umgebung von P läßt sich so eichen, daß die Maßzahl einer jeden Strecke in P durch kongruente Verpflanzung nach den unendlich benachbarten Punkten keine Änderung erleidet. Die Eichung heißt dann geodätisch in P. — Ist aber die Mannigfaltigkeit irgendwie geeicht, ist ferner l die Maßzahl einer beliebigen Strecke im Punkte P, $l + dl$ die Maßzahl der aus ihr durch kongruente Verpflanzung nach dem unendlich nahen Punkte P' entstehenden Strecke in P', so gilt notwendig eine Gleichung

(45) $$dl = -l\,d\varphi,$$

wo der infinitesimale Faktor $d\varphi$ von der verpflanzten Strecke unabhängig ist; denn jene Verpflanzung bewirkt eine ähnliche Abbildung der Strecken in P auf die Strecken in P'. $d\varphi$ entspricht den $d\gamma^i_r$ der Vektorverschiebungs-Formel (33). Wird die Eichung gemäß der Formel $\bar{l} = \lambda l$ in P und den Punkten seiner Umgebung abgeändert (das Eichverhältnis λ ist eine positive Ortsfunktion), so kommt statt dessen

$$d\bar{l} = -\bar{l}\,d\bar{\varphi}, \qquad \text{wo} \qquad (46) \qquad d\bar{\varphi} = d\varphi - \frac{d\lambda}{\lambda}$$

ist. Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß sich $d\bar{\varphi}$, durch geeignete Wahl von λ, im Punkte P identisch mit Bezug auf die infinitesimale Verschiebung $\overrightarrow{PP'} = (dx_i)$ zu Null machen läßt, ist offenbar die, daß $d\varphi$ eine lineare Differentialform ist:

(45') $$d\varphi = \varphi_i dx_i.$$

Mit (45), (45') sind die Konsequenzen der an die Spitze gestellten Forderung erschöpft. — (In der Tat: die φ_i sind im Punkte P bestimmte Zahlen. Hat

P die Koordinaten $x_i = 0$, so braucht man nur etwa $\lg \lambda$ gleich der linearen Funktion $\Sigma \varphi_i x_i$ zu nehmen, um zu erzielen, daß dort $d\bar{\varphi} = 0$ wird.) — Alle Punkte der Mannigfaltigkeit gleichen einander vollständig hinsichtlich der in ihnen herrschenden Maßbestimmung und der Natur ihres metrischen Zusammenhangs mit der Umgebung. Doch gibt es, je nachdem n gerade oder ungerade ist, $\frac{n}{2} + 1$, bzw. $\frac{n+1}{2}$ verschiedene Arten metrischer Mannigfaltigkeiten, die sich durch den Trägheitsindex der metrischen Fundamentalform voneinander unterscheiden. Die eine Art, die wir hier vorzugsweise im Auge haben, entspricht dem Falle $p = n$, $q = 0$ (oder $p = 0$, $q = n$); daneben sind die Fälle möglich: $p = n - 1$, $q = 1$ (oder $p = 1$, $q = n - 1$); $p = n - 2$, $q = 2$ (oder $p = 2$, $q = n - 2$); usw.

Wir fassen zusammen. *Die Metrik einer Mannigfaltigkeit wird relativ zu einem Bezugssystem* (= Koordinatensystem + Eichung) *charakterisiert durch zwei Fundamentalformen, eine quadratische Differentialform* $Q = \sum_{ik} g_{ik} dx_i dx_k$ *und eine lineare* $d\varphi = \sum_i \varphi_i dx_i$; *sie verhalten sich invariant bei Übergang zu einem neuen Koordinatensystem*; *bei Abänderung der Eichung nimmt die erste einen Faktor* λ *an, der eine positive stetig-differentiierbare Ortsfunktion ist, die zweite vermindert sich um das Differential von* $\lg \lambda$. In alle Größen oder Beziehungen, welche metrische Verhältnisse analytisch darstellen, müssen demnach die Funktionen g_{ik}, φ_i in solcher Weise eingehen, daß Invarianz stattfindet 1. gegenüber beliebiger Koordinatentransformation (»*Koordinaten-Invarianz*«) und 2. gegenüber der Ersetzung von g_{ik}, φ_i durch

$$\lambda \cdot g_{ik}, \qquad \varphi_i - \frac{1}{\lambda}\frac{\partial \lambda}{\partial x_i};$$

letzteres, was für eine positive Funktion der Koordinaten λ auch sein mag (»*Eich-Invarianz*«).

Wie wir in § 15 die Änderung eines Vektors bestimmten, der, sich selbst parallel bleibend, ein unendlichkleines, von den Linienelementen dx_i, δx_i aufgespanntes Parallelogramm umfährt, so haben wir hier die Änderung Δl der Maßzahl l einer Strecke bei dem analogen Prozeß zu berechnen und finden dafür aus $dl = -l\,d\varphi$:

$$\delta dl = -\delta l d\varphi - l \delta d\varphi = l \delta\varphi d\varphi - l \delta d\varphi, \text{ also}$$

$$\Delta l = \delta dl - d\delta l = -l \Delta\varphi, \text{ wo} \tag{47}$$

$$\Delta\varphi = (\delta d - d\delta)\varphi = f_{ik} dx_i \delta x_k, \qquad f_{ik} = \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_k} - \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_i}$$

ist. Der lineare Tensor 2. Stufe mit den Komponenten f_{ik} kann demnach in Analogie zu der in § 15 hergeleiteten »*Vektorkrümmung*« des affinen Raums als »*Streckenkrümmung*« des metrischen Raums bezeichnet werden. Die Gleichung (46) bestätigt analytisch, daß er von der Eichung unabhängig ist; er genügt den invarianten Gleichungen

$$\frac{\partial f_{kl}}{\partial x_i} + \frac{\partial f_{li}}{\partial x_k} + \frac{\partial f_{ik}}{\partial x_l} = 0.$$

Sein Verschwinden ist die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß sich jede Strecke von ihrem Ursprungsort in einer vom Wege unabhängigen Weise nach allen Punkten des Raumes verpflanzen läßt. Dies ist der von Riemann allein ins Auge gefaßte Fall; ist der metrische Raum ein *Riemannscher*, so hat es einen Sinn, von der *gleichen* Strecke in den verschiedenen Punkten des Raumes zu sprechen, die Mannigfaltigkeit läßt sich so eichen (»Normaleichung«), daß $d\varphi$ identisch verschwindet. (In der Tat folgt aus $f_{ik} = 0$, daß $d\varphi$ ein totales Differential, Differential einer Funktion $\lg \lambda$ ist; durch Umeichen mittels des Eichverhältnisses λ läßt sich dann $d\varphi$ überall zu Null machen.) Bei Normaleichung ist im Riemannschen Raum die metrische Fundamentalform Q bis auf einen willkürlichen *konstanten* Faktor bestimmt, den man durch einmalige Wahl einer Streckeneinheit (gleichgültig an welcher Stelle, das Normalmeter läßt sich überallhin transportieren) festlegen kann.

Affiner Zusammenhang eines metrischen Raums. Und nun kommen wir zu jener Tatsache, ich möchte sie die *Grundtatsache der Infinitesimalgeometrie* nennen, welche den Aufbau der Geometrie zu einem wunderbar harmonischen Abschluß bringt. In einem metrischen Raume läßt sich der Begriff der infinitesimalen Parallelverschiebung auf eine und nur eine Weise so fassen, daß er außer unserer früheren Forderung noch die erfüllt (sie ist ja beinahe selbstverständlich): *bei Parallelverschiebung eines Vektors soll auch die durch ihn bestimmte Strecke ungeändert bleiben.* Das der metrischen Geometrie zugrundeliegende Prinzip der infinitesimalen *Strecken- oder Längenübertragung* bringt also ohne weiteres ein solches der *Richtungsübertragung* mit sich; *ein metrischer Raum trägt von Natur einen affinen Zusammenhang.*

Beweis: Wir legen ein Bezugssystem zugrunde. Bei allen Größen a^i, die (vielleicht neben anderen) einen oberen Index, i, tragen, definieren wir das Herunterziehen des Index durch die Gleichungen

$$a_i = \sum_j g_{ij} a^j$$

und den umgekehrten Prozeß des Heraufziehens durch die dazu inversen Gleichungen. Soll der Vektor ξ^i im Punkte $P = (x_i)$ durch die zu erklärende Parallelverschiebung nach $P' = (x_i + dx_i)$ in den Vektor $\xi^i + d\xi^i$ in P' übergehen:

$$d\xi^i = -d\gamma^i_k \xi^k, \qquad d\gamma^i_k = \Gamma^i_{kr} dx_r,$$

so muß dabei für die Maßzahl

$$l = g_{ik} \xi^i \xi^k$$

nach der aufgestellten Forderung die Gleichung gelten

$$dl = -l\, d\varphi,$$

und das ergibt

$$2\xi_i d\xi^i + \xi^i\xi^k dg_{ik} = -(g_{ik}\xi^i\xi^k)d\varphi.$$

Der erste Term links ist

$$= -2\xi_i\xi^k d\gamma^i_k = -2\xi^i\xi^k d\gamma_{ik} = -\xi^i\xi^k(d\gamma_{ik} + d\gamma_{ki});$$

also kommt

$$d\gamma_{ik} + d\gamma_{ki} = dg_{ik} + g_{ik}d\varphi$$

oder

$$\Gamma_{i,kr} + \Gamma_{k,ir} = \frac{\partial g_{ik}}{\partial x_r} + g_{ik}\varphi_r. \tag{48}$$

Nehmen wir in dieser Gleichung mit den Indizes ikr die drei zyklischen Vertauschungen vor, addieren die beiden letzten und subtrahieren davon die erste, so ergibt sich unter Berücksichtigung des Umstandes, daß die Γ in ihren beiden hinteren Indizes symmetrisch sein müssen, das Resultat

$$\Gamma_{r,ik} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{ir}}{\partial x_k} + \frac{\partial g_{kr}}{\partial x_i} - \frac{\partial g_{ik}}{\partial x_r}\right) + \frac{1}{2}(g_{ir}\varphi_k + g_{kr}\varphi_i - g_{ik}\varphi_r), \tag{49}$$

und daraus bestimmen sich die Γ^r_{ik} gemäß der Gleichung

$$\Gamma_{r,ik} = g_{rs}\Gamma^s_{ik} \quad \text{oder aufgelöst} \quad \Gamma^r_{ik} = g^{rs}\Gamma_{s,ik}. \tag{50}$$

Diese Komponenten des affinen Zusammenhangs aber erfüllen alle aufgestellten Forderungen. Mit dem durch sie gegebenen affinen Zusammenhang ist der metrische Raum »von Natur« ausgestattet; und es überträgt sich dadurch auf ihn die ganze Analysis der Tensoren und Tensordichten samt allen früher entwickelten Begriffen wie geodätische Linie, Krümmung usw. Verschwindet die Krümmung identisch, so ist der Raum ein metrisch-Euklidischer im Sinne des Kap. I.

Für die »*Vektorkrümmung*« haben wir hier noch eine wichtige *additive Zerlegung* herzuleiten, durch welche die Streckenkrümmung als ein in ihr enthaltener Bestandteil nachgewiesen wird. Das ist ja nur natürlich, da die Vektorübertragung automatisch die Streckenübertragung mitvollzieht. Benutzen wir das auf die Parallelverschiebung bezügliche Symbol $\Delta = \delta d - d\delta$ wie früher, so gilt, wie wir sahen, für die Maßzahl l eines Vektors ξ^i:

$$\Delta l = -l\Delta\varphi, \qquad \Delta(\xi_i\xi^i) = -(\xi_i\xi^i)\Delta\varphi. \tag{47}$$

Genau so, wie wir gefunden hatten, daß, wenn f_i irgendwelche Ortsfunktionen sind,

$$\Delta(f_i\xi^i) = f_i\Delta\xi^i$$

ist, erkennen wir, daß

$$\Delta(\xi_i\xi^i) = \Delta(g_{ik}\xi^i\xi^k) = g_{ik}\Delta\xi^i\cdot\xi^k + g_{ik}\xi^i\cdot\Delta\xi^k = 2\xi_i\Delta\xi^i;$$

und die Gleichung (47) liefert dann folgendes Ergebnis: setzt man für den Vektor $\mathfrak{x} = (\xi^i)$:

$$\Delta\mathfrak{x} = {}^*\Delta\mathfrak{x} - \mathfrak{x}\cdot\tfrac{1}{2}\Delta\varphi,$$

so erscheint $\Delta\mathfrak{x}$ in eine zu $\mathfrak{x}$ *senkrechte* und eine zu $\mathfrak{x}$ *parallele* Kom-

ponente $^*\Delta\mathfrak{x}$ bzw. $-\mathfrak{x}\cdot\frac{1}{2}\Delta\varphi$ zerspalten. Damit geht eine analoge Zerlegung des Krümmungstensors Hand in Hand:

$$F^{\alpha}_{\beta ik} = {}^*F^{\alpha}_{\beta ik} - \tfrac{1}{2}\delta^{\alpha}_{\beta} f_{ik}. \tag{51}$$

Hier wird man den ersten Bestandteil $^*F$ als »*Richtungskrümmung*« bezeichnen; sie ist erklärt durch

$$^*\Delta\mathfrak{x} = {}^*F^{\alpha}_{\beta ik}\, \mathfrak{e}_{\alpha}\, \xi^{\beta}\, dx_i\, \delta x_k.$$

Daß $^*\Delta\mathfrak{x}$ senkrecht zu $\mathfrak{x}$ ist, spricht sich in der Formel aus:

$$^*F^{\alpha}{}_{\beta ik}\, \xi_{\alpha}\, \xi^{\beta}\, dx_i\, \delta x_k = {}^*F_{\alpha\beta ik}\, \xi^{\alpha}\, \xi^{\beta}\, dx_i\, \delta x_k = 0.$$

Das System der Zahlen $^*F_{\alpha\beta ik}$ ist also nicht bloß in bezug auf i und k, sondern auch in dem Indexpaar α, β schiefsymmetrisch. Daraus folgt noch, daß insbesondere

$$^*F^{\alpha}_{\alpha ik} = 0$$

ist.

Zusätze. Wählt man Koordinatensystem und Eichung in der Umgebung eines Punktes P so, daß sie in P geodätisch sind, dann gilt dort $\varphi_i = 0$, $\Gamma^r_{ik} = 0$ oder, was nach (48) und (49) auf dasselbe hinauskommt,

$$\varphi_i = 0;\quad \frac{\partial g_{ik}}{\partial x_r} = 0:$$

die Linearform $d\varphi$ verschwindet in P und die Koeffizienten der quadratischen Fundamentalform werden stationär; mit andern Worten, es treten im Punkte P diejenigen Verhältnisse ein, die sich im Euklidischen Raum durch ein einziges Bezugssytem simultan für alle Punkte erreichen lassen. Es ergibt sich daraus noch folgende explizite Erklärung der Parallelverschiebung eines Vektors im metrischen Raum: Ein geodätisches Bezugssystem in P erkennt man daran, daß relativ zu ihm die φ_i in P verschwinden und die g_{ik} stationäre Werte annehmen. Ein Vektor wird vom Punkte P nach dem unendlichen benachbarten P' parallel mit sich verschoben, indem man seine Komponenten *in einem zu P gehörigen geodätischen Bezugssystem* ungeändert läßt. (Es gibt stets geodätische Bezugssysteme; die Willkür in der Wahl eines solchen hat auf den Begriff der Parallelverschiebung keinen Einfluß.)

Da bei einer *Translation* $x_i = x_i(s)$ der Geschwindigkeitsvektor $u^i = \frac{dx_i}{ds}$ parallel mit sich fortwandert, gilt für sie in der metrischen Geometrie:

$$\frac{d(u_i u^i)}{ds} + (u_i u^i)(\varphi_i u^i) = 0. \tag{52}$$

Haben in einem Moment die u^i solche Werte, daß $u_i u^i = 0$ ist (ein Fall, der eintreten kann, wenn die quadratische Fundamentalform Q indefinit ist), so bleibt diese Gleichung während der ganzen Translation erhalten; die Bahn einer derartigen Translation bezeichnen wir als *geodätische*

Nullinie. Die geodätischen Nullinien ändern sich, wie eine kurze Rechnung zeigt, nicht, wenn man, die Maßbestimmung in jedem Punkte festhaltend, den metrischen Zusammenhang der Mannigfaltigkeit irgendwie ändert.

Tensorkalkül. Zum Begriffe des Tensors gehört es, daß seine Komponenten *nur vom Koordinatensystem*, nicht von der Eichung abhängig sind. In übertragenem und erweitertem Sinne wollen wir aber von einem Tensor auch dann sprechen, wenn eine von Koordinatensystem *und Eichung* abhängige Linearform vorliegt, die sich beim Übergang von einem zum andern Koordinatensystem in der alten Weise transformiert, bei Abänderung der Eichung aber den Faktor λ^e annimmt (λ = Eichverhältnis); wir sagen dann, er sei vom *Gewichte* e. So sind die g_{ik} die Komponenten eines symmetrischen kovarianten Tensors 2. Stufe vom Gewichte 1. Wo von Tensoren ohne näheren Zusatz die Rede ist, versteht es sich von selbst, daß diejenigen vom Gewichte 0 gemeint sind. Die in der Tensoranalysis besprochenen Beziehungen sind von Eichung und Koordinatensystem unabhängige Relationen zwischen Tensoren und Tensordichten *in diesem eigentlichen Sinne.* Den erweiterten Tensorbegriff wie auch den analogen der Tensordichte vom Gewichte e sehen wir nur als einen Hilfsbegriff an, den wir lediglich um seiner rechnerischen Bequemlichkeit willen einführen. Diese Bequemlichkeit aber beruht darauf, daß 1) erst in diesem erweiterten Reich das »*Jonglieren mit Indizes*« möglich ist: durch Herabziehen eines kontravarianten Index an den Komponenten eines Tensors vom Gewichte e entstehen die hinsichtlich dieses Index kovarianten Komponenten eines Tensors vom Gewichte $e + 1$; und umgekehrt. 2) Es bedeute g die Determinante der g_{ik}, noch mit dem Vorzeichen + oder — versehen, je nachdem die Anzahl q der negativen Dimensionen gerade oder ungerade ist, und $\sqrt{g}$ die positive Wurzel aus dieser positiven Zahl g; dann *entsteht aus jedem Tensor durch Multiplikation mit* $\sqrt{g}$ *eine Tensordichte, deren Gewicht um* $\frac{n}{2}$ *höher ist*; aus einem Tensor vom Gewichte $-\frac{n}{2}$ insbesondere eine Tensordichte im eigentlichen Sinne. Der Beweis beruht auf der sofort einleuchtenden Tatsache, daß $\sqrt{g}$ selber eine skalare Dichte vom Gewichte $\frac{n}{2}$ ist. Die Multiplikation mit $\sqrt{g}$ deuten wir stets dadurch an, daß wir den zur Bezeichnung einer Größe verwendeten lateinischen Buchstaben in den entsprechenden deutschen verwandeln. — Da in der Riemannschen Geometrie durch Normaleichung die quadratische Fundamentalform Q vollständig bestimmt ist (von dem willkürlichen *konstanten* Faktor braucht nicht weiter die Rede zu sein), fällt hier der Unterschied des Gewichts von Tensoren hinweg; da sich dann jede Größe, die durch einen Tensor darstellbar ist, auch durch diejenige Tensordichte repräsentieren läßt, die aus ihm durch Multiplikation mit $\sqrt{g}$ entspringt, verwischt sich dort der Unterschied zwischen Tensoren und Tensordichten (ebenso wie der zwischen kovariant und kontravariant). Daher ist es verständlich, wenn lange Zeit das Eigenrecht der Tensordichten neben den Tensoren nicht zur Geltung gekommen ist.

Der Tensorrechnung bedienen wir uns in der Geometrie hauptsächlich zum *internen* Gebrauch, d. h. zur Herstellung von Feldern, die invariant aus der Metrik selber entspringen. Dafür ein paar Beispiele, die später von großer Wichtigkeit werden! Die metrische Mannigfaltigkeit sei $(3+1)$-dimensional und demnach $-g$ die Determinante der g_{ik}. In diesem Raum ist (wie in jedem andern) die Streckenkrümmung mit den Komponenten f_{ik} ein lineares Tensorfeld 2. Stufe im eigentlichen Sinne. Aus ihm entspringt der kontravariante Tensor f^{ik} vom Gewichte -2, der wegen seiner von 0 verschiedenen Gewichtszahl ohne wirkliche Bedeutung ist; aber durch Multiplikation mit $\sqrt{g}$ erhalten wir in $\mathfrak{f}^{ik}$ eine lineare Tensordichte 2. Stufe im eigentlichen Sinne.

$$\mathfrak{l} = \tfrac{1}{4} f_{ik} \mathfrak{f}^{ik} \tag{53}$$

ist die einfachste skalare Dichte, die sich bilden läßt, und $\int \mathfrak{l}\, dx$ also die einfachste, mit der Metrik einer $(3+1)$-dimensionalen Mannigfaltigkeit verknüpfte Integralinvariante. Hingegen ist das in der Riemannschen Geometrie als »Volumen« auftretende Integral $\int \sqrt{g}\, dx$ in der allgemeinen Geometrie völlig bedeutungslos. Aus $\mathfrak{f}^{ik}$ können wir noch durch Divergenz die Stromstärke (Vektordichte)

$$\frac{\partial \mathfrak{f}^{ik}}{\partial x_k} = \mathfrak{f}^i$$

erzeugen. — In der *Physik* aber benutzen wir die Tensorrechnung, nicht um den metrischen Zustand, sondern um physikalische Zustandsfelder *im* metrichen Raum, wie z. B. das elektromagnetische, zu beschreiben und ihre Gesetze aufzustellen. Nun wird sich freilich am letzten Ziel unserer Untersuchung herausstellen, daß diese Unterscheidung zwischen Geometrie und Physik ein Irrtum ist, daß die Physik gar nicht über die Geometrie hinausragt; die Welt ist eine $(3+1)$-dimensionale metrische Mannigfaltigkeit, und alle in ihr sich abspielenden physikalischen Erscheinungen sind nur Äußerungsweisen des metrischen Feldes; insbesondere ist der affine Zusammenhang der Welt nichts anderes wie das Gravitationsfeld, die in ihr herrschende Metrik aber bringt den Zustand des die Welt erfüllenden »Äthers« zum Ausdruck; selbst die Materie bleibt von dieser Geometrisierung nicht verschont und verliert den Charakter einer beharrenden Substanz. Es bewahrheitet sich, was Clifford bereits 1875 in einem Artikel der Fortnightly Review mit merkwürdiger Bestimmtheit voraussagte: The theory of space-curvature 'hints at a possibility of describing matter and motion in terms of extension only.

Doch das ist jetzt noch Zukunftsmusik; vorerst bleiben wir dabei, die physikalischen Zustände als Fremdzustände im Raume zu betrachten. Nachdem der Aufbau der Infinitesimalgeometrie abgeschlossen ist, sammeln wir im nächsten Paragraphen noch eine Reihe von Bemerkungen über den Spezialfall des Riemannschen Raumes und allerlei Formeln, von denen später Gebrauch zu machen sein wird.

§ 17. Bemerkungen über den Spezialfall des Riemannschen Raums.

Die allgemeine Tensoranalysis ist bereits in der Euklidischen Geometrie von großem Nutzen, wenn man Rechnungen nicht in einem Cartesischen oder affinen, sondern in einem krummlinigen Koordinatensystem durchzuführen hat, wie das in der mathematischen Physik häufig der Fall ist. Um diese Verwendung des Tensorkalküls zu illustrieren, wollen wir die Grundgleichungen für das elektrostatische Feld und das Magnetfeld stationärer Ströme hier in allgemeinen krummlinigen Koordinaten hinschreiben.

Es seien zunächst E_i die Komponenten der elektrischen Feldstärke in einem Cartesischen Koordinatensystem; indem man die von der Wahl des Cartesischen Koordinatensystems $x_1 x_2 x_3$ unabhängige quadratische und lineare Differentialform

$$ds^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2, \quad \text{bzw.} \quad E_1 dx_1 + E_2 dx_2 + E_3 dx_3$$

auf beliebige krummlinige (wiederum mit x_i bezeichnete) Koordinaten transformiert, mögen sie übergehen in

$$ds^2 = g_{ik}\, dx_i\, dx_k \quad \text{und} \quad E_i\, dx_i.$$

Dann sind E_i in jedem Koordinatensystem die Komponenten desselben kovarianten Vektorfeldes. Aus ihm bilden wir eine Vektordichte mit den Komponenten

$$\mathfrak{E}^i = \sqrt{g} \cdot g^{ik} E_k \qquad (g = |g_{ik}|).$$

Das Potential $-\varphi$ transformieren wir als einen Skalar auf die neuen Koordinaten; die Dichte ϱ der Elektrizität aber definieren wir durch die Festsetzung, daß die in irgend einem Raumstück enthaltene elektrische Ladung $= \int \varrho\, dx_1 dx_2 dx_3$ sei; dann ist ϱ kein Skalar, sondern eine skalare Dichte. Die Gesetze lauten:

$$(54) \quad \left\{ \begin{array}{l} E_i = \dfrac{\partial \varphi}{\partial x_i}, \quad \text{bzw.} \quad \dfrac{\partial E_i}{\partial x_k} - \dfrac{\partial E_k}{\partial x_i} = 0, \\[2ex] \qquad \dfrac{\partial \mathfrak{E}^i}{\partial x_i} = \varrho; \\[2ex] \text{und } \mathfrak{S}_i^k = E_i \mathfrak{E}^k - \tfrac{1}{2}\delta_i^k \mathfrak{S}, \quad \text{wo} \quad \mathfrak{S} = E_i \mathfrak{E}^i, \end{array} \right.$$

sind die Komponenten einer gemischten Tensordichte 2. Stufe, der Spannung. — Zum Beweise genügt die Bemerkung, daß diese Gleichungen, so wie wir sie hingeschrieben haben, absolut invarianten Charakter besitzen, für ein Cartesisches Koordinatensystem aber in die früher aufgestellten Grundgleichungen übergehen.

Das Magnetfeld stationärer Ströme hatten wir in den Cartesischen Koordinatensystemen durch eine invariante schiefsymmetrische Bilinearform $H_{ik}\, dx_i \delta x_k$ charakterisiert. Indem wir sie auf beliebige krummlinige Koordinaten transformieren, erhalten wir in H_{ik} die gegenüber beliebigen

Koordinatentransformationen kovarianten Komponenten eines linearen Tensorfeldes 2. Stufe, des »Magnetfeldes«. Ähnlich ermitteln wir die Komponenten φ_i des Vektorpotentials, als eines kovarianten Vektorfeldes, in einem beliebigen krummlinigen Koordinatensystem. Außerdem führen wir eine lineare Tensordichte 2. Stufe ein durch die Gleichungen

$$\mathfrak{H}^{ik} = \sqrt{g} \cdot g^{i\alpha} g^{k\beta} H_{\alpha\beta}.$$

Die Gesetze lauten dann

$$(55) \quad \begin{cases} H_{ik} = \dfrac{\partial \varphi_i}{\partial x_k} - \dfrac{\partial \varphi_k}{\partial x_i}, \quad \text{bzw.} \quad \dfrac{\partial H_{kl}}{\partial x_i} + \dfrac{\partial H_{li}}{\partial x_k} + \dfrac{\partial H_{ik}}{\partial x_l} = 0, \\ \dfrac{\partial \mathfrak{H}^{ik}}{\partial x_k} = \mathfrak{s}^i; \\ \mathfrak{S}_i^k = H_{ir} \mathfrak{H}^{kr} - \frac{1}{2} \delta_i^k \mathfrak{S}, \quad \mathfrak{S} = \frac{1}{2} H_{ik} \mathfrak{H}^{ik}. \end{cases}$$

$\mathfrak{s}^i$ sind die Komponenten einer Vektordichte, der »elektrischen Stromstärke«; die Spannungen $\mathfrak{S}_i^k$ haben den gleichen Invarianzcharakter wie im elektrischen Felde. — Man spezialisiere diese Formeln z. B. für den Fall der Kugel- und Zylinderkoordinaten; das ist ohne weitere Rechnungen möglich, sobald man den Ausdruck von ds^2, des Abstandsquadrats zweier Nachbarpunkte, in jenen Koordinaten besitzt, den man durch eine einfache infinitesimal-geometrische Betrachtung gewinnt.

Von größerer prinzipieller Wichtigkeit ist aber dies, daß wir in (54) und (55) die Grundgesetze des stationären elektromagnetischen Feldes bereit haben für den Fall, daß wir aus irgendwelchen Gründen genötigt wären, die Euklidische Geometrie für den physikalischen Raum aufzugeben und durch eine *Riemannsche Geometrie* mit anderer metrischer Fundamentalform zu ersetzen. Denn auch unter solchen allgemeineren geometrischen Verhältnissen stellen unsere Gleichungen wegen ihrer invarianten Natur »objektive«, von jedem Koordinatensystem unabhängige Aussagen über den gesetzmäßigen Zusammenhang zwischen Ladung, Strom und Feld dar. Daß sie die natürliche Übertragung der im Euklidischen Raum gültigen Gesetze des stationären elektromagnetischen Feldes sind, darüber ist kein Zweifel möglich; ja, es ist geradezu wunderbar, wie einfach und zwanglos diese Übertragung sich aus dem allgemeinen Tensorkalkül ergibt. Die Frage, ob der Raum Euklidisch ist oder nicht, ist völlig irrelevant für die Gesetze des elektromagnetischen Feldes. Die »Euklidizität« drückt sich in allgemein-invarianter Form durch Differentialgleichungen 2. *Ordnung* für die g_{ik} aus (Verschwinden der Krümmung), in diese Gesetze gehen aber nur die g_{ik} und deren 1. Ableitungen ein. — Eine derartig einfache Übertragung ist aber, wohlgemerkt, nur für die *Nahewirkungsgesetze* möglich. Die Herleitung der dem Coulombschen und dem Biot-Savartschen entsprechenden Fernwirkungsgesetze aus diesen Nahewirkungsgesetzen ist eine rein mathematische Aufgabe, die im wesentlichen auf Folgendes hinauskommt: An die Stelle der gewöhnlichen Potentialgleichung $\Delta\varphi = 0$ tritt

in der Riemannschen Geometrie als ihre invariante Verallgemeinerung — siehe (54) — die Gleichung

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\sqrt{g}\cdot g^{ik}\frac{\partial \varphi}{\partial x_k}\right) = 0;$$

d. i. eine lineare Differentialgleichung 2. Ordnung, deren Koeffizienten aber keine Konstanten mehr sind. Von ihr ist die an einer beliebig vorgegebenen Stelle unendlich werdende »Grundlösung« zu ermitteln, welche der Grundlösung $\frac{1}{r}$ der Potentialgleichung entspricht; deren Bestimmung ist ein schwieriges mathematisches Problem, das in der Theorie der partiellen linearen Differentialgleichungen 2. Ordnung behandelt wird. Dieselbe Aufgabe stellt sich auch schon bei Beschränkung auf den Euklidischen Raum ein, wenn man statt der Vorgänge im leeren Raum die in einem inhomogenen Medium (z. B. in einem Medium mit örtlich veränderlicher Dielektrizitätskonstante) zu untersuchen hat.

Nicht so günstig steht es mit der Übertragung der elektromagnetischen Gesetze, wenn sich der wirkliche Raum als ein metrischer von noch allgemeinerer Natur, als es Riemann annahm, herausstellen sollte. Dann dürfen wir nämlich ebensowenig wie von den Strecken von Strom und Ladung die Möglichkeit einer vom Orte unabhängigen Eichung voraussetzen. Es ist unfruchtbar, diesen Gedanken weiter zu verfolgen; die wahre Lösung des Problems liegt nach den Andeutungen am Schluß des vorigen Paragraphen ja doch in ganz anderer Richtung.

Machen wir lieber über den *Spezialfall des Riemannschen Raums* noch einige Bemerkungen! Die Maßeinheit (das cm) sei ein für allemal fest gewählt (natürlich als die gleiche an allen Orten); dann ist seine Metrik beschrieben durch eine invariante quadratische Differentialform $g_{ik}\,dx_i dx_k$ oder, was dasselbe besagt, ein kovariantes symmetrisches Tensorfeld 2. Stufe. In den Formeln der allgemeinen metrischen Geometrie sind überall die Größen φ_i, die jetzt $= 0$ sind, zu streichen. So bestimmen sich die Komponenten des affinen Zusammenhangs, die hier »*Christoffelsche Dreiindizessymbole*« heißen und mit $\left\{ {ik \atop r} \right\}$ bezeichnet zu werden pflegen, aus

$$(56)\qquad \begin{bmatrix} ik \\ r \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{ir}}{\partial x_k} + \frac{\partial g_{kr}}{\partial x_i} - \frac{\partial g_{ik}}{\partial x_r}\right), \qquad \left\{ {ik \atop r} \right\} = g^{rs}\begin{bmatrix} ik \\ s \end{bmatrix}.$$

(Wir fügen uns diesem Brauch, so schlecht sich die Bezeichnungsweise unsern Regeln über Indexstellung anpaßt, um die Übereinstimmung mit der Literatur aufrecht zu erhalten.)

Für spätere Rechnungen notieren wir die folgenden Formeln

$$(57)\qquad \frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial \sqrt{g}}{\partial x_i} - \left\{ {ir \atop r} \right\} = 0,$$

$$(57')\qquad \frac{1}{\sqrt{g}}\frac{(\partial \sqrt{g}\cdot g^{ik})}{\partial x_k} + \left\{ {rs \atop i} \right\} g^{rs} = 0,$$

(57'') $$\frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial(\sqrt{g} \cdot g^{ik})}{\partial x_l} + \left\{ {lr \atop i} \right\} g^{rk} + \left\{ {lr \atop k} \right\} g^{ri} - \left\{ {lr \atop r} \right\} g^{ik} = 0.$$

Sie gelten, weil $\sqrt{g}$ eine skalare, $\sqrt{g} \cdot g^{ik}$ eine Tensordichte ist und daher nach den Regeln der Tensordichten-Analysis die mit $\sqrt{g}$ multiplizierten linken Seiten dieser Gleichungen ebenfalls Tensordichten sind. Benutzen wir aber ein im Punkte P geodätisches Koordinatensystem $\left(\frac{\partial g^{ik}}{\partial x_r} = 0\right)$, so wird alles zu Null; folglich gelten die Gleichungen wegen ihres invarianten Charakters auch in jedem andern Koordinatensystem. Ferner ist

(58) $$\frac{dg}{g} = g^{ik} dg_{ik}, \qquad \frac{d\sqrt{g}}{\sqrt{g}} = \frac{1}{2} g^{ik} dg_{ik}.$$

Denn das totale Differential einer Determinante von n^2 (unabhängig veränderlichen) Elementen g_{ik} ist $= G^{ik} dg_{ik}$, wo G^{ik} die zum Element g_{ik} gehörige Unterdeterminante bedeutet. — Ist $\mathfrak{t}^{ik}$ $(= \mathfrak{t}^{ki})$ irgendein symmetrisches System von Zahlen, so ist stets

(59) $$\mathfrak{t}^{ik} dg_{ik} = -\mathfrak{t}_{ik} dg^{ik}.$$

Denn aus

$$g_{ij} g^{jk} = \delta_i^k$$

folgt

$$g_{ij} dg^{jk} = - g^{jk} dg_{ij}.$$

Multipliziert man diese Gleichungen mit $\mathfrak{t}_k^i$ (die Bezeichnung ist nicht mißzuverstehen, da

$$\mathfrak{t}^i{}_k = g_{kl} \mathfrak{t}^{il} = g_{kl} \mathfrak{t}^{li} = \mathfrak{t}_k{}^i),$$

so ergibt sich die Behauptung. Insbesondere kann man statt (58) auch schreiben

(58') $$\frac{dg}{g} = - g_{ik} dg^{ik}.$$

Die kovarianten *Krümmungskomponenten* $R_{\alpha\beta ik}$ genügen im Riemannschen Raum, in welchem wir den Buchstaben R statt F verwenden, den Symmetriebedingungen:

$$R_{\alpha\beta ki} = - R_{\alpha\beta ik}, \qquad R_{\beta\alpha ik} = - R_{\alpha\beta ik},$$
$$R_{\alpha\beta ik} + R_{\alpha ik\beta} + R_{\alpha k\beta i} = 0,$$

(denn die »Streckenkrümmung« verschwindet). Es ist leicht zu zeigen, daß aus ihnen noch die weitere folgt[11])

$$R_{ik\alpha\beta} = R_{\alpha\beta ik}.$$

Diese Bedingungen zusammen lehren nach einer Bemerkung auf S. 51, daß der Krümmungstensor vollständig charakterisiert werden kann durch die von einem willkürlichen Flächenelement abhängige quadratische Form

$$\frac{1}{4} R_{\alpha\beta ik} \Delta x_{\alpha\beta} \Delta x_{ik} \qquad (\Delta x_{ik} = dx_i \delta x_k - dx_k \delta x_i).$$

Dividiert man sie durch das Quadrat der Größe des Flächenelements, so hängt der Quotient nur von dem Verhältnis der Δx_{ik}, d. i. der Stellung des Flächenelements ab; diese Zahl nennt Riemann die Krümmung des Raumes an der Stelle P in der betreffenden Flächenrichtung. Im zweidimensionalen Riemannschen Raum (auf einer Fläche) gibt es nur eine Flächenrichtung, und der Tensor reduziert sich auf einen Skalar (Gaußsche Krümmung). In der Einsteinschen Gravitationstheorie wird der verjüngte Tensor 2. Stufe

$$R^{\alpha}_{i\alpha k} = R_{ik},$$

der im Riemannschen Raum symmetrisch ist, von Wichtigkeit; seine Komponenten lauten

$$R_{ik} = \frac{\partial}{\partial x_r}\left\{{ik \atop r}\right\} - \frac{\partial}{\partial x_k}\left\{{ir \atop r}\right\} + \left\{{ik \atop r}\right\}\left\{{rs \atop s}\right\} - \left\{{ir \atop s}\right\}\left\{{ks \atop r}\right\}. \tag{60}$$

Nur der zweite Term auf der rechten Seite läßt hier die Symmetrie in bezug auf i und k nicht unmittelbar erkennen; er ist aber nach (57)

$$= \frac{1}{2}\frac{\partial^2 (\lg g)}{\partial x_i \partial x_k}.$$

Endlich können wir durch abermalige Verjüngung noch den *Krümmungs-Skalar*

$$R = g^{ik} R_{ik}$$

bilden. — Im allgemeinen metrischen Raum drückt sich der analog gebildete Krümmungsskalar F durch den nur von den g_{ik} abhängigen Riemannschen Ausdruck R, der dort keine selbständige Bedeutung hat, wie eine leichte Rechnung lehrt, folgendermaßen aus:

$$F = R - (n-1)\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial(\sqrt{g}\,\varphi^i)}{\partial x_i} - \frac{(n-1)(n-2)}{4}(\varphi_i \varphi^i). \tag{61}$$

F ist ein Skalar vom Gewichte -1. In einem Gebiet, in welchem $F \neq 0$ ist, kann man daher durch die Gleichung $F =$ konst. eine Längeneinheit festsetzen. Das ist merkwürdig, da es in einem gewissen Gegensatz steht zu der ursprünglichen Auffassung der Längenübertragung im allgemeinen metrischen Raum, nach welcher ein direkter Fernvergleich von Längen nicht möglich sein soll; man beachte aber, daß das hier erwähnte Längenmaß abhängig ist von den Krümmungsverhältnissen der Mannigfaltigkeit. (Im Grunde ist die Existenz einer solchen ausgezeichneten einheitlichen Eichung ebensowenig verwunderlich wie die Möglichkeit, in einem Riemannschen Raum gewisse auf Grund der Metrik ausgezeichnete Koordinatensysteme einzuführen.) Das mit dieser Längeneinheit gemessene »Volumen« wird durch das invariante Integral

$$\int \sqrt{g \cdot F^n}\, dx \tag{62}$$

dargestellt.

Im metrischen Raum gilt für zwei Vektoren ξ^i, η^i bei Parallelverschiebung

$$d(\xi_i \eta^i) + (\xi_i \eta^i)\, d\varphi = 0,$$

im Riemannschen fällt das zweite Glied weg. Daraus folgt, daß sich im Riemannschen Raum die Parallelverschiebung eines kontravarianten Vektors ξ in den Größen $\xi_i = g_{ik}\xi^k$ genau so ausdrückt wie die Parallelverschiebung eines kovarianten Vektors in seinen Komponenten ξ_i:

$$d\xi_i - \left\{{i\alpha \atop \beta}\right\} dx_\alpha\, \xi_\beta = 0 \quad \text{oder} \quad d\xi_i - \begin{bmatrix} i\alpha \\ \beta \end{bmatrix} dx_\alpha\, \xi^\beta = 0.$$

Für eine Translation gilt demnach

$$\frac{du_i}{ds} - \frac{1}{2}\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x_i} u^\alpha u^\beta = 0 \quad \left(u^i = \frac{dx_i}{ds},\ u_i = g_{ik} u^k\right); \tag{63}$$

denn es ist — Gl. (48) —

$$\begin{bmatrix} i\alpha \\ \beta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} i\beta \\ \alpha \end{bmatrix} = \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x_i}$$

und daher für irgend ein symmetrisches System von Zahlen $t^{\alpha\beta}$:

$$\frac{1}{2}\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x_i}\cdot t^{\alpha\beta} = \begin{bmatrix} i\alpha \\ \beta \end{bmatrix} t^{\alpha\beta} = \begin{Bmatrix} i\alpha \\ \beta \end{Bmatrix} t^{\alpha}_{\beta}. \tag{64}$$

Da die Maßzahl des Geschwindigkeitsvektors während der Translation ungeändert bleibt, gilt

$$g_{ik}\frac{dx_i}{ds}\frac{dx_k}{ds} = u_i u^i = \text{konst.} \tag{65}$$

Setzen wir die metrische Fundamentalform der Einfachheit halber als positiv-definit voraus, so kommt jeder Kurve $x_i = x_i(s)[a \leqq s \leqq b]$ eine (von der Parameterdarstellung unabhängige) *Länge* zu:

$$\int_a^b \sqrt{Q}\,ds \qquad \left(Q = g_{ik}\frac{dx_i}{ds}\frac{dx_k}{ds}\right).$$

Benutzt man die Bogenlänge selbst als Parameter, so wird $Q = 1$. Die Gleichung (65) sagt aus, daß eine Translation ihre Bahnkurve, die geodätische Linie, mit konstanter Geschwindigkeit durchläuft, daß nämlich der Zeitparameter s der Bogenlänge proportional ist. Die geodätische Linie besitzt im Riemannschen Raum nicht nur die Differentialeigenschaft, ihre Richtung unverändert beizubehalten, sondern auch *die Integraleigenschaft, daß jedes Stück von ihr kürzeste Verbindungslinie seines Anfangs- und Endpunktes ist.* Doch ist diese Aussage nicht ganz wörtlich zu verstehen, sondern in demselben Sinne, wie wir etwa in der Mechanik sagen, daß im Gleichgewicht die potentielle Energie ein Minimum ist, oder von einer Funktion $f(xy)$ zweier Variablen sagen, sie habe dort ein Minimum, wo ihr Differential

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy$$

identisch in dx, dy verschwindet; während es in Wahrheit heißen muß, daß sie dort einen »stationären« Wert annimmt, der sowohl ein Minimum wie ein Maximum wie auch ein »Sattelwert« sein kann. Die geodätische Linie ist nicht notwendig eine Kurve kürzester, wohl aber eine Kurve stationärer Länge. Auf der Kugeloberfläche z. B. sind die größten Kreise die geodätischen Linien; nehmen wir auf einem solchen Kreis zwei Punkte A und B an, so ist der kleinere der beiden Bögen AB zwar in der Tat kürzeste Verbindungslinie von A und B; aber auch der andere Bogen ist eine geodätische Verbindungslinie von A und B, er hat nicht kürzeste, sondern stationäre Länge. — Wir benutzen diese Gelegenheit, um in strenger Form das Prinzip der unendlichkleinen Variation darzulegen.

Gegeben sei eine beliebige Kurve in Parameterdarstellung

$$x_i = x_i(s), \qquad (a \leqq s \leqq b)$$

die »Ausgangskurve«. Um sie mit Nachbarkurven zu vergleichen, betrachten wir ferner eine beliebige einparametrige Kurvenschar

$$x_i = x_i(s; \varepsilon) \qquad (a \leqq s \leqq b)$$

Der Parameter ε variiert in einem Intervall um $\varepsilon = 0$; $x_i(s; \varepsilon)$ sollen Funktionen sein, die sich für $\varepsilon = 0$ auf $x_i(s)$ reduzieren. Da alle Kurven der Schar den gleichen Anfangspunkt mit dem gleichen Endpunkt verbinden sollen, sind $x_i(a; \varepsilon)$ und $x_i(b; \varepsilon)$ unabhängig von ε. Die Länge einer solchen Kurve ist gegeben durch

$$L(\varepsilon) = \int_a^b \sqrt{Q}\, ds .$$

Wir nehmen noch an, daß s für die Ausgangskurve die Bogenlänge bedeutet, somit $Q = 1$ ist für $\varepsilon = 0$. Die Richtungskomponenten $\frac{dx_i}{ds}$ für die Ausgangskurve $\varepsilon = 0$ mögen mit u^i bezeichnet werden. Wir setzen ferner

$$\varepsilon \cdot \left(\frac{dx_i}{d\varepsilon}\right)_{=0} = \xi^i(s) = \delta x_i ;$$

das sind die Komponenten der »unendlich kleinen« Verschiebung, durch welche die Ausgangskurve in die einem unendlich kleinen Wert von ε entsprechende »variierte« Nachbarkurve übergeht; sie verschwinden an den Enden.

$$\varepsilon \left(\frac{dL}{d\varepsilon}\right)_{\varepsilon=0} = \delta L$$

ist die zugehörige Variation der Länge. $\delta L = 0$ ist die Bedingung dafür, daß die Ausgangskurve in der Kurvenschar stationäre Länge besitzt. Wenden wir das Zeichen δQ im gleichen Sinne an, so ist

$$(66) \qquad \delta L = \int_a^b \frac{\delta Q}{2\sqrt{Q}}\, ds = \tfrac{1}{2} \int_a^b \delta Q\, ds ,$$

da für die Ausgangskurve $Q = 1$ ist. Es gilt

$$\frac{dQ}{d\varepsilon} = \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x_i} \frac{dx_i}{d\varepsilon} \frac{dx_\alpha}{ds} \frac{dx_\beta}{ds} + 2 g_{ik} \frac{dx_k}{ds} \frac{d^2 x_i}{d\varepsilon\, ds}$$

und also (im zweiten Glied werden »Variation« und »Differentiation«, d. h. die Differentiationen nach ε und s vertauscht)

$$\delta Q = \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x_i} u^\alpha u^\beta \xi^i + 2 g_{ik} u^k \frac{d\xi^i}{ds} .$$

Setzen wir dies in (66) ein und formen das zweite Glied durch eine partielle Integration um unter Berücksichtigung des Umstandes, daß die ξ^i an den Enden des Integrationsintervalls verschwinden, so kommt

$$\delta L = \int_a^b \left(\tfrac{1}{2} \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x_i} u^\alpha u^\beta - \frac{du_i}{ds}\right) \xi^i\, ds .$$

Die Bedingung $\delta L = 0$ ist demnach dann und nur dann für jede beliebige Kurvenschar erfüllt, wenn (63) gilt. In der Tat, wäre für einen

Wert $s = s_0$ zwischen a und b einer dieser Ausdrücke, z. B. der erste ($i = 1$) von 0 verschieden, etwa > 0, so kann man um s_0 ein so kleines Intervall abgrenzen, daß in ihm jener Ausdruck durchweg > 0 bleibt. Wählt man für ξ^1 eine nicht-negative Funktion, welche außerhalb dieses Intervalls verschwindet, alle übrigen ξ^i aber $= 0$, so kommt ein Widerspruch zu der Gleichung $\delta L = 0$ zustande.

Aus dem Beweise geht noch hervor, daß eine *Translation* unter allen denjenigen Bewegungen, welche während derselben Zeit $a \leqq s \leqq b$ vom selben Anfangspunkt zum selben Endpunkt führen, durch die Eigenschaft ausgezeichnet ist, dem Integral $\int_a^b Q\,ds$ einen stationären Wert zu erteilen. —

Es wird manchen (trotz redlicher Bemühungen des Verfassers um anschauliche Klarheit) entsetzt haben, von welcher Sintflut von Formeln und Indizes hier der leitende Gedanke der Infinitesimalgeometrie überschwemmt wurde. Es ist gewiß bedauerlich, daß wir uns um das rein Formale so ausführlich bemühen und ihm einen solchen Platz einräumen müssen; aber es läßt sich nicht vermeiden. Wie jeder Sprache und Schrift mühsam erlernen muß, ehe er sie mit Freiheit zum Ausdruck seiner Gedanken gebrauchen kann, so ist auch hier der einzige Weg, den Druck der Formeln von sich abzuwälzen, der, das Werkzeug der Tensoranalysis so in seine Gewalt zu bringen, daß man sich durch das Formale unbehindert den wahrhaften Problemen zuwenden kann, die uns beschäftigen: Einsicht in das Wesen von Raum, Zeit und Materie zu gewinnen, sofern sie am Aufbau der objektiven Wirklichkeit beteiligt sind. Für den, der auf solche Ziele aus ist, müßte es eigentlich heißen: das Mathematische versteht sich immer von selbst. Bevor wir nun, nach langwierigen Vorbereitungen und beendeter Ausrüstung, die Fahrt antreten ins Land der physikalischen Erkenntnis, auf den Wegen, die das Genie Einsteins uns gewiesen hat, wollen wir noch zu einer vertieften Auffassung der Raummetrik vorzudringen suchen. Es handelt sich darum, die innere Notwendigkeit und Einzigartigkeit der metrischen Struktur, wie sie im Pythagoreischen Gesetz zum Ausdruck kommt, zu begreifen.

§ 18. Gruppentheoretische Auffassung der Raummetrik.

Während die Natur des affinen Zusammenhangs uns keine Rätsel mehr aufgibt — die an den Begriff der Parallelverschiebung gestellte Forderung auf S. 101, welche sie als eine Art *ungeänderter* Verpflanzung charakterisiert, bestimmt diese Natur völlig eindeutig —, haben wir hinsichtlich der Metrik noch keinen Standpunkt über der Erfahrung gewonnen. Daß sie gerade durch eine quadratische Differentialform beschrieben wird, war als Tatsache hingenommen, aber nicht verstanden. Schon Riemann wies darauf hin, daß als metrische Fundamentalform, zunächst mit demselben Recht, eine homogene Funktion 4. Ordnung der Differentiale oder auch irgend eine anders gebaute Funktion erwartet werden könnte, die nicht

einmal rational von den Differentialen abzuhängen brauchte. Aber selbst da dürfen wir noch nicht Halt machen. Das, was ursprünglich und allgemein die Metrik in einem Punkte P bestimmt, ist die *Gruppe der Drehungen;* die metrische Beschaffenheit der Mannigfaltigkeit im Punkte P ist bekannt, wenn man weiß, welche unter den linearen Abbildungen des Vektorkörpers (d. i. der Gesamtheit aller Vektoren) im Punkte P auf sich selbst *kongruente* Abbildungen sind. Es gibt soviele verschiedene Arten von Maßbestimmungen, als es wesentlich verschiedene Gruppen linearer Transformationen gibt (wobei wesentlich verschieden solche Gruppen sind, die sich nicht bloß durch die Wahl des Koordinatensystems voneinander unterscheiden). Für die bisher allein untersuchte *Pythagoreische Metrik* besteht die Gruppe der Drehungen aus allen linearen Transformationen, welche die quadratische Fundamentalform in sich überführen. Aber an sich brauchte die Drehungsgruppe überhaupt keine Invariante (d. i. eine, von einem einzigen willkürlichen Vektor abhängige Funktion, die bei allen Drehungen ungeändert bleibt) zu besitzen.

Überlegen wir uns, welche Forderungen wir natürlicherweise an den Begriff der Drehung zu stellen haben! In einem einzelnen Punkte können, solange die Mannigfaltigkeit noch keine Maßbestimmung trägt, nur die n-dimensionalen Parallelepipede ihrer Größe nach miteinander verglichen werden. Sind $\mathfrak{a}_i (i = 1, 2, \ldots, n)$ beliebige Vektoren, die sich aus den zugrunde gelegten Einheitsvektoren $\mathfrak{e}_i$ nach den Gleichungen

$$\mathfrak{a}_i = a_i^k \mathfrak{e}_k$$

bestimmen, so ist die Determinante der a_i^k, welche nach Graßmann zweckmäßig mit

$$\frac{[\mathfrak{a}_1 \mathfrak{a}_2 \cdots \mathfrak{a}_n]}{[\mathfrak{e}_1 \mathfrak{e}_2 \cdots \mathfrak{e}_n]}$$

bezeichnet wird, definitionsgemäß das Volumen des von den n Vektoren $\mathfrak{a}_i$ aufgespannten Parallelepipeds. Bei Wahl eines andern Systems von Einheitsvektoren $\bar{\mathfrak{e}}_i$ multiplizieren sich alle Volumina mit einem gemeinsamen konstanten Faktor, wie aus dem »Multiplikationssatz der Determinanten«

$$\frac{[\mathfrak{a}_1 \mathfrak{a}_2 \cdots \mathfrak{a}_n]}{[\mathfrak{e}_1 \mathfrak{e}_2 \cdots \mathfrak{e}_n]} = \frac{[\mathfrak{a}_1 \mathfrak{a}_2 \cdots \mathfrak{a}_n]}{[\bar{\mathfrak{e}}_1 \bar{\mathfrak{e}}_2 \cdots \bar{\mathfrak{e}}_n]} \cdot \frac{[\bar{\mathfrak{e}}_1 \bar{\mathfrak{e}}_2 \cdots \bar{\mathfrak{e}}_n]}{[\mathfrak{e}_1 \mathfrak{e}_2 \cdots \mathfrak{e}_n]}$$

hervorgeht; die Volumina sind also nach Wahl einer Maßeinheit eindeutig und unabhängig vom Koordinatensystem bestimmt. *Eine Drehung muß offenbar, da sie den Vektorkörper »nicht verändern« soll, eine volumtreue Abbildung sein.* Die Drehung, durch welche der Vektor $\mathfrak{x} = (\xi^i)$ allgemein übergeht in $\bar{\mathfrak{x}} = (\bar{\xi}^i)$, werde dargestellt durch die Gleichungen

$$\bar{\mathfrak{e}}_i = a_i^k \mathfrak{e}_k \qquad \text{oder} \qquad \xi^i = a_k^i \bar{\xi}^k.$$

Die Determinante der Drehungsmatrix (a_k^i) wird dann gleich 1 ausfallen. — Betrifft diese Forderung die *einzelne* Drehung, so haben wir von ihrer Gesamtheit zu verlangen, daß sie — im Sinne der auf S. 8 gegebenen

Definition — *eine Gruppe bilden.* Es handelt sich dabei um eine *kontinuierliche* Gruppe, d. h. die Drehungen sind die Elemente einer mehrdimensionalen stetigen Mannigfaltigkeit.

Gehen wir in der Darstellung einer linearen Vektorabbildung durch ihre Matrix $A = (a^i_k)$ von einem Koordinatensystem $(\mathfrak{e}_i)$ zu einem andern $(\bar{\mathfrak{e}}_i)$ über vermöge der Gleichungen

$$U: \bar{\mathfrak{e}}_i = u^k_i \mathfrak{e}_k, \tag{67}$$

so verwandelt sich A in UAU^{-1} (U^{-1} bedeutet die Inverse zu U, UU^{-1} und $U^{-1}U$ sind gleich der Identität E). In eine gegebene Matrixgruppe $\mathfrak{G}$ kann also jede solche Gruppe durch geeignete Abänderung des Koordinatensystems übergeführt werden, welche aus $\mathfrak{G}$ dadurch entsteht, daß man auf jede Matrix G von $\mathfrak{G}$ die Operation UGU^{-1} anwendet (mit demselben U für alle G); von einer derartigen Gruppe $U\mathfrak{G}U^{-1}$ wollen wir sagen, sie sei von der gleichen Art wie $\mathfrak{G}$ (oder sie unterscheide sich von $\mathfrak{G}$ nur durch ihre Orientierung). Ist $\mathfrak{G}$ die Gruppe der Drehungsmatrizen in P und $U\mathfrak{G}U^{-1}$ identisch mit $\mathfrak{G}$ (keineswegs braucht dabei jedes einzelne G durch die Operation UGU^{-1} wieder in G überzugehen, sondern es ist nur gefordert, daß mit G immer auch UGU^{-1} zu $\mathfrak{G}$ gehört), so drückt sich die Metrik in zwei Koordinatensystemen (67), die durch U auseinander hervorgehen, in der gleichen Weise aus; U ist eine Abbildung des Vektorkörpers auf sich selbst, welche alle metrischen Beziehungen ungeändert läßt. Das ist der Begriff der *ähnlichen Abbildung.* $\mathfrak{G}$ ist in der Gruppe $\mathfrak{G}^*$ der ähnlichen Abbildungen als Untergruppe enthalten.

Von der Metrik im einzelnen Punkte kommen wir jetzt zum »*metrischen Zusammenhang*«. Der metrische Zusammenhang des Punktes P_0 mit seiner unmittelbaren Umgebung ist bekannt, wenn man weiß, wann eine lineare Abbildung des Vektorkörpers in $P_0 = (x^0_i)$ auf den Vektorkörper in irgend einem unendlich benachbarten Punkte $P = (x^0_i + dx_i)$ eine *kongruente Verpflanzung* ist. Mit A ist jede Abbildung AG_0, die dem A eine Drehung G_0 in P_0 voraufgehen läßt, gleichfalls eine kongruente Verpflanzung; und zwar erhalten wir so aus einer, A, alle möglichen kongruenten Verpflanzungen des Vektorkörpers von P_0 nach P, indem wir G_0 die zu P_0 gehörige Drehungsgruppe $\mathfrak{G}_0$ durchlaufen lassen. Betrachten wir den zum Zentrum P_0 gehörigen Vektorkörper in zwei zueinander kongruenten Lagen, so werden diese durch dieselbe kongruente Verpflanzung A in zwei kongruente Lagen in P übergehen; daher ist die Drehungsgruppe $\mathfrak{G}$ in P gleich $A\mathfrak{G}_0 A^{-1}$. Aus dem metrischen Zusammenhang ergibt sich also, daß die Drehungsgruppe in P sich von der in P_0 nur durch die Orientierung unterscheidet. Und wenn wir stetig vom Punkte P_0 zu irgend einem Punkte der Mannigfaltigkeit übergehen, so erkennen wir daraus weiter, daß die Drehungsgruppen in allen Punkten der Mannigfaltigkeit von der gleichen Art sind; in dieser Hinsicht herrscht also Homogenität.

Die einzigen kongruenten Verpflanzungen, die wir in Betracht ziehen, sind solche, bei welchen die Vektorkomponenten ξ^i Änderungen $d\xi^i$ er-

fahren, die unendlich klein sind von der gleichen Ordnung wie die Verschiebung des Zentrums P_0:

$$d\xi^i = d\lambda^i_k \cdot \xi^k.$$

Für zwei solche Verpflanzungen L und M von P_0 nach P, die eine mit den Koeffizienten $d\lambda^i_k$, die andere mit den Koeffizienten $d\mu^i_k$, ist dann die Drehung ML^{-1} gleichfalls infinitesimal; sie wird dargestellt durch die Formel

$$(68) \qquad d\xi^i = d\alpha^i_k \cdot \xi^k \quad \text{mit} \quad d\alpha^i_k = d\mu^i_k - d\lambda^i_k.$$

Es wird natürlicherweise folgendes gelten: die Hintereinander-Ausführung einer infinitesimalen kongruenten Verpflanzung durch die Verschiebung (dx_i) des Zentrums P_0 und einer solchen durch die Verschiebung (δx_i) gibt eine kongruente Verpflanzung, welche durch die resultierende Verschiebung $dx_i + \delta x_i$ des Zentrums bewirkt wird (mit einem Fehler, der unendlichklein ist gegenüber der Größe der Verschiebungen). Ist also für den Übergang

$$\text{von } P_0 = (x^0_1, x^0_2, \cdots, x^0_n) \text{ zum Punkte } (x^0_1 + \varepsilon, x^0_2, \cdots, x^0_n)$$

um das unendlichkleine Stück ε in Richtung der ersten Koordinatenachse

$$d\xi^i = \varepsilon \cdot \Lambda^i_{k1}\, \xi^k$$

eine kongruente Verpflanzung, und haben $\Lambda^i_{k2}, \ldots, \Lambda^i_{kn}$ die entsprechende Bedeutung für die Verschiebungen von P_0 in Richtung der 2. bis n^{ten} Koordinate, so wird für eine beliebige Verschiebung mit den Komponenten dx_i durch die Gleichung

$$(69) \qquad d\xi^i = \Lambda^i_{kr}\, dx_r \cdot \xi^k$$

eine kongruente Verpflanzung geliefert.

Unter den verschiedenen Arten metrischer Räume wollen wir nun durch innere einfache Eigenschaften die eine kennzeichnen, zu welcher nach Pythagoras-Riemann der wirkliche Raum gehört. Die mit dem Ort sich nicht verändernde Art der Drehungsgruppe stellt eine Eigenschaft vor, welche dem Raum als Form der Erscheinungen anhaftet; sie charakterisiert das metrische Wesen des Raumes. Durch das Wesen des Raumes *nicht* bestimmt ist aber der metrische Zusammenhang von Punkt zu Punkt*) und damit die gegenseitige Orientierung der Drehungsgruppen in den verschiedenen Punkten der Mannigfaltigkeit. Dieser ist vielmehr abhängig von der materiellen Erfüllung, an sich also frei und beliebiger virtueller Veränderungen fähig. Daß er keiner Einschränkung unterliegt, formulieren wir als erstes Axiom:

I. Das Wesen des Raumes läßt jeden möglichen metrischen Zusammenhang zu.

Möglich ist im Raume demnach ein solcher metrischer Zusammenhang des Punktes P_0 mit den Punkten seiner Umgebung, daß die Formel (69)

*) Obschon auch er, wie sich hernach zeigen wird, überall von der gleichen Art ist.

ein System kongruenter Verpflanzungen nach diesen Nachbarpunkten darstellt *bei beliebig vorgegebenen Zahlen* Λ^i_{kr}.

Jedem Koordinatensystem x_i in P_0 entspricht ein möglicher Begriff der Parallelverschiebung: Transport der Vektoren von P_0 nach den unendlich benachbarten Punkten ohne Änderung der Komponenten in diesem Koordinatensystem. Ein solches System von Parallelverschiebungen des Vektorkörpers von P_0 nach allen unendlich benachbarten Punkten drückt sich in einem bestimmten, ein für allemal fest gewählten Koordinatensystem, wie wir wissen, durch die Formel aus

$$d\xi^i = - d\gamma^i_k \cdot \xi^k \text{ mit Differentialformen } d\gamma^i_k = \Gamma^i_{kr}\, dx_r,$$

welche der Symmetriebedingung

$$\Gamma^i_{kr} = \Gamma^i_{rk} \tag{70}$$

genügen. Und zwar entspricht jedem System symmetrischer Koeffizienten Γ ein möglicher Begriff der Parallelverschiebung. Bei gegebenem metrischen Zusammenhang wird aber die einschränkende Bedingung hinzutreten müssen, daß die »Parallelverschiebungen« zugleich kongruente Verpflanzungen sind. Die zweite Forderung ist nun die, welche wir oben als Fundamentalsatz der Infinitesimalgeometrie ausgesprochen hatten: bei gegebenem metrischen Zusammenhang gibt es stets unter den kongruenten Verpflanzungen des Vektorkörpers *ein einziges* System von Parallelverschiebungen. Den affinen Zusammenhang hatten wir in § 15 nur provisorisch als einen ursprünglichen Charakter des Raumes behandelt; der wahre Sachverhalt ist vielmehr der, daß die Parallelverschiebungen durch innere Eigenschaften aus den kongruenten Verpflanzungen ausgeschieden werden müssen, der Begriff der Parallelverschiebung durch den metrischen Zusammenhang determiniert ist. Wir sprechen diese Forderung so aus:

II. Der metrische Zusammenhang bestimmt eindeutig den affinen.

Bevor wir sie analytisch formulieren können, haben wir uns mit den infinitesimalen Drehungen zu beschäftigen. Eine r-gliedrige kontinuierliche Gruppe $\mathfrak{G}$ ist eine stetige r-dimensionale Mannigfaltigkeit von Matrizen; sind $s_1 s_2 \dots s_r$ Koordinaten auf dieser Mannigfaltigkeit, so entspricht jedem Wertsystem der Koordinaten eine stetig von ihm abhängige Matrix $A(s_1 s_2 \dots s_r)$ der Gruppe. Es gibt ein bestimmtes Wertsystem — wir dürfen voraussetzen: $s_\iota = 0$ —, welchem die Identität E korrespondiert. Die zu E unendlich benachbarten Matrizen der Gruppe unterscheiden sich von E um

$$\mathsf{A}_1\, ds_1 + \mathsf{A}_2\, ds_2 + \cdots + \mathsf{A}_r\, ds_r,$$

wo $\mathsf{A}_\iota = \left(\frac{\partial A}{\partial s_\iota}\right)_0$ ist. Eine Matrix A bezeichnen wir als infinitesimale Operation der Gruppe, wenn in der Gruppe eine (von ε abhängige) Abbildung vorkommt, welche mit $E + \varepsilon \mathsf{A}$ übereinstimmt bis auf einen Fehler, der stärker als ε mit ε gegen 0 konvergiert. Die infinitesimalen Operationen der Gruppe bilden die lineare Schar

$$\mathfrak{g}:\ \lambda_1 \mathsf{A}_1 + \lambda_2 \mathsf{A}_2 + \cdots + \lambda_r \mathsf{A}_r \quad (\lambda_r \text{ beliebige Zahlen}). \tag{71}$$

$\mathfrak{g}$ ist genau r-dimensional, die A sind voneinander linear unabhängig. Denn ist A eine beliebige Matrix der Gruppe, so ergeben sich wegen der Gruppeneigenschaft die zu A unendlich benachbarten Abbildungen der Gruppe aus der Formel $A(E + \varepsilon \mathsf{A})$, wo ε ein infinitesimaler Faktor ist und A die Schar $\mathfrak{g}$ durchläuft. Wäre $\mathfrak{g}$ weniger als r-dimensional, so würde also das Gleiche von der Mannigfaltigkeit an jeder Stelle gelten, es beständen für alle Werte von s_ι zwischen den Ableitungen $\frac{\partial A}{\partial s_\iota}$ lineare Relationen, A hinge in Wahrheit von weniger als r Parametern ab. — Die infinitesimalen Operationen bestimmen und erzeugen die ganze Gruppe. Wenn ich die infinitesimale Abbildung $E + \frac{1}{n}\mathsf{A}$ (n eine unendlich große ganze Zahl) n-mal hintereinander ausführe, erhalte ich eine endlich von E verschiedene Matrix der Gruppe:

$$A = \lim_{n=\infty}\left(E + \frac{1}{n}\mathsf{A}\right)^n = E + \frac{\mathsf{A}}{1!} + \frac{\mathsf{A}^2}{2!} + \frac{\mathsf{A}^3}{3!} + \cdots;$$

und so bekomme ich jede Gruppenmatrix (oder wenigstens jede, die sich innerhalb der Gruppe stetig von der Identität aus erreichen läßt), wenn ich A die ganze Schar $\mathfrak{g}$ durchlaufen lasse. Aber nicht jede, willkürlich vorgegebene lineare Schar (71) liefert auf diesem Wege eine Gruppe, sondern dazu müssen die A_ι eine gewisse Integrabilitätsbedingung erfüllen. Sie ergibt sich ganz analog wie z. B. die Integrabilitätsbedingung für die Parallelverschiebung im Euklidischen Raum. Gehen wir von der Identität $E(s_\iota = 0)$ durch eine infinitesimale Änderung ds_ι der Parameter über zur Nachbarmatrix $A_d = E + dA$, darauf durch eine zweite infinitesimale Änderung δs_ι von A_d zu $A_\delta A_d$ und machen hernach diese beiden Operationen in der gleichen Reihenfolge wieder rückgängig, so erhalten wir in $A_\delta^{-1} A_d^{-1} A_\delta A_d$ eine unendlich wenig von E verschiedene Gruppenmatrix. Sei etwa d die Änderung in Richtung der 1., δ in Richtung der 2. Koordinate, so handelt es sich um die aus

$$A_s = A(s, 0, 0, \cdots, 0) \quad \text{und} \quad A_t = A(0, t, 0, \cdots, 0)$$

gebildete Matrix

$$A_{st} = A_t^{-1} A_s^{-1} A_t A_s.$$

Es ist $A_{s0} = A_{0t} = E$, daher

$$\lim_{s=0,\, t=0} \frac{A_{st} - E}{s \cdot t} = \left(\frac{\partial^2 A_{st}}{\partial s \, \partial t}\right)_{\substack{s=0\\t=0}}.$$

Da A_{st} zur Gruppe gehört, ist dieser Limes eine infinitesimale Operation derselben. Wir finden aber

$$\frac{\partial A_{st}}{\partial t} = -\mathsf{A}_2 + A_s^{-1}\mathsf{A}_2 A_s \quad \text{für} \quad t = 0, \quad \text{daraus}$$

$$\frac{\partial^2 A_{st}}{\partial s \, \partial t} = -\mathsf{A}_1\mathsf{A}_2 + \mathsf{A}_2\mathsf{A}_1 \quad \text{für} \quad t = 0,\ s = 0.$$

Demnach muß

$$\mathsf{A}_1\mathsf{A}_2 - \mathsf{A}_2\mathsf{A}_1, \qquad \text{allgemeiner} \qquad \mathsf{A}_\iota\mathsf{A}_\varkappa - \mathsf{A}_\varkappa\mathsf{A}_\iota$$

eine infinitesimale Operation der Gruppe sein; oder, was dasselbe besagt: Sind A, B zwei infinitesimale Operationen der Gruppe, so ist auch immer $\mathsf{AB} - \mathsf{BA}$ eine solche. Sophus Lie, dem wir überhaupt die Grundbegriffe und Grundtatsachen der Theorie kontinuierlicher Transformationsgruppen verdanken [12], hat gezeigt, daß diese Integrabilitätsbedingung nicht nur notwendig, sondern auch hinreichend ist. Wir können also erklären: *Eine r-dimensionale lineare Schar von Matrizen nennen wir eine r-gliedrige infinitesimale Gruppe, wenn mit irgend zwei Matrizen* A, B *stets auch* $\mathsf{AB} - \mathsf{BA}$ *der Schar angehört.* Durch die Einführung der infinitesimalen Operationen der Gruppe wird das Problem der kontinuierlichen Transformationsgruppen linearisiert.

Wenn alle Abbildungen der Gruppe volumtreu sind, so sind die Spuren der infinitesimalen Operationen $= 0$. Denn die Entwicklung der Determinante von $E + \varepsilon\mathsf{A}$ nach Potenzen von ε beginnt mit den Gliedern $1 + \varepsilon \cdot \text{Spur}\,(\mathsf{A})$. — U ist eine ähnliche Abbildung, wenn für jedes G der Drehungsgruppe UGU^{-1} oder, was auf dasselbe hinauskommt, $UGU^{-1}G^{-1}$ zur Drehungsgruppe $\mathfrak{G}$ gehört. Demnach ist A_0^* dann und nur dann eine infinitesimale Operation der Ähnlichkeitsgruppe, wenn $\mathsf{A}_0^*\mathsf{A} - \mathsf{A}\mathsf{A}_0^*$ für alle Matrizen A der infinitesimalen Drehungsgruppe $\mathfrak{g}$ gleichfalls zu $\mathfrak{g}$ gehört.

Die infinitesimalen Euklidischen Drehungen

$$d\xi^i = v^i_k\,\xi^k,$$

d. s. die infinitesimalen linearen Abbildungen, welche die quadratische Einheitsform

$$Q_0 = (\xi^1)^2 + (\xi^2)^2 + \cdots + (\xi^n)^2$$

invariant lassen, haben wir auf S. 42 bestimmt. Die für sie charakteristische Bedingung

$$\tfrac{1}{2}\,dQ_0 = \xi^i\,d\xi^i = 0 \text{ besagt, daß } v^k_i = -v^i_k \text{ ist.}$$

Es handelt sich also um die infinitesimale Gruppe $\mathfrak{d}$ der sämtlichen schiefsymmetrischen Matrizen; sie ist offenbar $\frac{n(n-1)}{2}$-gliedrig. Man überzeuge sich durch direkte Rechnung von der Gruppeneigenschaft! Ist Q irgend eine quadratische Form, welche bei den infinitesimalen Euklidischen Drehungen invariant bleibt: $dQ = 0$, so stimmt notwendig Q mit Q_0 bis auf einen konstanten Faktor überein. In der Tat, ist

$$Q = a_{ik}\,\xi^i\,\xi^k \qquad (a_{ki} = a_{ik}),$$

so soll für alle schiefsymmetrischen Zahlsysteme v^i_k die Gleichung gelten

$$a_{rk}\,v^r_i + a_{ri}\,v^r_k = 0. \tag{72}$$

Nehmen wir darin zunächst $k = i$ und beachten, daß die Zahlen

$v_i^1, v_i^2, \ldots, v_i^n$ für ein einzelnes i beliebig gewählt werden können mit alleiniger Ausnahme von $v_i^i = 0$, so ergibt sich $a_{ri} = 0$ für $r \neq i$. Schreiben wir $a_{ii} = a_i$, so geht die Gleichung (72) über in

$$v_i^k (a_i - a_k) = 0;$$

daraus schließt man sofort auf die Gleichheit aller a_i. — Die zugehörige infinitesimale Gruppe $\mathfrak{d}^*$ der ähnlichen Abbildungen wird aus $\mathfrak{d}$ erhalten, indem man die eine Matrix E — das bedeutet hier: die infinitesimale Dilatation $d\xi^i = \varepsilon \xi^i$ — assoziiert. Denn gehört die Matrix $C = (c_i^k)$ zu $\mathfrak{d}^*$, d. h. ist für jedes schiefsymmetrische v_i^k auch

$$c_r^i v_k^r - v_r^i c_k^r$$

ein schiefsymmetrisches Zahlsystem, so erfüllen die Größen $c_k^i + c_i^k = a_{ik}$ die Gleichungen (72), woraus $a_{ik} = 2a \cdot \delta_i^k$ folgt; d. h. C ist gleich aE vermehrt um eine schiefsymmetrische Matrix.

Allgemeiner bezeichne $\mathfrak{d}_Q$ die infinitesimale Gruppe derjenigen linearen Abbildungen, welche eine beliebige nicht-ausgeartete quadratische Form Q in sich überführen. $\mathfrak{d}_Q$ und $\mathfrak{d}_{Q'}$ unterscheiden sich nur durch die Orientierung, wenn Q' aus Q durch eine lineare Transformation hervorgeht. Es gibt also nur endlichviele verschiedene Arten von infinitesimalen Gruppen $\mathfrak{d}_Q$, die sich durch den Trägheitsindex der Form Q voneinander unterscheiden. Aber auch diese Unterschiede fallen dahin, wenn wir statt des Gebietes der reellen Größen das weitere der komplexen zugrunde legen; dann ist jedes $\mathfrak{d}_Q$ von der gleichen Art wie $\mathfrak{d}$.

Nach diesen Vorbereitungen können wir zur analytischen Formulierung der beiden Forderungen I und II schreiten. Es sei $\mathfrak{g}$ die infinitesimale Drehungsgruppe in P. Wir verstehen unter Λ_{kr}^i jedes System von n^3 Zahlen, unter A_{kr}^i jedes derartige System, das aus lauter zu $\mathfrak{g}$ gehörigen Matrizen $(A_{k1}^i), (A_{k2}^i), \ldots, (A_{kn}^i)$ zusammengesetzt ist, unter Γ_{kr}^i endlich ein beliebiges Zahlensystem, das der Symmetriebedingung (70) genügt. Ist die infinitesimale Drehungsgruppe N-gliedrig, so bilden diese Zahlensysteme lineare Mannigfaltigkeiten von n^3, bzw. nN und $n \cdot \frac{n(n+1)}{2}$ Dimensionen. Da nach I, wenn der metrische Zusammenhang alle Möglichkeiten durchläuft, beliebige Zahlsysteme $\Lambda_{k1}^i, \Lambda_{k2}^i, \ldots, \Lambda_{kn}^i$ als die Koeffizienten von n infinitesimalen kongruenten Verpflanzungen in den n Koordinatenrichtungen auftreten können — vgl. (69) —, muß nach II — vgl. (68) — jedes Λ eine und nur eine Zerlegung nach der Formel

$$\Lambda_{kr}^i = A_{kr}^i - \Gamma_{kr}^i$$

gestatten. Das besagt zweierlei:

1) $$n^3 = nN + n \cdot \frac{n(n+1)}{2} \quad \text{oder} \quad N = \frac{n(n-1)}{2};$$

2) es ist niemals $A_{kr}^i - \Gamma_{kr}^i = 0$, ohne daß alle A und Γ verschwinden; oder ein nicht-verschwindendes System A kann niemals die Sym-

metriebedingungen $A^i_{kr} = A^i_{rk}$ erfüllen. Zur invarianten Formulierung dieser Bedingung möge ein Gesetz

$$\zeta^i = A^i_{rs}\xi^r\eta^s \qquad (A^i_{rs} = A^i_{sr}),$$

das aus zwei beliebigen Vektoren ξ, η in bilinearer symmetrischer Weise einen Vektor ζ erzeugt, eine zu $\mathfrak{g}$ gehörige symmetrische Doppelmatrix heißen (eine infinitesimale Doppeldrehung), wenn für jeden festen Vektor η der Übergang $\xi \rightarrow \zeta$ (und daher auch für jeden festen Vektor ξ der Übergang $\eta \rightarrow \zeta$) eine Operation von $\mathfrak{g}$ ist. Dann können wir zusammenfassend die Behauptung aufstellen:

Die infinitesimale Drehungsgruppe $\mathfrak{g}$ *besitzt nach unsern Axiomen folgende Eigenschaften:*

a) *die Spur jeder Matrix ist* $= 0$;

b) *außer* 0 *existiert keine zu* $\mathfrak{g}$ *gehörige symmetrische Doppelmatrix;*

c) *die Dimensionszahl von* $\mathfrak{g}$ *ist die höchste, welche mit der Forderung* b) *verträglich ist, nämlich* $N = \frac{n(n-1)}{2}$.

Diese Eigenschaften behalten ihren Sinn im Gebiete der komplexen Größen so gut wie in dem der reellen. Wir überzeugen uns davon, daß sie für die infinitesimale Euklidische Drehungsgruppe $\mathfrak{d}$ zutreffen, d. h. daß n^3 Zahlen v^i_{kl} nicht gleichzeitig den Symmetriebedingungen

$$v^i_{lk} = v^i_{kl}, \qquad v^k_{il} = -v^i_{kl}$$

genügen können, ohne alle zu verschwinden. Das zeigt die zur Bestimmung des affinen Zusammenhangs auf S. 113 durchgeführte Rechnung: schreibe ich die drei Gleichungen hin, welche aus $v^i_{kl} + v^k_{il} = 0$ durch die zyklischen Vertauschungen der Indizes ikl entstehen, addiere die erste und letzte, subtrahiere aber die zweite, so kommt in Anbetracht der ersten Symmetriebedingung $v^i_{kl} = 0$.

Ich halte es für sehr wahrscheinlich, daß $\mathfrak{d}$ im wesentlichen die einzige infinitesimale Gruppe ist, welche den Postulaten a), b), c) genügt; genauer: im komplexen Gebiet wird jede solche infinitesimale Gruppe $\mathfrak{g}$ bei geeigneter Wahl des Koordinatensystems mit $\mathfrak{d}$ identisch. Trifft das zu, so ist die infinitesimale Drehungsgruppe notwendig mit einer gewissen Gruppe $\mathfrak{d}_Q$ identisch, wo Q eine nicht-ausgeartete quadratische Form ist. Q selber ist durch $\mathfrak{g}$ bis auf einen konstanten Proportionalitätsfaktor bestimmt. Sie ist reell, wenn $\mathfrak{g}$ reell ist. Denn spalten wir Q (worin wir die Variablen reell nehmen) in Real- und Imaginärteil: $Q_1 + iQ_2$, so läßt $\mathfrak{g}$ die beiden Formen Q_1, Q_2 einzeln invariant. Infolgedessen muß

$$Q_1 = c_1 Q, \qquad Q_2 = c_2 Q$$

sein; eine der beiden Konstanten c_1, c_2 ist wegen $c_1 + ic_2 = 1$ sicher von 0 verschieden und darum Q bis auf einen konstanten Faktor eine reelle Form. Damit wäre dann der Anschluß an die Entwicklungen der vorigen Paragraphen erreicht, die Raumanalyse beendet, und wir dürften behaupten, aus den tiefsten der mathematischen Betrachtung zugänglichen

Gründen das Wesen des Raumes, den Ursprung der Gültigkeit des Pythagoreischen Lehrsatzes verständlich gemacht zu haben[13]. Wäre der vermutete mathematische Satz aber nicht richtig, so wären uns noch entscheidende Wesenszüge des Raumes entgangen. Tatsächlich habe ich seine Gültigkeit für die niedersten Dimensionszahlen $n = 2$ und 3 sicherstellen können; die Wiedergabe dieser rein mathematischen Überlegungen würde uns aber zu weit führen.

Ich mache lieber zum Schluß noch auf zwei Punkte aufmerksam. Erstens: es steht mit dem Axiom I, wie wir sahen, keineswegs im Widerspruch, daß nach II nicht nur die Metrik, sondern auch der metrische Zusammenhang an jeder Stelle von der gleichen Art ist — nämlich von der einfachsten, die überhaupt denkmöglich ist: zu jedem Punkt gibt es ein geodätisches Koordinatensystem derart, daß der Transport aller Vektoren daselbst mit ungeänderten Komponenten an eine Nachbarstelle stets eine kongruente Verpflanzung ist. Zweitens: die Möglichkeit, in der hier geschilderten Weise die einzigartige Stellung der Pythagoreischen Raummetrik zu begreifen, hängt ganz und gar daran, daß die quantitativen metrischen Verhältnisse weitgehender virtueller Veränderungen fähig sind; sie steht und fällt also mit der Riemann-Einsteinschen dynamischen Auffassung. Erst diese Auffassung, an deren Wahrheit nach den Erfolgen der Einsteinschen Gravitationstheorie (Kap. IV) kaum mehr ein Zweifel bestehen kann, macht uns die Bahn frei für die Entdeckung der »Vernunft des Raumes«. —

Die im II. Kap. angestellten Untersuchungen über den Raum scheinen mir ein gutes Beispiel für die von der phänomenologischen Philosophie (Husserl) angestrebte Wesensanalyse zu sein; ein Beispiel, das typisch ist für solche Fälle, wo es sich um nicht-immanente Wesen handelt. Wir sehen da an der historischen Entwicklung des Raumproblems, wie schwer es uns in der Wirklichkeit befangenen Menschen wird, das Entscheidende zu treffen. Eine lange mathematische Entwicklung, die große Entfaltung der geometrischen Studien von Euklid bis Riemann, die physikalische Durchdringung der Natur und ihrer Gesetze seit Galilei mit all ihren immer erneuerten Anstößen aus der Empirie, endlich das Genie einzelner großer Geister — Newton, Gauß, Riemann, Einstein — war erforderlich, um uns von den äußerlichen, zufälligen, nicht wesenhaften Merkmalen loszureißen, an denen wir sonst hängen geblieben wären. Freilich: ist einmal der wahre Standpunkt gewonnen, so geht der Vernunft ein Licht auf, und sie erkennt und anerkennt das ihr aus-sich-selbst-Verständliche; dennoch hatte sie (wenn sie natürlich auch in der ganzen Entwicklung des Problems immer »dabei war«) nicht die Kraft, es mit einem Schlage zu durchschauen. Das muß der Ungeduld der Philosophen entgegengehalten werden, die da glauben, auf Grund eines einzigen Aktes exemplarischer Vergegenwärtigung das Wesen adäquat beschreiben zu können; sie haben prinzipiell recht, menschlich aber so unrecht. Das Beispiel des Raumes ist zugleich sehr lehrreich für diejenige Frage der Phänomenologie, die

mir die eigentlich entscheidende zu sein scheint: inwieweit die Abgrenzung der dem Bewußtsein aufgehenden Wesenheiten eine dem Reich des Gegebenen selbst eigentümliche Struktur zum Ausdruck bringt und inwieweit an ihr bloße Konvention beteiligt ist.

Kapitel III.

Relativität von Raum und Zeit.

§ 19. Das Galileische Relativitätsprinzip.

Schon in der Einleitung ist besprochen worden, in welcher Weise wir mittels einer Uhr die Zeit messen und nach Wahl eines beliebigen Anfangspunktes in der Zeit und einer Zeiteinheit jeden Zeitpunkt durch eine Zahl t charakterisieren können. Aber in der *Verbindung von Raum und Zeit* liegen neue schwierige Probleme, welche den Gegenstand der Relativitätstheorie bilden; ihre Lösung, eine der größten Taten der menschlichen Geistesgeschichte, knüpft sich vor allem an die Namen *Kopernikus* und *Einstein*[1]).

Durch eine Uhr werden unmittelbar nur die zeitlichen Verhältnisse solcher Ereignisse festgelegt, die jeweils gerade dort geschehen, wo sich die Uhr befindet. Indem ich aber als naiver Mensch mit voller Selbstverständlichkeit die Dinge, die ich sehe, in den Zeitpunkt ihrer Wahrnehmung setze, dehne ich meine Zeit über die ganze Welt aus: ich glaube, daß es einen objektiven Sinn hat, von einem Ereignis, das irgendwo vor sich geht, zu behaupten, es geschehe »jetzt!« (in dem Augenblick, in dem ich das Wort ausspreche); daß es einen objektiven Sinn hat, von irgend zwei an verschiedenen Orten vorgefallenen Ereignissen zu fragen, ob das eine früher oder später als das andere geschehen sei. *An dieser These wollen wir hier zunächst festhalten.* Jedes raum-zeitlich streng lokalisierte Ereignis, wie etwa das Aufblitzen eines sofort wieder verlöschenden Fünkchens, geschieht in einem bestimmten Raum-Zeit-Punkt oder *Weltpunkt:* »hier-jetzt«. Nach der eben ausgesprochenen These kommt jedem Weltpunkt eine bestimmte Zeitkoordinate t zu.

Nun handelt es sich weiter darum, den *Ort* eines derartigen Punktereignisses im Raume festzulegen. Wir schreiben z. B. zwei Massenpunkten in einem bestimmten Moment eine Entfernung zu. Wir nehmen also an, daß die Weltpunkte, die einem bestimmten Moment t entsprechen, eine dreidimensionale Punktmannigfaltigkeit bilden, in welcher die Euklidische Geometrie gilt (wir greifen, was den Raum betrifft, in diesem Kapitel wieder auf den Standpunkt von Kap. I zurück). Wir wählen eine bestimmte Maßeinheit für die Länge und ein rechtwinkliges Koordinatensystem im Momente t (etwa eine bestimmte Ecke des Hörsaals). Dann kommen jedem Weltpunkt, dessen Zeitkoordinate den Wert t hat, drei bestimmte Raumkoordinaten $x_1 x_2 x_3$ zu.

Fassen wir aber jetzt einen andern Moment t' ins Auge. Wir nehmen an, es habe einen objektiven Sinn, zu sagen, wir messen im Momente t' mit der gleichen Längeneinheit wie im Momente t (mittels eines »starren«, sowohl zur Zeit t wie zur Zeit t' vorhandenen Maßstabes); diese Längeneinheit sei neben der Zeiteinheit ein für allemal fest angenommen (cm, sec). Dann können wir aber noch die Lage des Cartesischen Koordinatensystems wiederum beliebig wählen, unabhängig von der Wahl zur Zeit t. Erst wenn wir der Überzeugung sind, es habe einen objektiven Sinn, von zwei zu beliebigen Zeiten geschehenden, »punktförmigen« Ereignissen zu behaupten, sie geschehen an *derselben* Raumstelle, von einem Körper zu behaupten, daß er *ruhe*, können wir die Lage des Koordinatensystems zu allen Zeiten auf Grund der willkürlich gewählten Lage in einem bestimmten Moment objektiv, ohne neue Aufweisungen individueller Gegenstände festlegen: nämlich durch die Forderung, daß das Koordinaten-

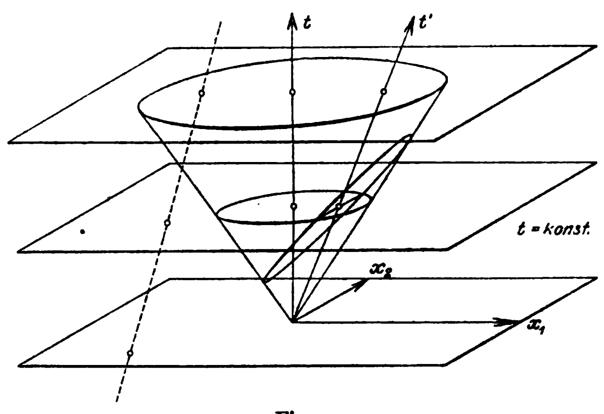


Fig. 7.

system dauernd ruhe. Dann bekommen wir also nach Wahl eines Anfangspunktes der Zeitrechnung und eines Cartesischen Koordinatensystems in diesem Anfangsmoment zu jedem Weltpunkt vier bestimmte Koordinaten: die Zeitkoordinate t und die Raumkoordinaten $x_1\ x_2\ x_3$. Um der Möglichkeit der graphischen Darstellung willen unterdrücken wir eine Raumkoordinate, nehmen den Raum somit nur zweidimensional, als eine Euklidische Ebene an.

Wir verfertigen uns ein graphisches Bild, indem wir in einem Raum mit dem rechtwinkligen Achsenkreuz $x_1\ x_2\ t$ den Weltpunkt durch einen Bildpunkt mit den Koordinaten $x_1\ x_2\ t$ repräsentieren. Von allen sich bewegenden Massenpunkten können wir dann in diesem Bilde den »graphischen Fahrplan« konstruieren; die Bewegung eines jeden wird dargestellt durch eine »Weltlinie«, deren Richtung beständig eine positive Komponente in Richtung der t-Achse besitzt. Die Weltlinien ruhender Massenpunkte sind Gerade parallel zur t-Achse; die Weltlinie eines in

gleichförmiger Translation begriffenen Massenpunktes ist eine Gerade. In einem Schnitt $t =$ konst. kann die Lage aller Massenpunkte im gleichen Moment t abgelesen werden. Wählen wir Anfangspunkt der Zeitrechnung und Cartesisches Koordinatensystem auf eine andere Weise und sind $x_1\, x_2\, t$; $x'_1 x'_2 t'$ die Koordinaten eines willkürlichen Weltpunktes bei der ersten und zweiten Wahl des Koordinatensystems, so gelten Transformationsformeln

$$\text{(I)} \qquad \left\{ \begin{array}{l} x_1 = \alpha_{11} x'_1 + \alpha_{12} x'_2 + \alpha_1 \\ x_2 = \alpha_{21} x'_1 + \alpha_{22} x'_2 + \alpha_2 \\ t = \qquad\qquad\quad t' + a, \end{array} \right.$$

wo die α und a Konstante bedeuten, die α_{ik} aber insbesondere die Koeffizienten einer orthogonalen Transformation bilden. Die Weltkoordinaten sind also in objektiver Weise, ohne Hinweis auf individuelle Gegenstände oder Geschehnisse festgelegt *bis auf eine beliebige Transformation von dieser Gestalt.* Dabei ist noch abgesehen von der willkürlichen Wahl der beiden Maßeinheiten. Bleibt der Anfangspunkt in Raum und Zeit ungeändert: $\alpha_1 = \alpha_2 = a = 0$, so sind $x'_1 x'_2 t'$ die Koordinaten in bezug auf ein geradliniges Achsensystem, dessen t'-Achse mit der t-Achse zusammenfällt, während die Achsen $x'_1\, x'_2$ aus $x_1\, x_2$ durch eine Drehung in ihrer Ebene $t = 0$ hervorgehen.

Schon eine geringe Besinnung zeigt, daß die eine der angenommenen Voraussetzungen: der Begriff der Ruhe habe einen objektiven Inhalt, nicht zutreffend ist*). Wenn ich mit jemandem eine Verabredung treffe, wir wollen uns morgen an »derselben« Stelle wieder treffen wie heute, so heißt das: in derselben materiellen Umgebung, an dem gleichen Gebäude in der gleichen Straße (die nach Kopernikus morgen ganz wo anders im Weltenraum sich befindet als heute); und das hat seinen guten Sinn zufolge des glücklichen Umstandes, daß wir hineingeboren sind in eine wesentlich stabile Umwelt, in der alle Veränderung sich anschließt an einen viel umfassenderen Bestand, der seine (teils unmittelbar wahrgenommene, teils erschlossene) Beschaffenheit unverändert oder fast unverändert bewahrt. Die Häuser stehen still; das Schiff fährt mit soundsoviel Knoten Geschwindigkeit: das verstehen wir im täglichen Leben immer relativ zu der »dauernden wohlgegründeten Erde«. *Objektive Bedeutung haben nur die relativen Bewegungen der Körper* (Massenpunkte) *zueinander*, d. h. die Entfernungen und Winkel, welche sich aus den gleichzeitigen Lagen der Massenpunkte bestimmen, in ihrer funktionalen Abhängigkeit von der Zeit. Es ist also jedes (der Anschaulichkeit wegen materiell gedachte) dauernd vorhandene Cartesische Koordinatensystem jedem andern gleichberechtigt. Der Zusammenhang der Koordinaten desselben Weltpunktes mit Bezug auf das eine und das andere zweier solcher Systeme wird durch Formeln geliefert:

*) Darüber war bereits Aristoteles völlig im klaren, wenn er »Ort« (τόπος) als Beziehung eines Körpers zu den Körpern seiner Umgebung bezeichnet.

$$
\text{(II)} \qquad \left\{ \begin{aligned} x_1 &= \alpha_{11}(t')x_1' + \alpha_{12}(t')x_2' + \alpha_1(t'), \\ x_2 &= \alpha_{21}(t')x_1' + \alpha_{22}(t')x_2' + \alpha_2(t'), \\ t &= t' + a, \end{aligned} \right.
$$

wo die α_i und α_{ik} irgendwelche stetige Funktionen von t' sein können, von denen die α_{ik} für alle Werte von t' die Koeffizienten einer orthogonalen Transformation bilden. Tragen wir die Flächen $t' =$ konst. sowie $x_1' =$ konst. und $x_2' =$ konst. in unsere graphische Darstellung ein, so sind zwar die Flächen der ersten Schar wiederum Ebenen, die mit den Ebenen $t =$ konst. zusammenfallen, hingegen die beiden andern sind krumme Flächen; die Transformationsformeln sind nicht mehr linear.

Unter diesen Umständen kann es sich bei der Untersuchung der Bewegung eines Systems von Massenpunkten, etwa der Planeten, nur darum handeln, das Koordinatensystem so zu wählen, daß die Funktionen $x_1(t)$, $x_2(t)$, welche die Raumkoordinaten der Massenpunkte in Abhängigkeit von der Zeit darstellen, möglichst einfach werden oder doch möglichst einfachen Gesetzen genügen. Dies war die von Kepler außerordentlich vertiefte Entdeckung des Kopernikus, daß in der Tat ein Koordinatensystem existiert, für das die Gesetze der Planetenbewegung eine ungeheuer viel einfachere und durchsichtigere Form annehmen, als wenn man sie auf die ruhende Erde bezieht. Die Tat des Kopernikus wurde vor allem dadurch zur Weltanschauungswende, daß *er sich von dem Glauben an die absolute Bedeutung der Erde frei machte.* Seine Betrachtungen wie auch die Keplers sind rein *kinematischer* Natur. Newton krönte ihr Werk, indem er den wahren Grund für die kinematischen Keplerschen Gesetze in dem *dynamischen* Grundgesetz der Mechanik und dem Attraktionsgesetz auffand. Man weiß, wie glänzend sich diese Newtonsche Mechanik am Himmel und auf Erden bestätigt hat. Da ihr, wie wir überzeugt sind, universelle, nicht auf das Planetensystem beschränkte Geltung zukommt, ihre Gesetze aber keineswegs invariant gegenüber den Transformationen (II) sind, so wird durch sie in absoluter, von jedem Hinweis auf individuelle Gegenständlichkeit unabhängiger Weise eine viel vollständigere Festlegung des Koordinatensystems möglich als auf Grund der zu dem »Relativitätsprinzip« (II) führenden kinematischen Auffassung.

An der Spitze der Mechanik steht das *Galileische Trägheitsprinzip*: Ein Massenpunkt, der sich kräftefrei, ohne jede Einwirkung von außen bewegt, führt eine gleichförmige Translation aus. Seine Weltlinie ist mithin eine Gerade, die Raumkoordinaten x_1, x_2 des Massenpunktes lineare Funktionen der Zeit t. Gilt dieses Prinzip in bezug auf die beiden durch (II) verbundenen Koordinatensysteme, so müssen also x_1 und x_2 in lineare Funktionen von t' übergehen, wenn man für x_1', x_2' lineare Funktionen von t' einsetzt. Daraus folgt ohne weiteres, daß die α_{ik} Konstante und α_1, α_2 lineare Funktionen von t sein müssen; d. h. das eine Cartesische Raumkoordinatensystem bewegt sich relativ zu dem andern in gleichförmiger Translation. Und nun zeigt sich umgekehrt: liegen zwei *solche* Koordinatensysteme $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{C}'$

vor und gilt das Trägheitsprinzip und die Newtonsche Mechanik in bezug auf $\mathfrak{C}$, so gilt sie auch in bezug auf $\mathfrak{C}'$. Zwei für die Mechanik »zulässige« Koordinatensysteme hängen demnach durch die Formeln zusammen

$$\text{(III)} \quad \left\{ \begin{array}{l} x_1 = \alpha_{11} x'_1 + \alpha_{12} x'_2 + \gamma_1 t' + \alpha_1, \\ x_2 = \alpha_{21} x'_1 + \alpha_{22} x'_2 + \gamma_2 t' + \alpha_2, \\ t = \qquad\qquad\qquad\quad t' + a, \end{array} \right.$$

in denen die α_{ik} konstante Koeffizienten einer orthogonalen Transformation sind, a, α_i und γ_i aber beliebige Konstante; und jede Transformation von dieser Art stellt den Übergang von einem zulässigen Koordinatensystem zu einem andern dar (*Galilei-Newtonsches Relativitätsprinzip*). Das Wesentliche daran ist, wenn wir von der ja selbstverständlichen Willkürlichkeit der Achsenrichtungen im Raum und des Anfangspunktes absehen, daß Invarianz stattfindet gegenüber den Transformationen

$$(1) \qquad x_1 = x'_1 + \gamma_1 t', \qquad x_2 = x'_2 + \gamma_2 t', \qquad t = t'.$$

In unserm graphischen Bild (s. Fig. 7) würden $x'_1\, x'_2\, t'$ die Koordinaten in bezug auf ein geradliniges Achsenkreuz sein, bei welchem die x'_1, x'_2 mit den x_1, x_2-Achsen zusammfallen, hingegen die neue t'-Achse eine irgendwie geänderte Richtung hat. Daß sich die Gesetze der Newtonschen Mechanik bei diesem Übergang vom Koordinatensystem $\mathfrak{C}$ zu $\mathfrak{C}'$ nicht ändern, sehen wir so ein. Nach dem Attraktionsgesetz ist die Gravitationskraft, mit der ein Massenpunkt in einem Augenblicke auf einen andern wirkt, ein vom Koordinatensystem unabhängiger Vektor im Raum (so wie der Vektor, welcher die simultanen Lagen der beiden Massenpunkte miteinander verbindet). Dieselbe Größennatur muß auch jede Kraft von anderer physikalischer Herkunft besitzen, das gehört mit zu den Voraussetzungen der Newtonschen Mechanik; sie verlangt zur Ausfüllung ihres Kraftbegriffs eine dieser Voraussetzung genügende Physik. Man überzeuge sich etwa in der Elastizitätstheorie davon, daß die Spannungskräfte (zufolge ihres Zusammenhanges mit den Deformationsgrößen) von der geforderten Art sind. — Die Masse ist ein vom Koordinatensystem unabhängiger Skalar. Endlich ist wegen der aus (1) für die Bewegung eines Massenpunktes sich ergebenden Transformationsformeln

$$\frac{dx_1}{dt} = \frac{dx'_1}{dt'} + \gamma_1, \quad \frac{dx_2}{dt} = \frac{dx'_2}{dt'} + \gamma_2; \quad \frac{d^2x_1}{dt^2} = \frac{d^2x'_1}{dt'^2}, \quad \frac{d^2x_2}{dt^2} = \frac{d^2x'_2}{dt'^2}$$

zwar nicht die Geschwindigkeit, wohl aber die Beschleunigung ein vom Koordinatensystem unabhängiger Raumvektor. Demnach hat das Grundgesetz »Masse mal Beschleunigung = Kraft« die behauptete invariante Beschaffenheit.

Nach der Newtonschen Mechanik bewegt sich der Schwerpunkt jedes abgeschlossenen, keiner Einwirkung von außen unterliegenden Massensystems in gleichförmiger Translation. Betrachten wir die Sonne mit ihren Planeten als ein solches System, so hat es also keinen Sinn, zu fragen, ob der Schwerpunkt des Sonnensystems ruht oder sich in gleich-

förmiger Translation befindet. Wenn die Astronomen trotzdem behaupten, daß die Sonne sich auf einen Punkt im Sternbild des Herkules zu bewege, so stützen sie diese ihre Behauptung auf die statistische Beobachtung, daß die Sterne in jener Gegend sich im Durchschnitt von einem gewissen Zentrum aus zu entfernen scheinen — so wie eine Baumgruppe auseinander tritt, der ich mich nähere; daraus folgt ihre Aussage, wenn es sicher ist, daß die Sterne im Durchschnitt ruhen, d. h. daß der Schwerpunkt des Fixsternhimmels ruht: es handelt sich also um eine Aussage über die relative Bewegung des Schwerpunktes des Sonnensystems zu dem des Fixsternhimmels.

Man muß sich, um den wahren Sinn des Relativitätsprinzips aufzufassen, durchaus daran gewöhnen, nicht »im Raum« und nicht »in der Zeit«, sondern »in der Welt«, in *Raum-Zeit* zu denken. Nur das Zusammenfallen (bzw. das unmittelbare Benachbartsein) zweier Ereignisse in Raum-Zeit hat einen unmittelbar evidenten Sinn; daß sich hier Raum und Zeit nicht in absoluter Weise voneinander trennen lassen, ist eben die Behauptung des Relativitätsprinzips. Im Sinne der mechanischen Weltauffassung, nach der alles physikaliche Geschehen letztlich auf Mechanik zurückgeht, nehmen wir an, daß nicht nur die Mechanik, sondern die gesamte physikalische Gesetzmäßigkeit der Natur dem Galilei-Newtonschen Relativitätsprinzip untertan ist, *daß es also unmöglich ist*, *ohne Aufweisung individueller Gegenständlichkeiten unter den für die Mechanik gleichberechtigten Bezugssystemen*, *von denen je zwei durch Transformationsformeln* (III) *verknüpft sind*, *eine engere Auswahl zu treffen*. Dann wird durch diese Formeln in genau dem gleichen Sinne *die Geometrie der vierdimensionalen Welt* festgelegt, wie durch die Gruppe der Übergangssubstitutionen, die zwischen zwei Cartesischen Koordinatensystemen vermitteln, die Euklidische Geometrie des dreidimensionalen Raumes festgelegt wird: eine Beziehung zwischen Weltpunkten hat dann und nur dann eine objektive Bedeutung, wenn sie durch solche arithmetische Relationen zwischen den Koordinaten der Punkte definiert ist, die invariant sind gegenüber den Transformationen (III). Vom Raume sagt man, er sei *homogen* in allen Punkten und in jedem Punkte homogen in allen Richtungen; diese Behauptungen sind aber nur Teile der *vollständigen Homogeneïtätsaussage*, daß alle Cartesischen Koordinatensysteme gleichberechtigt sind. Ebenso wird durch das Relativitätsprinzip festgestellt, in welchem genauen Sinne die Welt (= Raum-Zeit als »Form« der Erscheinungen, nicht ihrem »zufälligen«, inhomogenen materialen Gehalt nach) homogen ist.

Es ist merkwürdig genug, daß zwei mechanische Vorgänge, die kinematisch vollständig gleich sind, in dynamischer Hinsicht verschieden sein können, wie die Gegenüberstellung des viel weiteren kinematischen Relativitätsprinzips (II) und des dynamischen (III) lehrt: eine für sich allein existierende rotierende Flüssigkeitskugel oder ein rotierendes Schwungrad ist an sich nicht von einer ruhenden Kugel oder einem ruhenden Schwung-

rad verschieden; trotzdem plattet sich die »rotierende« Kugel ab, die ruhende nicht; trotzdem treten in dem rotierenden Schwungrad Spannungen auf, ja es zerspringt bei hoher Rotationsgeschwindigkeit, an einem ruhenden geschieht nichts dergleichen. Als die Ursache dieses verschiedenen Verhaltens können wir nur die »*Weltmetrik*« bezeichnen, die sich in den Zentrifugalkräften als eine wirkende Potenz offenbart. Von hier aus fällt ein helles Licht zurück auf den Riemannschen Gedanken: wenn der Metrik (hier freilich der Weltmetrik, nicht dem metrischen Fundamentaltensor des Raumes) etwas genau so Reales, durch Kräfte auf die Materie Wirkendes entspricht wie etwa dem Maxwellschen Spannungstensor, so muß man annehmen, daß auch umgekehrt die Materie auf dieses Reale zurückwirkt. Erst in Kap. IV werden wir diese Idee wieder aufnehmen.

An den Transformationsformeln (III) heben wir zunächst nur ihre Linearität hervor: sie besagt, daß *die Welt ein vierdimensionaler affiner Raum* ist. Zur systematischen Darstellung seiner Geometrie benutzen wir demnach neben den Weltpunkten die *Welt-Vektoren* oder Verschiebungen. Eine Verschiebung der Welt ist eine Abbildung, die jedem Weltpunkt P einen Weltpunkt P' zuordnet; aber eine Abbildung von besonderer Art, nämlich eine solche, die sich in einem zulässigen Koordinatensystem durch Gleichungen

$$x'_i = x_i + a_i \qquad (i = 0,\ 1,\ 2,\ 3)$$

ausdrückt; dabei bedeuten x_i die vier Zeit-Raum-Koordinaten von P (es ist x_0 an Stelle von t geschrieben), x'_i diejenigen von P' in jenem Koordinatensystem, die a_i sind irgendwelche Konstanten. Der Begriff ist unabhängig von der Wahl des zulässigen Koordinatensystems. Die Verschiebung, welche P in P' überführt, wird mit $\overrightarrow{PP'}$ bezeichnet. Es gelten für die Welt-Punkte und -Verschiebungen die sämtlichen Axiome der affinen Geometrie mit der Dimensionszahl $n = 4$. Das Galileische Trägheitsprinzip ist ein affines Gesetz; es sagt, durch welche Bewegungen die geraden Linien unseres vierdimensionalen affinen Raums »Welt« realisiert werden, nämlich durch die kräftefrei sich bewegenden Massenpunkte.

Von dem *affinen* Standpunkt gehen wir zum *metrischen* über. Aus unserer graphischen Darstellung, die (mit Unterdrückung einer Koordinate) ein affines Bild der Welt entwarf, lesen wir ihre wesentliche metrische Struktur ab, die ganz anders ist als die des Euklidischen Raumes: die Welt ist »geschichtet«; die Ebenen $t =$ konst. in ihr haben eine absolute Bedeutung. Nach Wahl einer Maßeinheit für die Zeit kommt je zwei Weltpunkten A, B ein bestimmter Zeitunterschied zu, die Zeitkomponente des Vektors $\overrightarrow{AB} = \mathfrak{x}$; sie ist, wie allgemein die Vektorkomponenten in einem affinen Koordinatensystem, eine lineare Form $t(\mathfrak{x})$ des willkürlichen Vektors $\mathfrak{x}$. Der Vektor $\mathfrak{x}$ weist in die Vergangenheit oder die Zukunft, je nachdem $t(\mathfrak{x})$ negativ oder positiv ist. Von zwei Weltpunkten A, B ist A früher, gleichzeitig oder später als B, je naehdem

$$t(\overrightarrow{AB}) > 0, \; = 0 \text{ oder } < 0$$

ausfällt. — In jeder »Schicht« aber gilt die Euklidische Geometrie; sie beruht auf einer definiten quadratischen Form, die jedoch hier nur definiert ist für diejenigen Weltvektoren $\mathfrak{x}$, die in einer Schicht liegen, d. h. der Gleichung $t(\mathfrak{x}) = 0$ genügen (denn es hat nur einen Sinn, von dem Abstand der *gleichzeitigen* Lagen zweier Massenpunkte zu reden). Während also der Euklidischen Metrik eine positiv-definite quadratische Form zugrunde liegt, *beruht die Galileische Metrik*

1. *auf einer Linearform* $t(\mathfrak{x})$ *des willkürlichen Vektors* $\mathfrak{x}$ (der »Zeitdauer« der Verschiebung $\mathfrak{x}$), *und*

2. *einer nur innerhalb der dreidimensionalen linearen Mannigfaltigkeit aller Vektoren* $\mathfrak{x}$, *welche der Gleichung* $t(\mathfrak{x}) = 0$ *genügen*, *definierten positiv-definiten quadratischen Form* $(\mathfrak{x}\mathfrak{x})$ (dem Quadrat der »Länge« von $\mathfrak{x}$).

Zur anschaulichen Darlegung physikalischer Verhältnisse können wir die Einführung eines bestimmten Bezugsraumes nicht entbehren. Sie hängt ab von der Wahl einer willkürlichen Verschiebung $\mathfrak{e}$ in der Welt (derjenigen, in welche bei der graphischen Darstellung die Zeitachse hineinfällt) und wird dann durch die Übereinkunft bewerkstelligt, daß alle Weltpunkte, die auf einer Geraden der Richtung $\mathfrak{e}$ liegen, in *denselben* Raumpunkt fallen. Es handelt sich also, geometrisch gesprochen, um nichts anderes als den Vorgang der *Parallelprojektion*. Zum Zwecke einer angemessenen Formulierung schicke ich darüber einige geometrische Erörterungen voraus, die sich auf einen beliebigen n-dimensionalen affinen Raum beziehen. Knüpfen wir im Interesse der Anschaulichkeit zunächst an den Fall $n = 3$ an. Es sei im Raum eine Schar von Geraden gezogen, die dem Vektor $\mathfrak{e}$ ($\neq 0$) parallel sind. Blickt jemand in Richtung dieser Strahlen in den Raum hinein, so werden für ihn alle diejenigen Raumpunkte zusammenfallen, die in Richtung einer solchen Geraden hintereinander liegen; dabei ist es durchaus nicht nötig, eine Ebene zu geben, *auf* die projiziert wird. Wir definieren also:

Es sei gegeben ein von 0 verschiedener Vektor $\mathfrak{e}$. Von zwei Punkten A und A', für die $\overrightarrow{AA'}$ ein Multiplum von $\mathfrak{e}$ ist, werde gesagt, sie fallen in ein und denselben Punkt $\mathbf{A}$ des durch $\mathfrak{e}$ bestimmten Unterraums. Wir können $\mathbf{A}$ darstellen durch die zu $\mathfrak{e}$ parallele Gerade, auf der alle jene im Unterraum zusammenfallenden Punkte $A, A', \ldots$ liegen. Da jede Verschiebung $\mathfrak{x}$ des Raumes eine zu $\mathfrak{e}$ parallele Gerade wieder in eine solche überführt, ruft $\mathfrak{x}$ eine bestimmte Verschiebung $\boldsymbol{\mathfrak{x}}$ des Unterraums hervor; aber je zwei Verschiebungen $\mathfrak{x}, \mathfrak{x}'$ fallen im Unterraum zusammen, wenn ihr Unterschied ein Multiplum von $\mathfrak{e}$ ist. Der Übergang zum Unterraum, die »Projektion in Richtung von $\mathfrak{e}$«, werde an den Symbolen für Punkte und Verschiebungen durch Fettdruck gekennzeichnet. Durch Projektion gehen

$$\lambda\mathfrak{x},\ \mathfrak{x}+\mathfrak{y},\ \overrightarrow{AB} \text{ über in } \lambda\boldsymbol{\mathfrak{x}},\ \boldsymbol{\mathfrak{x}}+\boldsymbol{\mathfrak{y}},\ \overrightarrow{\mathbf{AB}};$$

d. h. die Projektion trägt affinen Charakter, und im Unterraum gilt die affine Geometrie mit einer um 1 geringeren Dimensionszahl als im ursprünglichen »Vollraum«.

Ist der Raum ein *metrischer* im Euklidischen Sinne, d. h. liegt ihm als metrische Fundamentalform eine nicht-ausgeartete quadratische Form $Q(\mathfrak{x}) = (\mathfrak{x}\mathfrak{x})$ zugrunde — für die Anschauung halte man sich an den Fall, wo Q positiv-definit ist, die Ausführungen gelten aber allgemein, — so werden wir den beiden Punkten des Unterraums, als die wir zwei zu $\mathfrak{e}$ parallele Gerade erblicken, wenn wir in der Richtung von $\mathfrak{e}$ in den Raum hineinschauen, offenbar einen Abstand gleich dem senkrechten Abstand der beiden Geraden zuschreiben. Das werde analytisch formuliert. Vorausgesetzt ist: $(\mathfrak{e}\mathfrak{e}) = e \neq 0$. Jede Verschiebung $\mathfrak{x}$ kann in eindeutig bestimmter Weise in zwei Summanden gespalten werden

$$(2) \qquad \mathfrak{x} = \xi\mathfrak{e} + \mathfrak{x}^*,$$

deren erster proportional, deren zweiter orthogonal zu $\mathfrak{e}$ ist:

$$(3) \qquad (\mathfrak{x}^*\mathfrak{e}) = 0, \qquad \xi = \frac{1}{e}(\mathfrak{x}\mathfrak{e}).$$

Wir nennen ξ die *Höhe* der Verschiebung $\mathfrak{x}$ (den Höhenunterschied von A und B, wenn $\mathfrak{x} = \overrightarrow{AB}$). Es gilt

$$(4) \qquad (\mathfrak{x}\mathfrak{x}) = e\xi^2 + (\mathfrak{x}^*\mathfrak{x}^*).$$

$\mathfrak{x}$ kann vollständig charakterisiert werden durch Angabe seiner Höhe ξ und der durch $\mathfrak{x}$ im Unterraum hervorgerufenen Verschiebung $\boldsymbol{\mathfrak{x}}$; wir schreiben

$$\mathfrak{x} = \xi \,|\, \boldsymbol{\mathfrak{x}}.$$

Der Vollraum ist »zerspalten« in Höhe und Unterraum, der »Lage-Unterschied« $\mathfrak{x}$ zweier Punkte im Vollraum in den Höhenunterschied ξ und Lagenunterschied $\boldsymbol{\mathfrak{x}}$ im Unterraum; nicht nur die Behauptung des Zusammenfallens zweier Punkte im Raum hat einen Sinn, sondern auch die Aussage: zwei Punkte fallen im Unterraum zusammen, bzw. befinden sich in der gleichen Höhe. Jede Verschiebung $\boldsymbol{\mathfrak{x}}$ des Unterraums wird durch eine und *nur eine* zu $\mathfrak{e}$ orthogonale Verschiebung $\mathfrak{x}^*$ des Vollraums hervorgerufen; die Beziehung zwischen $\mathfrak{x}^*$ und $\boldsymbol{\mathfrak{x}}$ ist umkehrbar-eindeutig und affin. Durch die Definitionsgleichung

$$(\boldsymbol{\mathfrak{x}}\boldsymbol{\mathfrak{x}}) = (\mathfrak{x}^*\mathfrak{x}^*)$$

erteilen wir dem Unterraum eine auf der quadratischen Fundamentalform $(\boldsymbol{\mathfrak{x}}\boldsymbol{\mathfrak{x}})$ beruhende Metrik. Dann geht (4) über in die Pythagoreische Fundamentalgleichung

$$(5) \qquad (\mathfrak{x}\mathfrak{x}) = e\xi^2 + (\boldsymbol{\mathfrak{x}}\boldsymbol{\mathfrak{x}}),$$

die sich für zwei Verschiebungen bei einer ohne weiteres verständlichen Bezeichnung zu

$$(5') \qquad (\mathfrak{x}\mathfrak{y}) = e\xi\eta + (\boldsymbol{\mathfrak{x}}\boldsymbol{\mathfrak{y}})$$

verallgemeinern läßt.

Diese Ausführungen sind hier, soweit sie den affinen Raum betreffen, unmittelbar anzuwenden: der Vollraum ist die vierdimensionale Welt, $\mathfrak{e}$ ist irgendein in die Zukunft weisender Vektor, der Unterraum das, was

wir gemeinhin den *Raum* nennen. Je zwei Weltpunkte, die auf einer zu $\mathfrak{e}$ parallelen Weltgeraden liegen, fallen in den gleichen Raumpunkt. Dieser Raumpunkt kann durch die zu $\mathfrak{e}$ parallele Gerade graphisch dargestellt werden, und er kann durch einen ruhenden Massenpunkt, d. h. einen solchen, dessen Weltlinie eben jene Gerade ist, dauernd markiert werden. — Was aber die Metrik betrifft, so ist diese nach dem Galileischen Relativitätsprinzip von andrer Art als wir eben angenommen hatten; darum sind folgende Modifikationen anzubringen. Jede Weltverschiebung $\mathfrak{x}$ hat eine bestimmte Zeitdauer $t(\mathfrak{x}) = t$ (welche an Stelle der »Höhe« in unsern geometrischen Auseinandersetzungen tritt) und erzeugt im Unterraum eine Verschiebung $\mathfrak{x}$; spaltet demnach gemäß der Unterscheidung von Zeit und Raum nach der Formel

$$\mathfrak{x} = t \mid \mathfrak{x}.$$

Insbesondere kann jede Raumverschiebung $\mathfrak{x}$ durch eine und nur eine Weltverschiebung $\mathfrak{x}^*$ hervorgerufen werden, welche der Gleichung $t(\mathfrak{x}^*) = 0$ genügt. Durch die für solche Vektoren $\mathfrak{x}^*$ definierte quadratische Form $(\mathfrak{x}^* \mathfrak{x}^*)$ empfängt der Raum seine Euklidische Metrik:

$$(\mathfrak{x}\mathfrak{x}) = (\mathfrak{x}^* \mathfrak{x}^*).$$

Der Raum ist abhängig von der Projektionsrichtung; in der Wirklichkeit kann die Projektionsrichtung durch irgend einen in gleichförmiger Translation begriffenen Massenpunkt (oder den Schwerpunkt eines abgeschlossenen isolierten Massensystems) festgelegt werden.

Wir haben diese Dinge mit solcher pedantischen Genauigkeit auseinandergesetzt, um für das Einsteinsche Relativitätsprinzip, dem gegenüber unsre Anschauung zunächst in ganz anderm Maße als gegenüber dem Galileischen versagt, wenigstens mit einer abgeklärten, auf diesen Fall ohne weiteres übertragbaren mathematischen Begriffsbildung gewappnet zu sein.

Wir lenken zurück ins physikalische Fahrwasser. Durch die Entdeckung der *endlichen Ausbreitungsgeschwindigkeit des Lichtes* wurde der naiven Ansicht, die Dinge seien gleichzeitig mit ihrer Wahrnehmung, der Boden entzogen. Da wir kein rascheres Zeitübertragungsmittel besitzen als das Licht selber (oder die drahtlose Telegraphie), ist es natürlich unmöglich, die Lichtgeschwindigkeit durch Messung der Zeit festzustellen, welche vergeht, bis das von einer Station A ausgesandte Lichtsignal bei einer andern Station B eintrifft. Roemer (1675) erschloß sie aus der scheinbaren Unregelmäßigkeit in der Umlaufszeit der Jupitermonde, welche genau die Periode eines Jahres aufwies; denn es erschien absurd, einen Wirkungszusammenhang zwischen Erde und Jupitermond anzunehmen, der die Periode des Erdumlaufs als eine Störung von so erheblicher Größe auf die Jupitermonde überträgt. Fizeau bestätigte die Entdeckung durch irdische Messung; seine Methode beruht auf dem einfachen Gedanken, die Empfangsstation B mit der Sendestation A zusammenfallen zu lassen und den Lichtstrahl von A durch Spiegelung nach A zurückzuleiten. Nach diesen Messungen haben wir anzunehmen, daß das

Licht sich um das Erregungszentrum in konzentrischen Kugeln mit einer konstanten Geschwindigkeit c ausbreitet. In unserer graphischen Darstellung würde (wiederum mit Unterdrückung einer Raumkoordinate) die Ausbreitung eines im Weltpunkt O gegebenen Lichtsignals durch den in Fig. 7 eingetragenen geraden Kreiskegel mit der Gleichung

$$c^2t^2 - (x_1^2 + x_2^2) = 0 \tag{6}$$

abgebildet werden: jede Ebene $t =$ konst. schneidet den Kegel in dem Kreis derjenigen Punkte, bis zu denen im Momente t das Lichtsignal gelangt ist; der Gleichung (6) (mit dem Zusatz $t > 0$) genügen alle und nur die Weltpunkte, in denen das Lichtsignal eintrifft. Wieder entsteht die Frage, was für ein Bezugsraum dieser Beschreibung des Vorganges zugrunde liegt. Die *Aberration der Fixsterne* zeigt, daß die Erde relativ zu ihm sich so bewegt, wie es nach der Newtonschen Theorie der Fall ist, d. h. daß er mit einem zulässigen Bezugsraum im Sinne der Newtonschen Mechanik zusammenfällt. Nun ist die Ausbreitung in konzentrischen Kugeln aber gewiß nicht invariant gegenüber den Galilei-Transformationen (III); denn eine schief gezeichnete t'-Achse schneidet in unserer Figur die Ebenen $t =$ konst. in Punkten, die exzentrisch zu den Ausbreitungskreisen liegen. Trotzdem ist dies kein Einwand gegen das Galileische Relativitätsprinzip, wenn gemäß den Vorstellungen, welche die Physik lange beherrscht haben, die Fortpflanzung des Lichtes in einem materiellen Träger geschieht, dem *Lichtäther*, dessen einzelne Teile gegeneinander bewegbar sind. Es verhält sich dann mit dem Licht genau so, wie mit den konzentrischen Wellenkreisen auf einer Wasserfläche, die durch einen hineingeworfenen Stein erzeugt werden; aus diesem Phänomen kann gewiß nicht der Schluß gezogen werden, daß die hydrodynamischen Gleichungen dem Galileischen Relativitätsprinzip widerstreiten. Denn das Medium selber, das Wasser bzw. der Äther, dessen einzelne Teile, von den verhältnismäßig kleinen Schwingungen abgesehen, gegeneinander ruhen, gibt dasjenige Bezugssystem ab, auf welches sich die Aussage der konzentrischen Ausbreitung bezieht.

Zur weiteren Diskussion dieser Frage wollen wir die Optik in denjenigen theoretischen Zusammenhang einfügen, in den sie seit Maxwell unlösbar hineingehört: die Theorie zeitlich veränderlicher elektromagnetischer Felder.

§ 20. Elektrodynamik zeitlich veränderlicher Felder. Lorentzsches Relativitätstheorem.

Der Übergang von den stationären elektromagnetischen Feldern (§ 9) zu zeitlich veränderlichen hat folgendes gelehrt.

1. Der sog. elektrische Strom besteht tatsächlich aus bewegter Elektrizität: ein geladener rotierender Drahtring erzeugt ein Magnetfeld nach dem Biot-Savartschen Gesetz. Ist die Ladungsdichte ϱ, die Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$, so ist die Stromdichte $\mathfrak{s}$ dieses Konvektionsstromes offenbar $= \varrho\,\mathfrak{v}$; doch

muß sie, damit das Biot-Savartsche Gesetz genau in der alten Form gültig bleibt, in einer andern Maßeinheit gemessen werden; es ist also zu setzen $\mathfrak{s} = \frac{\varrho \mathfrak{v}}{c}$, wo c eine universelle Konstante von der Dimension einer Geschwindigkeit ist. Das schon von Weber und Kohlrausch angestellte, später von Rowland und Eichenwald wiederholte Experiment ergab für c einen Wert, der innerhalb der Beobachtungsfehler mit der Lichtgeschwindigkeit übereinstimmt*). Man bezeichnet $\frac{\varrho}{c} = \varrho'$ als das elektromagnetische Maß der Ladungsdichte und, damit auch in elektromagnetischen Maßeinheiten die elektrische Kraftdichte $= \varrho' \mathfrak{E}'$ ist, $\mathfrak{E}' = c\mathfrak{E}$ als das elektromagnetische Maß der Feldstärke.

2. Durch ein veränderliches Magnetfeld wird in einem homogenen Draht ein Strom induziert. Er kann auf Grund des Materialgesetzes $\mathfrak{s} = \sigma \mathfrak{E}$ und des *Faradayschen Induktionsgesetzes* bestimmt werden, welches aussagt, daß die induzierte elektromotorische Kraft gleich der zeitlichen Abnahme des durch den Leiter hindurchtretenden magnetischen Induktionsflusses ist; es gilt also

$$\int \mathfrak{E}' d\mathfrak{r} = -\frac{d}{dt}\int B_n do \tag{7}$$

(links steht das Linienintegral über eine geschlossene Kurve, rechts das Oberflächenintegral der normalen Komponente der Magnetinduktion $\mathfrak{B}$, erstreckt über eine in diese Kurve eingespannte Fläche). Der Induktionsfluß ist durch die Leiterkurve eindeutig bestimmt, weil

$$\operatorname{div} \mathfrak{B} = 0 \tag{8'}$$

ist (es gibt keinen wahren Magnetismus). Der Stokessche Satz ergibt aus (7) das Differentialgesetz

$$\operatorname{rot} \mathfrak{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial t} = 0. \tag{8}$$

Die im statischen Falle gültige Gleichung $\operatorname{rot} \mathfrak{E} = 0$ erweitert sich also durch das auf der linken Seite hinzutretende, nach der Zeit differentiierte Glied $\frac{1}{c}\frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial t}$. Auf ihm beruht unsere ganze Elektrotechnik, und die Notwendigkeit seiner Einführung ist daher durch die Erfahrung auf das beste gestützt.

3. Hypothetisch war hingegen zu Maxwells Zeit dasjenige Glied, durch welches Maxwell die magnetische Grundgleichung

$$\operatorname{rot} \mathfrak{H} = \mathfrak{s} \tag{9}$$

erweiterte. In einem zeitlich veränderlichen Feld, etwa bei der Entladung eines Kondensators kann nicht $\operatorname{div} \mathfrak{s} = 0$ sein, sondern es muß statt dessen die »Kontinuitätsgleichung«

$$\frac{1}{c}\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \operatorname{div} \mathfrak{s} = 0 \tag{10}$$

gelten, in der die Tatsache, daß der Strom aus bewegter Elektrizität besteht, zum Ausdruck kommt. Da $\varrho = \operatorname{div} \mathfrak{D}$ ist, wird mithin nicht $\mathfrak{s}$, wohl aber $\mathfrak{s} + \frac{1}{c}\frac{\partial \mathfrak{D}}{\partial t}$ quellenfrei sein, und es liegt demnach sehr nahe, die Gleichung (9) im zeitlich veränderlichen Feld durch

$$(11) \qquad \operatorname{rot} \mathfrak{H} - \frac{1}{c}\frac{\partial \mathfrak{D}}{\partial t} = \mathfrak{s}$$

zu ersetzen. Daneben gilt nach wie vor

$$(11') \qquad \operatorname{div} \mathfrak{D} = \varrho .$$

Aus (11) und (11') folgt jetzt umgekehrt die Kontinuitätsgleichung (10). Auf dem nach der Zeit differentiierten Zusatzgliede $\frac{1}{c}\frac{\partial \mathfrak{D}}{\partial t}$ (dem Maxwellschen »*Verschiebungsstrom*«) beruht es, daß elektromagnetische Erregungen im Äther mit der endlichen Geschwindigkeit c sich ausbreiten; es bildet also die Grundlage der elektromagnetischen Lichttheorie, welche die optischen Erscheinungen in so wunderbarer Weise hat deuten können, und findet in den bekannten Hertzschen Versuchen und der modernen drahtlosen Telegraphie eine direkte experimentelle Bestätigung (und technische Ausnutzung). Danach ist es auch klar, daß diesen Gesetzen derjenige Bezugsraum zugrunde liegt, in welchem der Satz von der konzentrischen Ausbreitung des Lichtes gültig ist, der »ruhende« Lichtäther. — Zu den Maxwellschen Feldgleichungen (8) und (8'), (11) und (11') treten die Materialgesetze.

Wir wollen aber hier nur die Zustände im Äther betrachten; da ist

$$\mathfrak{D} = \mathfrak{E}, \qquad \mathfrak{H} = \mathfrak{B},$$

und die Maxwellschen Gleichungen lauten

$$\begin{cases} (12_{I}) \quad \operatorname{rot} \mathfrak{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial t} = 0, \qquad \operatorname{div} \mathfrak{B} = 0; \\ (12_{II}) \quad \operatorname{rot} \mathfrak{B} - \frac{1}{c}\frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial t} = \mathfrak{s}, \qquad \operatorname{div} \mathfrak{E} = \varrho . \end{cases}$$

Die atomistische Elektronentheorie betrachtet sie als die allgemein gültigen exakten Naturgesetze. Sie setzt außerdem $\mathfrak{s} = \frac{\varrho \mathfrak{v}}{c}$, wo $\mathfrak{v}$ die Geschwindigkeit der Materie bedeutet, an der die elektrische Ladung haftet.

Die auf die Massen wirkende *Kraft* besteht aus dem vom elektrischen und vom Magnetfeld herrührenden Bestandteil; ihre Dichte ist

$$(13) \qquad \mathfrak{p} = \varrho \mathfrak{E} + [\mathfrak{s}\mathfrak{B}].$$

Da $\mathfrak{s}$ zu $\mathfrak{v}$ parallel ist, ergibt sich für die pro Zeit- und Volumeinheit an den Elektronen geleistete Arbeit der Wert

$$\mathfrak{p} \cdot \mathfrak{v} = \varrho \mathfrak{E} \cdot \mathfrak{v} = c(\mathfrak{s}\mathfrak{E}) = \mathfrak{s} \cdot \mathfrak{E}'.$$

Sie wird zur Erhöhung der kinetischen Energie der Elektronen verwendet,

die sich durch die Zusammenstöße zum Teil auf die neutralen Moleküle überträgt. Phänomenologisch tritt diese verstärkte molekulare Bewegung im Innern des Leiters als *Joulesche Wärme* in Erscheinung. In der Tat lehrt ja die Beobachtung, daß $\mathfrak{s} \cdot \mathfrak{E}'$ die pro Zeit- und Volumeinheit vom Strom erzeugte Wärmemenge ist; dieser Energieverbrauch muß durch die stromerzeugende Maschine gedeckt werden. Multiplizieren wir die Gleichung (12_{I}) mit $-\mathfrak{B}$, die Gleichung (12_{II}) mit $\mathfrak{E}$ und addieren, so kommt

$$-c \cdot \operatorname{div}[\mathfrak{E}\mathfrak{B}] - \frac{\partial}{\partial t}\left(\tfrac{1}{2}\mathfrak{E}^2 + \tfrac{1}{2}\mathfrak{B}^2\right) = c(\mathfrak{s}\mathfrak{E}).$$

Setzen wir

$$[\mathfrak{E}\mathfrak{B}] = \mathfrak{S}, \qquad \tfrac{1}{2}\mathfrak{E}^2 + \tfrac{1}{2}\mathfrak{B}^2 = W$$

und integrieren über irgend ein Volumen V, so lautet diese Gleichung

$$-\frac{d}{dt}\int_V W\,dV + c\int_\Omega S_n\,do = \int_V c(\mathfrak{s}\mathfrak{E})\,dV;$$

das zweite Glied links ist das über die begrenzende Oberfläche Ω von V erstreckte Integral der nach der inneren Normale genommenen Komponente S_n von $\mathfrak{S}$. Auf der rechten Seite steht hier die im Volumen V pro Zeiteinheit geleistete Arbeit; sie wird kompensiert durch die Abnahme der in V enthaltenen Feldenergie $\int W\,dV$ und durch die von außen dem Raumstück V zufließende Energie. Unsere Gleichung enthält also das *Energiegesetz; durch sie bestätigt sich endgültig unser früherer Ansatz für die Dichte W der Feldenergie* und ergibt sich ferner, daß $c\mathfrak{S}$, der sog. Poyntingsche Vektor, den *Energiestrom* darstellt.

Die Feldgleichungen (12) sind von Lorentz unter der Voraussetzung, daß die Verteilung der Ladungen und des Stromes bekannt ist, in folgender Weise integriert worden. Der Gleichung $\operatorname{div}\mathfrak{B} = 0$ wird durch den Ansatz

$$-\mathfrak{B} = \operatorname{rot}\mathfrak{f} \tag{14}$$

($-\mathfrak{f}$ = Vektorpotential) genügt. Durch Einsetzen in die erste Gleichung ergibt sich dann, daß $\mathfrak{E} - \frac{1}{c}\frac{\partial \mathfrak{f}}{\partial t}$ wirbelfrei ist, und also kann man setzen

$$\mathfrak{E} - \frac{1}{c}\frac{\partial \mathfrak{f}}{\partial t} = \operatorname{grad}\varphi \tag{15}$$

($-\varphi$ das skalare Potential). Die Willkür, mit der die Bestimmung von $\mathfrak{f}$ behaftet ist, können wir zur Erfüllung der Nebenbedingung

$$\frac{1}{c}\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \operatorname{div}\mathfrak{f} = 0$$

ausnutzen, die sich hier als die zweckmäßige erweist (während wir im stationären Feld $\operatorname{div}\mathfrak{f} = 0$ nahmen). Führen wir die Potentiale in die beiden letzten Gleichungen ein, so liefert eine einfache Rechnung

(16) $$-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + \Delta\varphi = \varrho,$$

(16') $$-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \mathfrak{f}}{\partial t^2} + \Delta\mathfrak{f} = \mathfrak{s}.$$

Eine Gleichung von der Form (16) zeigt eine Wellenausbreitung mit der Geschwindigkeit c an. In der Tat: wie die Poissonsche Gleichung $\Delta\varphi = \varrho$ die Lösung hat

$$-4\pi\varphi = \int \frac{\varrho}{r}\, dV,$$

so lautet die Lösung von (16):

$$-4\pi\varphi = \int \frac{\varrho\left(t - \frac{r}{c}\right)}{r}\, dV;$$

hier steht auf der linken Seite der Wert von φ in einem Punkte O zur Zeit t; r ist die Entfernung des Quellpunktes P, über den integriert wird, vom Aufpunkt O, und unter dem Integral tritt der Wert von ϱ im Punkte P zur Zeit $t - \frac{r}{c}$ auf. Ebenso ist die Lösung von (16')

$$-4\pi\mathfrak{f} = \int \frac{\mathfrak{s}\left(t - \frac{r}{c}\right)}{r}\, dV.$$

Das Feld in einem Punkte hängt also nicht ab von der Ladungs- und Stromverteilung im gleichen Moment, sondern maßgebend ist für jede Stelle der Augenblick, der um so viel $\left(\frac{r}{c}\right)$ zurückliegt, als die mit der Geschwindigkeit c sich ausbreitende Wirkung gebraucht, um vom Quellpunkt bis zum Aufpunkt zu gelangen.

Wie der Potentialausdruck (in Cartesischen Koordinaten)

$$\Delta\varphi = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_3^2}$$

invariant ist gegenüber linearen Transformationen der Variablen $x_1\, x_2\, x_3$, welche die quadratische Form

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$$

in sich überführen, so ist der beim Übergang vom statischen zu einem zeitlich veränderlichen Feld an seine Stelle tretende Ausdruck

$$-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_3^2}$$

invariant gegenüber solchen linearen Transformationen der vier Koordinaten t, $x_1\, x_2\, x_3$, den sog. Lorentz-Transformationen, welche die indefinite Form

(17) $$-c^2t^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$$

in sich überführen. Lorentz und Einstein erkannten, daß nicht nur die Gleichung (16), sondern *das ganze System der elektromagnetischen Gesetze für den Äther diese Invarianzeigenschaft besitzt, daß sie sich nämlich ausdrücken durch invariante Relationen zwischen Tensoren in einem vierdimensionalen affinen Raum mit den Koordinaten* t, $x_1 x_2 x_3$, *in den durch die Form* (17) *eine (indefinite) Metrik eingetragen ist: Lorentz-Einsteinsches Relativitätstheorem.*

Zum Beweise ändern wir die Maßeinheit der Zeit, indem wir setzen $ct = x_0$. Die Koeffizienten der metrischen Fundamentalform sind dann

$$g_{ik} = 0 \ (i \neq k); \qquad g_{ii} = \varepsilon_i,$$

wo $\varepsilon_0 = -1$, $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = +1$ ist. Beim Übergang von den in bezug auf einen Index i kovarianten zu den kontravarianten Komponenten eines Tensors ist die i^{te} Komponente also lediglich mit dem Vorzeichen ε_i zu multiplizieren. Die Kontinuitätsgleichung der Elektrizität (10) gewinnt die gewünschte invariante Form,

$$\sum_{i=0}^{3} \frac{\partial s^i}{\partial x_i} = 0,$$

wenn wir

$$s^0 = \varrho; \quad s^1, s^2, s^3 \text{ gleich den Komponenten von } \mathfrak{s}$$

als die vier kontravarianten Komponenten eines Vektors in jenem vierdimensionalen Raum einführen, des »Viererstroms«. Parallel damit — vgl. (16), (16') — müssen wir

$$\varphi^0 = \varphi \text{ und die Komponenten von } \mathfrak{f}\text{: } \varphi^1, \varphi^2, \varphi^3$$

zu den kontravarianten Komponenten eines vierdimensionalen Vektors vereinigen, den wir als elektromagnetisches Potential bezeichnen; von seinen kovarianten Komponenten ist die 0te $\varphi_0 = -\varphi$, die drei andern $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ sind gleich den Komponenten von $\mathfrak{f}$. Dann lassen sich die Gleichungen (14), (15), durch welche die Feldgrößen $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{E}$ aus den Potentialen entspringen, in der invarianten Form schreiben

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_k} - \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_i} = F_{ik}, \tag{18}$$

wo

$$\mathfrak{E} = (F_{10}, F_{20}, F_{30}), \qquad \mathfrak{B} = (F_{23}, F_{31}, F_{12})$$

gesetzt ist. In dieser Weise hat man also elektrische und magnetische Feldstärke zu einem einzigen linearen Tensor 2. Stufe F, dem »Felde«, zusammenzufassen. Aus (18) ergeben sich die invarianten Gleichungen

$$\frac{\partial F_{kl}}{\partial x_i} + \frac{\partial F_{li}}{\partial x_k} + \frac{\partial F_{ik}}{\partial x_l} = 0, \tag{19}$$

und dies ist das erste System der Maxwellschen Gleichungen (12_1). Den Umweg über die Lorentzsche Lösung mit Hilfe der Potentiale haben wir lediglich eingeschlagen, um naturgemäß auf die richtige Art der Zusammenfassung der dreidimensionalen Größen zu vierdimensionalen Vektoren und

Tensoren geführt zu werden. Bei Übergang zu kontravarianten Komponenten ist

$$\mathfrak{E} = (F^{01}, F^{02}, F^{03}), \qquad \mathfrak{B} = (F^{23}, F^{31}, F^{12}).$$

Das zweite System der Maxwellschen Gleichungen lautet jetzt in invarianter vierdimensionaler Tensorschreibweise:

$$\sum_k \frac{\partial F^{ik}}{\partial x_k} = s^i. \tag{20}$$

Führen wir den vierdimensionalen Vektor mit den kovarianten Komponenten

$$p_i = F_{ik} s^k \tag{21}$$

(und den kontravarianten

$$p^i = F^{ik} s_k)$$

ein — nach früherem Brauch lassen wir die Summenzeichen wieder fort —, so ist p^0 die »Leistungsdichte«, die Arbeit pro Zeit- und Volumeinheit: $p^0 = (\mathfrak{s}\,\mathfrak{E})$ [die Zeiteinheit ist hier dem neuen Zeitmaß $x_0 = ct$ anzupassen], und p^1, p^2, p^3 sind die Komponenten der Kraftdichte.

Damit ist das Lorentzsche Relativitätstheorem vollständig bewiesen. *Zugleich aber bemerken wir, daß die erhaltenen Gesetze genau so lauten wie die Gesetze des stationären Magnetfeldes* [§ 9, (62)], *nur vom dreidimensionalen auf den vierdimensionalen Raum übertragen.* Es ist kein Zweifel, daß in der vierdimensionalen Tensorformulierung ihre wahre mathematische Harmonie, die nicht vollkommener sein könnte, zutage tritt.

Daraus ergibt sich noch weiter, daß wir genau wie im dreidimensionalen Fall die »Viererkraft« p_i aus einem vierdimensionalen symmetrischen »Spannungstensor« S herleiten können:

$$-p_i = \frac{\partial S_i^k}{\partial x_k} \quad \text{oder} \quad -p^i = \frac{\partial S^{ik}}{dx_k}, \tag{22}$$

$$S_i^k = F_{ir} F^{kr} - \tfrac{1}{2} \delta_i^k \, |F|^2. \tag{22'}$$

Das (hier nicht notwendig positive) Quadrat des Feldbetrages ist

$$|F|^2 = \tfrac{1}{2} F_{ik} F^{ik}.$$

Wir wollen die Formel (22) durch direktes Ausrechnen bestätigen. Es ist

$$\frac{\partial S_i^k}{\partial x_k} = F_{ir} \frac{\partial F^{kr}}{\partial x_k} + F^{kr} \frac{\partial F_{ir}}{\partial x_k} - \tfrac{1}{2} F^{kr} \frac{\partial F_{kr}}{\partial x_i}.$$

Der erste Term rechts ergibt

$$-F_{ir} s^r = -p_i;$$

der zweite wird, wenn man den Faktor von F^{kr} gleichfalls schiefsymmetrisch schreibt,

$$= \tfrac{1}{2} F^{kr} \left(\frac{\partial F_{ir}}{\partial x_k} - \frac{\partial F_{ik}}{\partial x_r} \right)$$

und liefert mit dem dritten vereinigt

$$-\tfrac{1}{2}F^{kr}\left(\frac{\partial F_{ik}}{\partial x_r}+\frac{\partial F_{kr}}{\partial x_i}+\frac{\partial F_{ri}}{\partial x_k}\right);$$

der dreiteilige Ausdruck in der Klammer ist nach (19) = o.

$|F|^2$ ist $= \mathfrak{B}^2 - \mathfrak{E}^2$. Sehen wir zu, was die einzelnen Komponenten von S^{ik} bedeuten, indem wir gemäß der Scheidung in Zeit und Raum den Index o von den übrigen 1, 2, 3 trennen.

S^{00} ist = der Energiedichte $W = \frac{1}{2}(\mathfrak{E}^2 + \mathfrak{B}^2)$,
S^{0i} = den Komponenten von $\mathfrak{S} = [\mathfrak{E}\mathfrak{B}]$, $(i, k = 1, 2, 3)$
S^{ik} = den Komponenten des Maxwellschen Spannungstensors,

der sich aus dem in § 9 angegebenen elektrischen und magnetischen Bestandteil zusammensetzt. Die o^te der Gleichungen (22) enthält demnach das Energiegesetz. Die 1., 2., 3. haben eine völlig analoge Gestalt. Bezeichnen wir einen Augenblick die Komponenteen des Vektors $\frac{1}{c}\mathfrak{S}$ mit G^1, G^2, G^3 und verstehen unter $\mathfrak{t}^{(i)}$ den Vektor mit den Komponenten

$$S^{i1},\ S^{i2},\ S^{i3},$$

so haben wir

$$-p^i = \frac{\partial G^i}{\partial t} + \operatorname{div}\mathfrak{t}^{(i)}. \qquad (i = 1, 2, 3) \tag{23}$$

Die Kraft, welche auf die in einem Raumgebiet V enthaltenen Elektronen wirkt, erzeugt eine ihr gleiche zeitliche Zunahme des Bewegungsimpulses derselben. Diese Zunahme wird nach (23) ausgeglichen durch eine entsprechende Abnahme des im Felde mit der Dichte $\frac{\mathfrak{S}}{c}$ verteilten *Feldimpulses* und den Zustrom des Feldimpulses von außen. Der Strom der i^{ten} Impulskomponente ist gegeben durch $\mathfrak{t}^{(i)}$, der *Impulsstrom* selber ist demnach nichts anderes als der Maxwellsche Spannungstensor. *Der Satz von der Erhaltung der Energie ist nur die eine, die Zeitkomponente eines gegenüber Lorentztransformationen invarianten Gesetzes, dessen Raumkomponenten die Erhaltung des Impulses aussagen.* Die gesamte Energie sowohl als der gesamte Impuls bleiben ungeändert; sie strömen nur im Felde hin und her und verwandeln sich aus Feldenergie und Feldimpuls in kinetische Energie und kinetischen Impuls der Materie et vice versa. Das ist die einfache anschauliche Bedeutung der Formeln (22). Ihr gemäß werden wir in Zukunft von dem Tensor S der vierdimensionalen Welt als dem *Energie-Impuls-Tensor* oder kurz Energietensor sprechen. Aus der Symmetrie desselben hat sich ergeben, daß die *Impulsdichte* $= \frac{1}{c^2}$ *mal dem Energiestrom* ist; der Feldimpuls ist daher sehr schwach, er konnte aber als Druck des Lichtes auf eine spiegelnde Fläche nachgewiesen werden. —

Eine Lorentztransformation ist linear, sie kommt daher (wenn wir in unserer graphischen Darstellung wiederum eine Raumkoordinate unter-

drücken) auf die Einführung eines andern affinen Koordinatensystems hinaus. Überlegen wir uns, wie die Grundvektoren $\mathfrak{e}'_0$, $\mathfrak{e}'_1$, $\mathfrak{e}'_2$ des neuen Koordinatensystems liegen zu denen des alten $\mathfrak{e}_0$, $\mathfrak{e}_1$, $\mathfrak{e}_2$, d. i. zu den Einheitsvektoren in Richtung der x_0 (oder t), x_1, x_2 Achse! Da für

$$\mathfrak{x} = x_0\mathfrak{e}_0 + x_1\mathfrak{e}_1 + x_2\mathfrak{e}_2 = x'_0\mathfrak{e}'_0 + x'_1\mathfrak{e}'_1 + x'_2\mathfrak{e}'_2:$$
$$-x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 = -x'^2_0 + x'^2_1 + x'^2_2 [= Q(\mathfrak{x})]$$

sein soll, ist $Q(\mathfrak{e}'_0) = -1$. Der von O aus aufgetragene Vektor $\mathfrak{e}'_0$ oder die t'-Achse liegt demnach im Innern des Kegels der Lichtausbreitung, die Parallelebenen $t' =$ konst. liegen so, daß sie aus dem Kegel Ellipsen ausschneiden, deren Mittelpunkte auf der t'-Achse liegen (s. Fig. 7), die x'_1, x'_2 Achse haben die Richtung konjugierter Durchmesser dieser Schnittellipsen, so daß die Gleichung jeder von ihnen

$$x'^2_1 + x'^2_2 = \text{konst.}$$

lautet.

Solange man an der Vorstellung des materiellen, schwingungsfähigen Äthers festhält, kann man in dem Lorentzschen Relativitätstheorem nur eine merkwürdige mathematische Transformationseigenschaft der Maxwellschen Gleichungen erblicken; das wahrhaft gültige Relativitätstheorem bleibt das Galilei-Newtonsche. Es entsteht aber die Aufgabe, nicht nur die optischen Erscheinungen, sondern die gesamte Elektrodynamik und ihre Gesetze als die Konsequenz einer dem Galileischen Relativitätsprinzip genügenden Äthermechanik zu deuten, indem man die Feldgrößen in einen bestimmten Zusammenhang mit Dichte und Geschwindigkeit des Äthers bringt. Vor Maxwells elektromagnetischer Lichttheorie hat man diese Aufgabe bekanntlich für die optischen Erscheinungen mit teilweisem, aber niemals endgültigem Erfolg zu lösen versucht; für das umfassende Gebiet, in das nach Maxwell die optischen Erscheinungen eingeordnet sind, hat man diesen Versuch nicht mehr unternommen [3]. Vielmehr begann sich *die Vorstellung des im leeren Raume existierenden Feldes, das keines Trägers bedarf*, allmählich durchzusetzen; ja schon Faraday hatte in klaren Worten die Auffassung ausgesprochen, daß sich nicht das Feld auf die Materie stützen müsse, sondern umgekehrt die Materie nichts anderes sei als Stellen des Feldes von besonderem singulären Charakter.

§ 21. Das Einsteinsche Relativitätsprinzip.

Halten wir zunächst noch an der Äthervorstellung fest! Es muß möglich sein, die Bewegung eines Körpers, z. B. der Erde, relativ zum ruhenden Äther zu konstatieren. Die Aberration leistet das nicht; durch sie wird vielmehr nur dargetan, daß jene relative Bewegung im Laufe des Jahres *wechselt*. Es seien $A_1 O A_2$ drei feste Punkte der Erde, welche ihre Bewegung mitmachen; sie mögen in gerader Linie, und zwar in der Bewegungsrichtung der Erde, in gleichem Abstand $A_1 O = O A_2 = l$ aufeinanderfolgen, und v sei die Translationsgeschwindigkeit der Erde durch

den Äther; $\frac{v}{c} = q$ ist (voraussichtlich) sehr klein. Ein in O aufgegebenes Lichtsignal wird in A_2 nach Ablauf der Zeit $\frac{l}{c-v}$, in A_1 nach Ablauf der Zeit $\frac{l}{c+v}$ eintreffen. Leider kann man diesen Unterschied nicht konstatieren, weil man über kein rascheres Signal als das Licht selber verfügt, um nach einem andern Orte die Zeit zu übermitteln*). Wir helfen uns durch den Fizeauschen Gedanken: wir bringen in A_1 und A_2 je einen kleinen Spiegel an, der den Lichtstrahl nach O reflektiert. Wird im Momente 0 das Lichtsignal in O gegeben, so wird das vom Spiegel A_2 reflektierte zur Zeit

$$\frac{l}{c-v} + \frac{l}{c+v} = \frac{2lc}{c^2 - v^2}$$

in O wieder eintreffen, das vom Spiegel A_1 reflektierte aber zur Zeit

$$\frac{l}{c+v} + \frac{l}{c-v} = \frac{2lc}{c^2 - v^2}.$$

Jetzt ist kein Unterschied mehr vorhanden. Nehmen wir aber einen dritten, die Translationsbewegung durch den Äther gleichfalls mitmachenden Punkt A auf der Erde an, so daß $OA = l$ ist, aber die Richtung OA mit der Bewegungsrichtung einen Winkel ϑ einschließt! In der Figur sind O, O', O'' die sukzessiven Orte des Punktes O zur Zeit 0, wo das Lichtsignal abgeschickt wird, im Augenblick t', in welchem es von dem an der Stelle A' befindlichen Spiegel A reflektiert wird, und schließlich zur Zeit $t' + t''$, wo es wieder in O eintrifft. Aus der Figur geht die Proportion hervor

$$OA' : O''A' = OO' : O''O';$$

Fig. 8.

folglich sind die beiden Winkel bei A' einander gleich: der reflektierende Spiegel muß, wie im Falle der Ruhe, senkrecht zu der starren Verbindung OA gestellt werden, damit der Lichtstrahl nach O zurückkommt. Eine elementare trigonometrische Rechnung liefert für die *scheinbare Fortpflanzungsgeschwindigkeit in der Richtung* ϑ:

$$\frac{2l}{t' + t''} = \frac{c^2 - v^2}{\sqrt{c^2 - v^2 \sin^2 \vartheta}}. \tag{24}$$

*) Man könnte natürlich daran denken, durch den Transport einer in Gang befindlichen Uhr die Zeit von einem Weltpunkt nach einem andern zu übertragen. Praktisch hat dieses Verfahren nicht die Präzision, die hier erforderlich ist. Theoretisch ist es von vornherein zweifelhaft, ob diese Zeitübertragung vom Wege unabhängig ist; die Relativitätstheorie führt in der Tat zu der Erkenntnis, daß eine solche Abhängigkeit besteht; vgl. darüber § 22.

Sie ist also abhängig von dem Richtungswinkel ϑ; durch ihre Beobachtung muß sich Richtung und Größe von v feststellen lassen.

Die Ausführung dieser Beobachtung ist der berühmte *Michelsonsche Versuch*[4]. Es werden zwei mit O starr verbundene Spiegel A, A^* in den Entfernungen l, l^* angebracht, der eine in der Bewegungsrichtung, der andere senkrecht zu ihr. Die ganze Montierung ist um O drehbar. Mittels einer halbdurchlässig versilberten, den rechten Winkel bei O halbierenden Glasplatte wird in O ein Lichtstrahl in zwei gespalten, deren einer auf A, deren anderer auf A^* zuläuft; dort werden sie reflektiert und bei ihrer Ankunft in O mittels jener halbversilberten Glasplatte wieder in eine einzige Strahlenrichtung vereinigt. Es tritt Interferenz ein (l und l^* sind nahezu einander gleich) wegen der aus (24) sich ergebenden Wegdifferenz

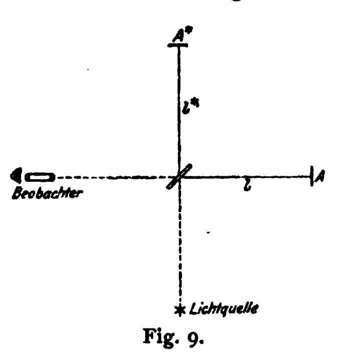


Fig. 9.

$$\frac{2l}{1-q^2} - \frac{2l^*}{\sqrt{1-q^2}}.$$

Dreht man jetzt das Gerüst langsam um 90°, bis A^* in die Bewegungsrichtung fällt, so geht diese Wegdifferenz stetig über in

$$\frac{2l}{\sqrt{1-q^2}} - \frac{2l^*}{1-q^2};$$

es tritt demnach eine Verminderung um

$$2(l+l^*)\left(\frac{1}{1-q^2} - \frac{1}{\sqrt{1-q^2}}\right) \sim (l+l^*)\,q^2$$

ein. Damit muß eine Verschiebung der Interferenzstreifen verbunden sein. *Obwohl die numerischen Verhältnisse so liegen, daß noch 1°/₀ der zu erwartenden Verschiebung im Michelsonschen Interferometer wahrgenommen werden müßte, zeigte sich bei Ausführung des Experiments keine Spur davon.*

Dieses seltsame Ergebnis suchte Lorentz durch die kühne Hypothese zu erklären, daß ein starrer Körper durch seine Bewegung relativ zum Äther in der Bewegungsrichtung eine Kontraktion im Verhältnis $1:\sqrt{1-q^2}$ erfährt. In der Tat würde dies den negativen Ausfall des Michelsonschen Experiments erklären. Denn dann hat in der ersten Lage OA in Wahrheit die Länge $l\sqrt{1-q^2}$, OA^* die Länge l^*; in der zweiten Lage aber OA die Länge l, hingegen OA^* die Länge $l^*\sqrt{1-q^2}$, und der Gangunterschied ergäbe sich in beiden Fällen $=\frac{2(l-l^*)}{\sqrt{1-q^2}}$. Auch erhielte man bei Drehung eines starr mit O verbundenen Spiegels in allen Richtungen die gleiche scheinbare Fortpflanzungsgeschwindigkeit $\sqrt{c^2-v^2}$ und keine Abhängigkeit von der Richtung wie nach (24). Immerhin er-

schiene es theoretisch noch möglich, an der gegenüber c verminderten scheinbaren Fortpflanzungsgeschwindigkeit $\sqrt{c^2 - v^2}$ die Bewegung zu konstatieren; aber wenn der Äther die Maßstäbe in der Bewegungsrichtung im Verhältnis $1 : \sqrt{1 - q^2}$ zusammendrückt, so braucht er den Gang der Uhren nur noch im gleichen Verhältnis zu verlangsamen, um auch diesen Effekt zu zerstören. *Tatsächlich hat nicht nur der Michelsonsche, sondern haben eine ganze Zahl weiterer Versuche, einen Einfluß der Erdbewegung auf kombinierte mechanisch-elektromagnetische Vorgänge festzustellen, ein negatives Ergebnis gehabt*[5]. Es wäre also die Aufgabe der Äthermechanik, nicht nur die Maxwellschen Gesetze zu erklären, sondern auch diese merkwürdige Wirkung auf die Materie, die so erfolgt, als hätte der Äther sich ein für allemal vorgenommen: Ihr verflixten Physiker, mich sollt ihr nicht kriegen!

Die einzig vernünftige Antwort aber auf die Frage: Wie kommt es, daß eine Translation im Äther sich nicht von Ruhe unterscheiden läßt? war die, welche Einstein gab: *weil er nicht existiert*! (Der Äther ist immer eine vage Hypothese geblieben, und noch dazu eine, die sich so schlecht als möglich bewährt hat.) Dann aber liegt die Sache so: für die Mechanik hat sich das Galileische, für die Elektrodynamik das Lorentzsche Relativitätstheorem ergeben. Hat es damit wirklich seine Richtigkeit, so heben sie sich gegenseitig auf und bestimmen einen absoluten Bezugsraum, in welchem die mechanischen Gesetze die Newtonsche, die elektrodynamischen die Maxwellsche Form haben. Die Schwierigkeit, den negativen Ausfall aller Experimente zu erklären, die darauf aus sind, Translation von Ruhe zu unterscheiden, wird nur dann überwunden, wenn man für die gesamten Naturerscheinungen eines dieser beiden Relativitätsprinzipe als gültig ansieht. Das Galileische kommt für die Elektrodynamik nicht in Frage; es würde fordern, daß in der Maxwellschen Theorie die Glieder nicht auftreten, durch welche sich die zeitlich veränderlichen Felder von den stationären unterscheiden: es gäbe keine Induktion, es gäbe kein Licht und keine drahtlose Telegraphie. Hingegen läßt die Lorentzsche Kontraktionshypothese schon vermuten, die Newtonsche Mechanik lasse sich derart modifizieren, daß sie dem Lorentz-Einsteinschen Relativitätstheorem genügt, die dabei auftretenden Abweichungen aber nur von der Größenordnung $\left(\frac{v}{c}\right)^2$ werden; dann liegen sie für alle irdischen und planetarischen Geschwindigkeiten v weit unter der Grenze der Beobachtungsmöglichkeit. Das ist die Lösung Einsteins[6], welche mit einem Schlage alle Schwierigkeiten behob: *die Welt ist ein vierdimensionaler affiner Raum, dem durch eine indefinite quadratische Form*

$$Q(\mathfrak{x}) = (\mathfrak{x}\mathfrak{x})$$

von einer negativen und drei positiven Dimensionen eine Maßbestimmung aufgeprägt ist. Alle physikalischen Größen sind Skalare und Tensoren dieser vierdimensionalen Welt, alle Naturgesetze invariante Relationen

zwischen diesen. Die einfache konkrete Bedeutung der Form $Q(\mathfrak{x})$ ist die, daß ein in dem Weltpunkt O abgeschicktes Lichtsignal in allen und nur den Weltpunkten A ankommt, für welche $\mathfrak{x} = \overrightarrow{OA}$ dem einen der beiden durch die Gleichung $Q(\mathfrak{x}) = 0$ definierten Kegelmäntel (vgl. § 4) angehört. Dadurch ist der »in die Zukunft geöffnete« der beiden Kegel $Q(\mathfrak{x}) \leqq 0$ vor dem in die Vergangenheit geöffneten in objektiver Weise ausgezeichnet. Wir können $Q(\mathfrak{x})$ durch Einführung eines geeigneten »*normalen*« Koordinatensystems, bestehend aus dem Nullpunkt O und den Grundvektoren $\mathfrak{e}_i$ auf die Normalform bringen

$$(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OA}) = -x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$$

(x_i die Koordinaten von A); dabei soll noch der Grundvektor $\mathfrak{e}_0$ dem in die Zukunft geöffneten Kegel angehören. *Unter diesen normalen Koordinatensystem läßt sich in objektiver Weise keine engere Auswahl treffen*, sie sind alle gleichberechtigt. Legen wir irgend eines von ihnen zugrunde, so ist x_0 als die Zeit, sind $x_1 x_2 x_3$ als Cartesische Raumkoordinaten anzusprechen, und alle auf Raum und Zeit sich beziehenden geläufigen Ausdrücke sind in diesem Bezugssystem wie sonst zu verwenden. — Die adäquate mathematische Formulierung der Einsteinschen Erkenntnis ist übrigens erst durch Minkowski[7]) gegeben worden; ihm verdanken wir die Vorstellung der vierdimensionalen Weltgeometrie, die hier von vorn herein zugrunde gelegt wurde.

Der negative Ausfall des Michelsonschen Versuches ist jetzt klar. Denn wenn die Wirkungsweise der Kohäsionskräfte der Materie wie die Ausbreitung des Lichtes dem Einsteinschen Relativitätsprinzip gemäß erfolgt, so müssen die Maßstäbe so funktionieren, daß objektive Feststellungen keinen Unterschied zwischen Ruhe und Translation ergeben können. Nachdem die Maxwellschen Gleichungen, wie schon Lorentz erkannte, dem Einsteinschen Relativitätsprinzip genügen, ist *der Michelsonsche Versuch geradezu ein Beweis dafür, daß die Mechanik der starren Körper in Strenge* nicht dem Galileischen, sondern *dem Einsteinschen Relativitätsprinzip gemäß sein muß.*

Mathematisch ist dieses ersichtlich von viel größerer Einfachheit und Durchsichtigkeit als jenes; die Weltgeometrie ist durch Einstein-Minkowski der Euklidischen Raumgeometrie viel näher gerückt worden. Übrigens kommt, wie man leicht zeigen kann, die Galileische dadurch als Grenzfall der Einsteinschen Weltgeometrie heraus, daß man c gegen ∞ konvergieren läßt. In anschaulicher Hinsicht aber *mutet es uns zu, den Glauben an die objektive Bedeutung der Gleichzeitigkeit abzulegen; in der Befreiung von diesem Dogma liegt die große erkenntnistheoretische Tat Einsteins*, die seinen Namen neben den des Kopernikus rückt. Die am Schluß des vorigen Paragraphen gegebene graphische Darstellung zeigt ohne weiteres, daß die Ebenen $x'_0 =$ konst. nicht mehr mit den Ebenen $x_0 =$ konst. zusammenfallen. Jede Ebene $x'_0 =$ konst. trägt zufolge der in der Welt herrschenden, auf $Q(\mathfrak{x})$ beruhenden Metrik ihrerseits eine solche Maß-

bestimmung, daß die Ellipse, in der sie den »Licht-Kegel« schneidet, ein Kreis ist, und in ihr gilt die Euklidische Geometrie. Ihr Durchstoßpunkt mit der x'_0-Achse ist der Mittelpunkt der Schnittellipse. So wird auch im gestrichenen Bezugssystem der Vorgang der Lichtausbreitung zu einem in konzentrischen Kreisen sich vollziehenden.

Suchen wir zunächst die Schwierigkeiten zu beheben, die für unsere Anschauung, unser inneres Erleben von Raum und Zeit in dem von Einstein herbeigeführten Umsturz des Zeitbegriffs zu liegen scheinen! Nach der gewöhnlichen Auffassung ist es so: Schieße ich von einem Punkte O aus in allen Richtungen, mit allen möglichen Geschwindigkeiten Kugeln ab, so erreichen sie alle Weltpunkte, die später als O sind; in die Vergangenheit aber kann ich nicht schießen. Ebenso ist ein in O stattfindendes Ereignis nur auf das, was in späteren Weltpunkten geschieht, von Einfluß, während an der Vergangenheit »nichts mehr geändert werden kann«; die äußerste Grenze erreicht die Gravitation nach dem Newtonschen Attraktionsgesetz, nach dem das Ausstrecken meines Armes z. B. im selben Moment bereits seine Wirkung auf die Planetenbahnen beginnt, deren Verlauf ein wenig modifizierend. Unterdrücken wir wieder eine Raumkoordinate und benutzen die graphische Darstellung, so beruht also die absolute Bedeutung der durch O laufenden Ebene $t = 0$ darauf, daß sie die »*zukünftigen*« Weltpunkte scheidet, welche von O Wirkung empfangen können, und die »*vergangenen*«, von denen aus eine Wirkung nach O gelangen kann. Nach dem Einsteinschen Relativitätsprinzip tritt an die Stelle der trennenden Ebene $t = 0$ der Lichtkegel

$$x_1^2 + x_2^2 - c^2 t^2 = 0$$

(der im Grenzfall $c = \infty$ jene doppelt überdeckte Ebene ergeben würde). Danach ist es klar, wie die Dinge jetzt liegen: Die Richtung aller in O geschleuderten Körper muß in den vorderen, der Zukunft geöffneten Kegel hineinweisen (so auch die Richtung der Weltlinie meines eigenen Leibes, meiner »Lebenslinie«, wenn ich mich in O befinde); nur auf die Ereignisse in solchen Weltpunkten, die im Innern dieses vorderen Kegels liegen, kann das, was in O geschieht, von Einfluß sein; die Grenze wird von der durch den leeren Raum erfolgenden Ausbreitung des Lichtes gegeben*). Befinde ich mich in O, so teilt O meine Lebenslinie in Vergangenheit und Zukunft; daran ist nichts geändert. Was aber mein Verhältnis zur Welt betrifft, so liegen in dem vorderen Kegel alle diejenigen Weltpunkte, auf welche mein Tun und Lassen in O von Einfluß ist, außerhalb desselben alle die Ereignisse, die abgeschlossen hinter mir liegen, an denen »jetzt nichts mehr zu ändern ist«: *der Mantel des vorderen Kegels trennt*

*) Auch die durch den leeren Raum erfolgende Ausbreitung der Gravitation muß natürlich nach der Einsteinschen Relativitätstheorie mit Lichtgeschwindigkeit erfolgen: das Gesetz für das Gravitationspotential muß sich in analoger Weise modifizieren wie dasjenige für das elektrostatische beim Übergang von statischen zu zeitlich veränderlichen Feldern.

meine aktive Zukunft von meiner aktiven Vergangenheit. Hingegen sind im Innern des hinteren Kegels alle die Ereignisse lokalisiert, die ich entweder leibhaftig miterlebt (mitangesehen) habe, oder von denen mir irgendeine Kunde gekommen sein kann, nur diese Ereignisse haben möglicherweise Einfluß auf mich gehabt; außerhalb desselben aber liegt alles, was ich noch miterleben werde oder doch miterleben würde, wenn meine Lebensdauer unbegrenzt wäre und mein Blick überall hindringen könnte: *der Mantel des hinteren Kegels scheidet meine passive Vergangenheit von meiner passiven Zukunft.* Auf dem Mantel liegt das, was ich augenblicklich sehe oder sehen könnte; er ist also eigentlich das Bild meiner räumlichen Umwelt. Daß man in diesem Sinne zwischen *aktiver* und *passiver* Vergangenheit und Zukunft unterscheiden muß, darin liegt die erst durch das Einsteinsche Relativitätsprinzip zum Ausdruck gekommene grundsätzliche Bedeutung der Römerschen Entdeckung der endlichen Lichtgeschwindigkeit. Die durch O hindurchführende Ebene $t = 0$ in einem zulässigen Bezugssystem kann irgendwie so gelegt werden, daß sie den Lichtkegel $Q(\mathfrak{x}) = 0$ nur in O schneidet und somit den Kegel der aktiven Zukunft von dem Kegel der passiven Vergangenheit trennt.

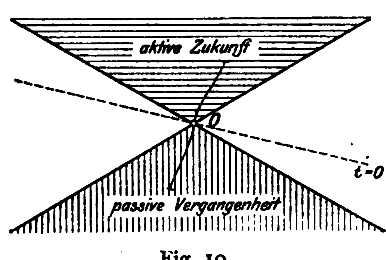


Fig. 10.

Zu einem Körper, der sich in gleichmäßiger Translation befindet, kann immer ein solches zulässiges Bezugssystem (= normales Koordinatensystem) eingeführt werden, in welchem er ruht. In diesem Bezugssystem besitzen dann die einzelnen Stellen des Körpers bestimmte Entfernungen, ihre geradlinigen Verbindungslinien bilden gewisse Winkel miteinander usw., die alle nach den Formeln der gewöhnlichen analytischen Geometrie aus den Raumkoordinaten $x_1 x_2 x_3$ der betr. Punkte in dem jetzt zugrunde gelegten Bezugssystem zu berechnen sind. Ich will sie die *Ruhmaße* des Körpers nennen (insbesondere ist danach klar, was die Ruhlänge eines Maßstabes ist). Ist jener Körper eine Uhr, in welcher sich ein periodischer Vorgang abspielt, so kommt dieser Periode in dem Bezugssystem, in welchem die Uhr ruht, eine durch den Zuwachs der Koordinate x_0 während einer Periode bestimmte Zeitdauer zu, die »*Eigenzeit*« der Uhr. — Stoßen wir den ruhenden Körper in einem und demselben Augenblick an verschiedenen Stellen an, so werden sich diese Stellen in Bewegung setzen; aber da die Wirkung sich höchstens mit Lichtgeschwindigkeit ausbreiten kann, wird die Bewegung erst allmählich den ganzen übrigen Körper in Mitleidenschaft ziehen. Solange die um die einzelnen Stoßpunkte mit Lichtgeschwindigkeit sich ausbreitenden Kugeln sich noch nicht überdecken, bewegen sich die mitgerissenen Umgebungen der Stoßpunkte vollständig unabhängig voneinander. Daraus geht hervor, daß es starre Körper

im alten Sinne gemäß der Relativitätstheorie nicht geben kann; d. h. es gibt keinen Körper, der bei allen Einwirkungen, denen man ihn aussetzt, objektiv immer derselbe bleibt. Wie können wir aber trotzdem unsere Maßstäbe zur Raummessung verwenden? Ich gebrauche ein Bild. Erhitzen wir ein im Gleichgewicht befindliches, in ein Gefäß eingeschlossenes Gas an verschiedenen Stellen gleichzeitig durch Stichflammen und isolieren es dann adiabatisch, so wird es zunächst eine Folge komplizierter Zustände durchlaufen, die den Gleichgewichtssätzen der Thermodynamik nicht genügen. Schließlich aber wird es zur Ruhe kommen in einem neuen Gleichgewichtszustand, der seiner jetzigen, durch die Erwärmung erhöhten Energie entspricht. Von einem zur Messung brauchbaren starren Körper (insbesondere einem linealen *Maßstab*) verlangen wir, daß er *immer wieder, wenn er in einem zulässigen Bezugssystem zur Ruhe gekommen ist*, der gleiche ist, der er vorher war, d. h. *die gleichen Ruhmaße* (Ruhlänge) *besitzt*; von einer richtig gehenden *Uhr*, daß sie *immer wieder, wenn sie in einem zulässigen Bezugssystem zur Ruhe gekommen ist, dieselbe Eigenzeit hat*. Wir dürfen annehmen, daß die Maßstäbe und Uhren, welche wir verwenden, mit hinreichender Annäherung dieser Forderung genügen. Nur wenn wir (in dem angezogenen Vergleich) das Gas hinreichend langsam, streng genommen: unendlich langsam erwärmen, wird es eine Folge thermodynamischer Gleichgewichtszustände durchlaufen; nur wenn wir die Maßstäbe und Uhren nicht zu stürmisch bewegen, werden sie in jedem Augenblick ihre Ruhlänge und Eigenzeit bewahren. Freilich sind die Beschleunigungsgrenzen, innerhalb deren diese Annahme ohne merklichen Fehler gemacht werden darf, sehr weit gesteckt. Endgültiges und Exaktes darüber kann aber erst eine auf den physikalischen und mechanischen Gesetzen beruhende durchgeführte *Dynamik* ergeben.

Um die Lorentz-Kontraktion vom Standpunkt der Einsteinschen Relativitätstheorie anschaulich zu verstehen, denken wir uns folgenden ebenen Vorgang. In einem tauglichen Bezugssystem (Koordinaten t, x_1, x_2 unter Unterdrückung einer Raumkoordinate), auf das sich die im folgenden gebrauchten Raum-Zeit-Ausdrücke beziehen, ruhe ein ebenes Papierblatt (mit den rechtwinkligen Koordinaten x_1, x_2), auf das eine geschlossene Kurve $\mathfrak{C}$ gezeichnet ist. Außerdem habe man eine kreisförmige Platte, die einen um den Mittelpunkt drehbaren starren Zeiger trägt; dreht man diesen langsam herum, so beschreibe die Zeigerspitze den Rand der Platte; so erweist sich, daß sie in der Tat ein Kreis ist. Die Platte bewege sich nun auf dem Papierblatt in gleichförmiger Translation; rotiert währenddes der Zeiger langsam, so wird seine Spitze beständig den Rand der Platte durchlaufen: in diesem Sinne ist sie auch in der Translation eine Kreisscheibe. In einem bestimmten Moment falle der Rand der Scheibe genau mit der Kurve $\mathfrak{C}$ zusammen. Messen wir $\mathfrak{C}$ mittels ruhender Maßstäbe aus, so finden wir, daß $\mathfrak{C}$ kein Kreis, sondern eine Ellipse ist. Der Vorgang ist in der Figur graphisch dargestellt. Es ist dasjenige Bezugssystem $t'\,x'_1\,x'_2$ hinzugefügt, in welchem die Scheibe ruht. Der

Schnitt einer Ebene $t' =$ konst. mit dem Lichtkegel ist in diesem Bezugssystem ein »augenblicklich vorhandener Kreis«; der über ihm in Richtung der t'-Achse errichtete Zylinder stellt einen im gestrichenen System ruhenden Kreis dar, grenzt demnach das Weltgebiet ab, das von unserer Kreisscheibe bestrichen wird. Der Schnitt dieses Zylinders mit der Ebene $t = 0$ ist in der Figur kein Kreis, sondern eine Ellipse; der über ihr in Richtung der t-Achse errichtete gerade Zylinder ist die dauernd vorhandene, auf dem Papierblatt gezeichnete Kurve.

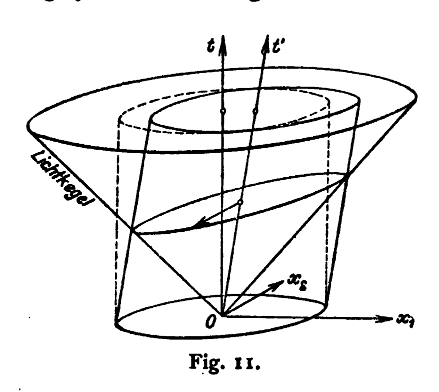


Fig. 11.

Fragen wir uns, welcher physikalischen Gesetze wir bedürfen, um die normalen Koordinatensysteme vor allen andern Koordinaten (im allgemeinen Riemannschen Sinne) auszuzeichnen, so erkennen wir, daß dazu lediglich das Galileische Trägheitsprinzip und das Gesetz der Lichtausbreitung erforderlich sind; mittels Lichtsignalen und kräftefrei sich bewegenden Massenpunkten — selbst wenn uns für die letzteren nur ein enger Geschwindigkeitsbereich zur Verfügung steht — sind wir imstande, ein derartiges Koordinatensystem festzulegen. Um dies zu erkennen, fügen wir zunächst noch eine Ergänzung zum Galileischen Trägheitsprinzip hinzu. Ist mit dem sich kräftefrei bewegenden Massenpunkt eine an seiner Bewegung teilnehmende Uhr verbunden, so wird durch ihre Zeitangaben die »Eigenzeit« s für die Bewegung gemessen. Die Weltlinie des Punktes, besagt das Galileische Prinzip, ist eine Gerade; die Augenblicke der Bewegung, fügen wir jetzt hinzu, welche durch $s = 0, 1, 2, 3, \ldots$ (oder durch irgendeine arithmetische Progression von s-Werten) gekennzeichnet werden, sind äquidistante Punkte auf dieser Geraden. Dadurch, daß wir zur Unterscheidung der verschiedenen Stadien der Bewegung den Parameter der Eigenzeit einführen, erhalten wir nicht bloß eine Linie in der vierdimensionalen Welt, sondern eine »Bewegung« in ihr (vgl. die Definition auf S. 94), und diese ist nach Galilei eine Translation.

Die Weltpunkte bilden eine vierdimensionale Mannigfaltigkeit; das ist vielleicht die sicherste Tatsache unseres gesamten Tatsachenwissens. Ein System von vier Koordinaten x_i $(i = 0, 1, 2, 3)$ zur Festlegung dieser Punkte innerhalb eines gewissen Weltstücks möge ein *lineares Koordinatensystem* heißen, wenn die Bewegung eines jeden kräftefrei sich bewegenden Massenpunktes unter Zugrundelegung des Parameters s der Eigenzeit sich analytisch so darstellt, daß die x_i lineare Funktionen von s sind. Daß es derartige Koordinatensysteme gibt, ist der eigentliche Inhalt des Trägheitsgesetzes. Durch die Forderung der Linearität ist aber das Koordinatensystem bis auf eine lineare Transformation bestimmt; d. h. sind in

einem zweiten linearen Koordinatensystem x'_i die Koordinaten desselben willkürlichen Weltpunktes, der im ersten die Koordinaten x_i besitzt, so müssen die x'_i lineare Funktionen der x_i sein. Indem wir die Weltkoordinaten x_i zugleich als Cartesische Koordinaten in einem vierdimensionalen Euklidischen Raum deuten, liefert uns ein Koordinatensystem stets eine Abbildung der Welt (oder des Weltstücks, in welchem die x_i existieren) auf einen Euklidischen Bildraum. Unsere Behauptung kann deshalb dahin formuliert werden: Eine Abbildung zweier Euklidischer Räume aufeinander, bei welcher Gerade in Gerade übergehen und eine Reihe äquidistanter Punkte auf einer Geraden stets wieder in eine äquidistante Punktreihe, ist notwendig eine affine Abbildung. Wahrscheinlich wird die beistehende Figur, welche die »Möbiussche Netzkonstruktion«[8]) veranschaulicht, dem Leser den Beweis dieses Satzes ohne weiteres an die Hand geben. Die Netzkonstruktion kann offenbar so eingerichtet werden, daß die drei Richtungen der bei ihr benutzten Geraden einem vorgegebenen, beliebig schmalen Richtungskegel entnommen werden; so daß jenes geometrische Theorem bestehen bleibt, auch wenn man nur von denjenigen Geraden, deren Richtungen diesem Kegel angehören, weiß, daß sie durch die Abbildung wieder in Gerade übergeführt werden.

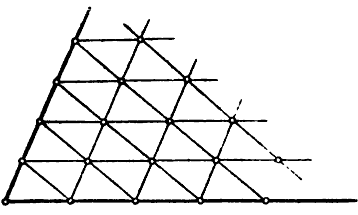


Fig. 12.

Das Galileische Trägheitsgesetz allein beweist also schon vollständig, daß die Welt affin ist; mehr aber läßt sich aus ihm auch nicht ablesen. Die metrische Grundform $(\mathfrak{x}\mathfrak{x})$ der Welt wird jetzt wie oben durch den Vorgang der Lichtausbreitung erklärt: ein in O aufgegebenes Lichtsignal trifft in dem Weltpunkt A dann und nur dann ein, wenn $\mathfrak{x} = \overrightarrow{OA}$ dem einen der beiden durch $(\mathfrak{x}\mathfrak{x}) = 0$ definierten Kegelmäntel angehört. Dadurch ist die quadratische Form bis auf einen konstanten Faktor festgelegt; um ihn zu bestimmen, muß eine individuelle Maßeinheit willkürlich gewählt werden. (Vgl. hierzu Anhang I.)

§ 22. Relativistische Geometrie, Kinematik und Optik.

Einen Weltvektor $\mathfrak{x}$ nennen wir *raum- oder zeitartig*, je nachdem $(\mathfrak{x}\mathfrak{x})$ positiv oder negativ ist. Die zeitartigen Vektoren weisen teils in die *Zukunft*, teils in die *Vergangenheit*. Wir nennen die Invariante

$$\Delta s = \sqrt{-(\mathfrak{x}\mathfrak{x})} \tag{25}$$

für einen in die Zukunft weisenden zeitartigen Vektor $\mathfrak{x}$ die *Eigenzeit* desselben; setzen wir

$$\mathfrak{x} = \Delta s \cdot \mathfrak{e},$$

so ist $\mathfrak{e}$, die »Richtung« der zeitartigen Verschiebung $\mathfrak{x}$, ein in die Zu-

kunft weisender Vektor, welcher der normierenden Bedingung $(\mathfrak{e}\mathfrak{e}) = -1$ genügt.

Wie in der Galileischen, so müssen wir auch in der Einsteinschen Weltgeometrie, um alteingewurzelte Vorstellungen und Ausdrücke über Raum und Zeit anwenden und den Zusammenhang mit der Anschauung herstellen zu können, eine *Zerspaltung der Welt in Raum und Zeit* vornehmen, durch Projektion in Richtung eines in die Zukunft weisenden zeitartigen Vektors $\mathfrak{e}$, der durch die Bedingung $(\mathfrak{e}\mathfrak{e}) = -1$ normiert sei. Der Vorgang der Projektion ist in § 19 eingehend besprochen; die aufgestellten Fundamentalformeln (3), (5), (5') sind hier mit $e = -1$ anzuwenden*). Weltpunkte, deren Verbindungsvektor zu $\mathfrak{e}$ proportional ist, fallen in denselben Raumpunkt, den wir materiell durch einen ruhenden Massenpunkt dauernd markieren können, graphisch durch eine zu $\mathfrak{e}$ parallele Weltgerade darstellen. Der dreidimensionale Raum $\boldsymbol{R}_\mathfrak{e}$, der durch die Projektion entsteht, trägt eine Euklidische Metrik, da für jeden zu $\mathfrak{e}$ orthogonalen Vektor $\mathfrak{x}^*$, d. h. jeden Vektor $\mathfrak{x}^*$, welcher der Bedingung $(\mathfrak{x}^*\mathfrak{e}) = 0$ genügt, $(\mathfrak{x}^*\mathfrak{x}^*)$ positiv ist (außer für $\mathfrak{x}^* = 0$; vgl. § 4). Jede Verschiebung $\mathfrak{x}$ der Welt spaltet sich nach der Formel

$$\mathfrak{x} = \Delta t \mid \mathfrak{x}:$$

Δt ist ihre Zeitdauer (»Höhe« wurde sie in § 19 genannt), $\mathfrak{x}$ die von ihr hervorgerufene Verschiebung im Raum $\boldsymbol{R}_\mathfrak{e}$.

Bilden $\mathfrak{e}_1, \mathfrak{e}_2, \mathfrak{e}_3$ ein Koordinatensystem in $\boldsymbol{R}_\mathfrak{e}$, so bilden die zu $\mathfrak{e} = \mathfrak{e}_0$ orthogonalen Weltverschiebungen $\mathfrak{e}_1, \mathfrak{e}_2, \mathfrak{e}_3$, durch welche jene Raumverschiebungen hervorgerufen werden, zusammen mit $\mathfrak{e}_0$ ein *»zu $\boldsymbol{R}_\mathfrak{e}$ gehöriges« Koordinatensystem* für die Weltpunkte. Es ist normal, wenn die drei Vektoren $\mathfrak{e}_i$ in $\boldsymbol{R}_\mathfrak{e}$ ein Cartesisches Koordinatensystem bilden; auf jeden Fall aber hat in ihm das Koeffizientensystem der metrischen Fundamentalform die Gestalt

$$\left|\begin{array}{cccc} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ 0 & g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ 0 & g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{array}\right|.$$

Die Eigenzeit Δs eines in die Zukunft weisenden zeitartigen Vektors $\mathfrak{x}$ $(\mathfrak{x} = \Delta s \cdot \mathfrak{e})$ ist gleich der Zeitdauer von $\mathfrak{x}$ in dem Bezugsraum $\boldsymbol{R}_\mathfrak{e}$, in welchem $\mathfrak{x}$ keine räumliche Verschiebung hervorruft. — Wir werden im folgenden mehrere Zerspaltungen nach den Vektoren $\mathfrak{e}, \mathfrak{e}', \cdots$ nebeneinander zu betrachten haben; immer soll dabei $\mathfrak{e}$ (ohne oder mit Index) einen in die Zukunft weisenden, zeitartigen, der Normierungsbedingung $(\mathfrak{e}\mathfrak{e}) = -1$ genügenden Weltvektor bezeichnen.

*) Die Maßeinheiten von Raum- und Zeitlängen sind dabei so gewählt, daß die Lichtgeschwindigkeit im leeren Raum $= 1$ wird. Will man auf die traditionellen Einheiten des *CGS*-Systems geführt werden, so muß man die Normierung $(\mathfrak{e}\mathfrak{e}) = -1$ ersetzen durch $(\mathfrak{e}\mathfrak{e}) = -c^2$, und es ist $e = -c^2$ zu nehmen.

Sei K ein Körper, der in $\boldsymbol{R}_{\mathfrak{e}}$, K' ein Körper, der in $\boldsymbol{R}_{\mathfrak{e}'}$ ruhe. K' führt in $\boldsymbol{R}_{\mathfrak{e}}$ eine gleichförmige Translation aus. Ist in $\boldsymbol{R}_{\mathfrak{e}}$, d. h. also bei Zerspaltung nach dem Vektor $\mathfrak{e}$:

$$\mathfrak{e}' = h \mid h\mathfrak{v}, \tag{26}$$

so erfährt K' in $\boldsymbol{R}_{\mathfrak{e}}$ während der Zeitdauer h die Raumverschiebung $h\mathfrak{v}$; es ist demnach $\mathfrak{v}$ die *Geschwindigkeit* von K' in $\boldsymbol{R}_{\mathfrak{e}}$ oder die *Relativgeschwindigkeit von K' in bezug auf K.* Ihre Größe v bestimmt sich aus $v^2 = (\mathfrak{v}\mathfrak{v})$. Nach (3) ist

$$h = -(\mathfrak{e}'\mathfrak{e})\,; \tag{27}$$

anderseits gilt nach (5)

$$1 = -(\mathfrak{e}'\mathfrak{e}') = h^2 - h^2(\mathfrak{v}\mathfrak{v}) = h^2(1 - v^2)\,,$$

also

$$h = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2}}\,. \tag{28}$$

Erfährt K' zwischen zwei Augenblicken seiner Bewegung die Weltverschiebung $\varDelta s \cdot \mathfrak{e}'$, so zeigt (26), daß $h \cdot \varDelta s = \varDelta t$ die Zeitdauer dieser Verschiebung in $\boldsymbol{R}_{\mathfrak{e}}$ ist; zwischen Eigenzeit $\varDelta s$ und Zeitdauer $\varDelta t$ der Verschiebung in $\boldsymbol{R}_{\mathfrak{e}}$ besteht demnach die Beziehung

$$\varDelta s = \varDelta t \sqrt{1 - v^2}\,. \tag{29}$$

Da (27) symmetrisch in $\mathfrak{e}$ und $\mathfrak{e}'$ ist, lehrt (28), daß die Größe der *Relativgeschwindigkeit von K' in bezug auf K gleich derjenigen von K in bezug auf K' ist*; die vektoriellen Relativgeschwindigkeiten selber lassen sich *nicht* miteinander vergleichen, da die eine im Raum $\boldsymbol{R}_{\mathfrak{e}}$, die andere im Raum $\boldsymbol{R}_{\mathfrak{e}'}$ liegt.

Betrachten wir drei Zerspaltungen, nach $\mathfrak{e}$, $\mathfrak{e}_1$, $\mathfrak{e}_2$. K_1, K_2 seien zwei Körper, die bzw. in $\boldsymbol{R}_{\mathfrak{e}_1}$, $\boldsymbol{R}_{\mathfrak{e}_2}$ ruhen. In $\boldsymbol{R}_{\mathfrak{e}}$ sei

$$\mathfrak{e}_1 = h_1 \mid h_1\mathfrak{v}_1\,; \qquad h_1 = \frac{1}{\sqrt{1 - v_1^2}}\,;$$

$$\mathfrak{e}_2 = h_2 \mid h_2\mathfrak{v}_2\,; \qquad h_2 = \frac{1}{\sqrt{1 - v_2^2}}\,.$$

Dann ist

$$-(\mathfrak{e}_1\mathfrak{e}_2) = h_1 h_2\{1 - (\mathfrak{v}_1\mathfrak{v}_2)\}\,.$$

Bilden also die Geschwindigkeiten $\mathfrak{v}_1$ und $\mathfrak{v}_2$ von K_1 und K_2 in $\boldsymbol{R}_{\mathfrak{e}}$, deren Größe v_1, v_2 ist, den Winkel ϑ miteinander und ist $v_{12} = v_{21}$ die Größe der Relativgeschwindigkeit von K_2 in bezug auf K_1 (oder umgekehrt), so gilt *die Formel*

$$\frac{1 - v_1 v_2 \cos\vartheta}{\sqrt{1 - v_1^2}\sqrt{1 - v_2^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - v_{12}^2}}\,, \tag{30}$$

gemäß der sich die Relativgeschwindigkeit zweier Körper aus ihren Ge-

schwindigkeiten bestimmt. Setzen wir für jede der Geschwindigkeitsgrößen $v (< 1)$ unter Benutzung des Tangens hyperbolicus:

$$v = \mathfrak{Tg}\, u,$$

so erhalten wir

$$\mathfrak{Cof}\, u_1\, \mathfrak{Cof}\, u_2 - \mathfrak{Sin}\, u_1\, \mathfrak{Sin}\, u_2 \cos\vartheta = \mathfrak{Cof}\, u_{12}.$$

Diese Formel geht in den Kosinussatz der sphärischen Trigonometrie über, wenn man die hyperbolischen durch die entsprechenden trigonometrischen Funktionen ersetzt; also ist u_{12} die dem Winkel ϑ gegenüberliegende Seite in einem Dreieck der Bolyai-Lobatschefskyschen Ebene, dessen beide anderen Seiten $= u_1, u_2$ sind.

Neben den Zusammenhang (29) zwischen Zeit und Eigenzeit stellt sich der zwischen Länge und Ruhlänge. Wir legen den Bezugsraum $\boldsymbol{R}_e$ zugrunde. In einem *bestimmten* Moment mögen sich die einzelnen Massenpunkte des Körpers in den Weltpunkten $O, A, \ldots$ befinden; die Raumpunkte $\boldsymbol{O}, \boldsymbol{A}, \ldots$ von $\boldsymbol{R}_e$, in denen sie liegen, bilden eine Figur in $\boldsymbol{R}_e$, der wir Dauer verleihen könnten, wenn der Körper K' in dem betrachteten Momente einen »Abdruck« im Raum $\boldsymbol{R}_e$ hinterließe, wie dies durch das am Schluß des vorigen Paragraphen besprochene anschauliche Beispiel illustriert wird. Fallen anderseits in dem Raum $\boldsymbol{R}_{e'}$, in welchem K' ruht, die Weltpunkte O, $A, \ldots$ in die Raumpunkte $\boldsymbol{O}', \boldsymbol{A}', \ldots$, so bilden $\boldsymbol{O}', \boldsymbol{A}', \ldots$ die Ruhgestalt des Körpers K' (man vergleiche die Figur, in der »orthogonale« Weltrichtungen als senkrechte gezeichnet sind). Zwischen demjenigen Teil von $\boldsymbol{R}_e$, den der Abdruck einnimmt, und der Ruhfigur des Körpers in $\boldsymbol{R}_{e'}$ besteht eine Abbildung, durch welche allgemein die Punkte $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{A}'$ einander zugeordnet sind; sie ist offenbar affin (es handelt sich in der Tat um nichts anderes als um orthogonale Projektion). Da die Weltpunkte O, A *gleichzeitig* sind bei Zerspaltung nach $\mathfrak{e}$, so ist

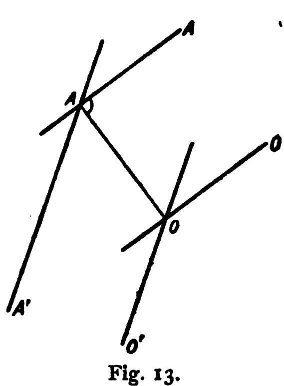


Fig. 13.

$$\overrightarrow{OA} = \mathfrak{x} = 0 \mid \mathfrak{x} \text{ in } \boldsymbol{R}_e; \quad \mathfrak{x} = \overrightarrow{\boldsymbol{OA}}.$$

Nach der Grundformel (5) ist

$$\overline{\boldsymbol{OA}}^2 = (\mathfrak{x}\mathfrak{x}) = (\mathfrak{x}\mathfrak{x}),$$
$$\overline{\boldsymbol{O'A'}}^2 = (\mathfrak{x}\mathfrak{x}) + (\mathfrak{x}\mathfrak{e}')^2.$$

Bestimmen wir aber nach (5') $(\mathfrak{x}\mathfrak{e}')$ in $\boldsymbol{R}_e$, so kommt

$$(\mathfrak{x}\mathfrak{e}') = h(\mathfrak{x}\mathfrak{v});$$

also wird

$$\overline{\boldsymbol{O'A'}}^2 = (\mathfrak{x}\mathfrak{x}) + \frac{(\mathfrak{x}\mathfrak{v})^2}{1 - v^2}.$$

Benutzen wir in $\mathfrak{R}_t$ ein Cartesisches Koordinatensystem $x_1 x_2 x_3$ mit O als Anfangspunkt, dessen x_1-Achse in die Richtung der Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$ fällt, und sind $x_1 x_2 x_3$ die Koordinaten von A, so haben wir

$$\overline{OA}^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2,$$

$$\overline{O'A'}^2 = \frac{x_1^2}{1 - v^2} + x_2^2 + x_3^2 = x_1'^2 + x_2'^2 + x_3'^2,$$

wenn man

$$(31) \qquad x_1' = \frac{x_1}{\sqrt{1 - v^2}}, \quad x_2' = x_2, \quad x_3' = x_3$$

setzt. Indem man in $\mathfrak{R}_t$ jedem Punkt mit den Koordinaten (x_1, x_2, x_3) den Punkt mit den aus (31) sich ergebenden Koordinaten (x_1', x_2', x_3') zuordnet, führt man eine Dilatation des Abdrucks in Richtung der Körperbewegung im Verhältnis $1 : \sqrt{1 - v^2}$ durch. Unsere Formeln besagen, daß dadurch der Abdruck in eine zur Ruhegestalt des Körpers kongruente Figur übergeht: das ist die *Lorentz-Kontraktion*. Insbesondere besteht zwischen dem Volumen V, das der Körper K' in einem bestimmten Augenblick im Raum $\mathfrak{R}_t$ einnimmt, und seinem Ruhvolumen V_0 die Beziehung

$$V = V_0 \sqrt{1 - v^2}.$$

Alle optischen Winkelmessungen durch Anvisieren stellen die Winkel zwischen Lichtstrahlen in demjenigen Bezugsraum fest, in welchem das (aus starrem Material gebaute) Meßinstrument ruht. *Diese Winkel sind es auch, wenn wir das Meßinstrument durch das Auge ersetzen, welche maßgebend sind für die von einem Beobachter anschaulich erfaßte Gestalt der in seinem Gesichtsfeld befindlichen Gegenstände.* Um den Zusammenhang zwischen Geometrie und Beobachtung geometrischer Größen herzustellen, müssen wir daher noch auf optische Verhältnisse eingehen.

Die einem Lichtstrahl entsprechenden Lösungen der Maxwellschen Gleichungen haben sowohl im Äther wie in einem homogenen Medium, das in einem zulässigen Bezugsraum ruht, diese Form, daß die Komponenten der Zustandsgrößen (bei komplexer Schreibweise) alle

$$= \text{konst.}\, e^{2\pi i \Theta(P)}$$

sind, wo $\Theta = \Theta(P)$, die durch diesen Ansatz nur bis auf eine additive Konstante bestimmte »Phase«, eine Funktion des als Argument auftretenden Weltpunktes ist. Nach Ausführung irgend einer linearen Transformation der Weltkoordinaten werden die Komponenten im neuen Koordinatensystem abermals die gleiche Gestalt besitzen, mit derselben Phasenfunktion Θ. Die Phase ist demnach eine Invariante. Für eine ebene Welle ist sie eine *lineare* und, wenn wir absorbierende Medien ausschließen, reelle Funktion der Weltkoordinaten von P und die Phasendifferenz in zwei beliebigen Punkten $\Theta(B) - \Theta(A)$ mithin eine Linearform der willkürlichen Verschiebung $\mathfrak{x} = \overrightarrow{AB}$, also ein kovarianter Weltvektor. Stellen

wir diesen durch die korrespondierende Verschiebung $\mathfrak{l}$ dar (wir sprechen kurz von dem »Lichtstrahl $\mathfrak{l}$«), so ist also

$$\Theta(B) - \Theta(A) = (\mathfrak{l}\mathfrak{x}).$$

Spalten wir nach einem zeitartigen Vektor $\mathfrak{e}$ in Raum und Zeit und setzen

$$(32) \qquad \mathfrak{l} = \nu \mid \frac{\nu}{q}\mathfrak{a}$$

in solcher Weise, daß der Raumvektor $\mathfrak{a}$ in $\boldsymbol{R}_\mathfrak{e}$ die Länge 1 besitzt,

$$\mathfrak{x} = \Delta t \mid \mathfrak{x},$$

so ist die Phasendifferenz

$$= \nu\left\{\frac{(\mathfrak{a}\mathfrak{x})}{q} - \Delta t\right\}.$$

Daraus geht hervor, daß ν die Frequenz bedeutet, q die Fortpflanzungsgeschwindigkeit und $\mathfrak{a}$ die Richtung des Lichtstrahls im Raume $\boldsymbol{R}_\mathfrak{e}$. Im Äther ist, wie sich noch aus den Maxwellschen Gleichungen ergibt, die Fortpflanzungsgeschwindigkeit $q = 1$ oder

$$(\mathfrak{l}\mathfrak{l}) = 0.$$

Spalten wir die Welt auf zweierlei Art, einmal nach $\mathfrak{e}$, ein andermal nach $\mathfrak{e}'$, in Raum und Zeit und unterscheiden die auf die eine und andere Spaltung bezüglichen Größen durch den Akzent, so ergibt sich nun sofort aus der Invarianz von $(\mathfrak{l}\mathfrak{l})$ das Gesetz

$$(33) \qquad \nu^2\left(\frac{1}{q^2} - 1\right) = \nu'^2\left(\frac{1}{q'^2} - 1\right).$$

Fassen wir zwei Lichtstrahlen $\mathfrak{l}_1$, $\mathfrak{l}_2$ mit den Frequenzen ν_1, ν_2 und den Fortpflanzungsgeschwindigkeiten q_1, q_2 ins Auge, so ist

$$(\mathfrak{l}_1\mathfrak{l}_2) = \nu_1\nu_2\left\{\frac{(\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2)}{q_1 q_2} - 1\right\}.$$

Bilden jene also den Winkel ω miteinander, so gilt

$$(34) \qquad \nu_1\nu_2\left\{\frac{\cos\omega}{q_1 q_2} - 1\right\} = \nu'_1\nu'_2\left\{\frac{\cos\omega'}{q'_1 q'_2} - 1\right\}.$$

Für den Äther lauten diese Gleichungen

$$(35) \qquad q = q'(=1), \qquad \nu_1\nu_2\sin^2\frac{\omega}{2} = \nu'_1\nu'_2\sin^2\frac{\omega'}{2}.$$

Um endlich den Zusammenhang zwischen den Frequenzen ν und ν' anzugeben, nehmen wir einen Körper an, der in $\boldsymbol{R}_{\mathfrak{e}'}$ ruht; er habe im Raum $\boldsymbol{R}_\mathfrak{e}$ die Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$, so daß wie früher

$$(26) \qquad \mathfrak{e}' = h \mid h\mathfrak{v} \text{ in } \boldsymbol{R}_\mathfrak{e}$$

zu setzen ist. Aus (26) und (32) folgt

$$\nu' = -(\mathfrak{l}\mathfrak{e}') = \nu h\left\{1 - \frac{(\mathfrak{a}\mathfrak{v})}{q}\right\}.$$

Bildet demnach die Richtung des Lichtstrahls in $\mathfrak{R}_t$ mit der Geschwindigkeit des Körpers den Winkel ϑ, so ist

$$\frac{\nu'}{\nu} = \frac{1 - \frac{v \cos \vartheta}{q}}{\sqrt{1 - v^2}}. \tag{36}$$

(36) ist das *Dopplersche Prinzip*. Da beispielsweise ein Natriummolekül, in einem zulässigen Bezugsraum ruhend, immer objektiv dasselbe sein wird, so besteht dieser Zusammenhang zwischen der in einem ruhenden Spektroskop beobachteten Frequenz ν' eines ruhenden und ν eines mit der Geschwindigkeit v sich bewegenden Natriummoleküls; ϑ ist der Winkel, welchen die Bewegungsrichtung des Moleküls mit dem in das Spektroskop eintretenden Lichtstrahl bildet. — Setzen wir (36) in (33) ein, so bekommen wir eine Gleichung zwischen q und q': sie gestattet, aus der Fortpflanzungsgeschwindigkeit q' des Lichtes in einem ruhenden Medium, z. B. in Wasser, die Fortpflanzungsgeschwindigkeit q im bewegten zu berechnen; v ist jetzt die Strömungsgeschwindigkeit des Wassers, ϑ der Winkel, den die Strömungsrichtung des Wassers mit dem Lichtstrahl einschließt. Lassen wir insbesondere diese beiden Richtungen zusammenfallen und vernachlässigen höhere Potenzen von v (das ja in praktischen Fällen sehr klein ist gegen die Lichtgeschwindigkeit), so bekommen wir

$$q = q' + v(1 - q'^2):$$

nicht mit ihrem vollen Betrage v, sondern nur mit dem Bruchteil $1 - \frac{1}{n^2}$ desselben $\left(n = \frac{1}{q'}\right.$ der Brechungsindex des Mediums$\left.\right)$ addiert sich die Geschwindigkeit des Mediums zur Fortpflanzungsgeschwindigkeit. Dieser »*Mitführungskoeffizient*« $1 - \frac{1}{n^2}$ war bereits lange vor der Relativitätstheorie von Fizeau experimentell dadurch festgestellt worden, daß er zwei der gleichen Lichtquelle entstammende Strahlen, deren einer durch ruhendes, deren anderer durch fließendes Wasser läuft, zur Interferenz brachte[9]. Daß die Relativitätstheorie dieses merkwürdige Resultat erklärt, zeigt, daß sie für die Optik und Elektrodynamik bewegter Medien Geltung hat (und daß in solchen nicht etwa, wie man nach der in ihnen gültigen Wellengleichung vielleicht vermuten könnte, ein Relativitätsprinzip gilt, das aus dem Lorentz-Einsteinschen hervorgeht, wenn man c durch q ersetzt). Die Formel (34) endlich wollen wir für den Äther $q = q' = 1$ spezialisieren — vgl. (35):

$$\sin^2 \frac{\omega}{2} = \frac{(1 - v \cos \vartheta_1)(1 - v \cos \vartheta_2)}{1 - v^2} \sin^2 \frac{\omega'}{2}.$$

Ist der Bezugsraum $\mathfrak{R}_t$ derjenige, auf welchen sich die Planetentheorie bezieht (und in dem der Schwerpunkt des Sonnensystems ruht), der Körper die Erde (auf der sich das Beobachtungsinstrument befindet),

v ihre Geschwindigkeit in $\mathfrak{R}_t$, ω der Winkel in $\mathfrak{R}_t$, den die zum Sonnensystem gelangenden Strahlen zweier unendlichentfernter Sterne miteinander bilden, ϑ_1, ϑ_2 die Winkel, welche diese Strahlen mit der Bewegungsrichtung der Erde in $\mathfrak{R}_t$ einschließen, so bestimmt sich der Winkel ω', unter dem die Sterne von der Erde aus beobachtet werden, durch diese Gleichung. ω können wir freilich nicht messen, aber wir beobachten die mit den Änderungen von ϑ_1 und ϑ_2 im Laufe des Jahres verbundenen Änderungen von ω' (*Aberration*). —

Die Formeln für den Zusammenhang zwischen Zeit und Eigenzeit, Volumen und Ruhvolumen gelten auch für *ungleichförmige Bewegung*. Ist $d\mathfrak{x}$ die unendlichkleine Verschiebung, welche ein sich bewegender Massenpunkt in einem unendlichkleinen Zeitraum in der Welt erfährt, so wird durch

$$d\mathfrak{x} = ds \cdot \mathfrak{u}, \qquad (\mathfrak{u}\mathfrak{u}) = -1, \qquad ds > 0$$

Eigenzeit ds und Weltrichtung $\mathfrak{u}$ dieser Verschiebung erklärt. Das über irgend ein Stück der Weltlinie erstreckte Integral

$$\int ds = \int \sqrt{-(d\mathfrak{x}, d\mathfrak{x})}$$

ist die während dieses Teiles der Bewegung verfließende »Eigenzeit«; sie ist unabhängig von jeder willkürlichen Zerspaltung der Welt in Raum und Zeit und wird bei nicht zu stürmischer Beschleunigung durch eine mit dem Massenpunkt verbundene Uhr angegeben werden. Benutzen wir irgendwelche lineare Koordinaten x_i in der Welt und die Eigenzeit s als Parameter zur analytischen Darstellung der Weltlinie (so wie wir in der dreidimensionalen Geometrie die Bogenlänge gebrauchen), so sind

$$\frac{dx_i}{ds} = u^i$$

die (kontravarianten) Komponenten von $\mathfrak{u}$, und es ist $\sum_i u_i u^i = -1$.

Zerspalten wir die Welt nach $\mathfrak{e}$ in Raum und Zeit, so gilt

$$\mathfrak{u} = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}} \,\Big|\, \frac{\mathfrak{v}}{\sqrt{1-v^2}} \quad \text{in } \mathfrak{R}_t,$$

wo $\mathfrak{v}$ die Geschwindigkeit des Massenpunktes ist, und zwischen der während der Verschiebung $d\mathfrak{x}$ verfließenden Zeit dt in $\mathfrak{R}_t$ und der Eigenzeit ds besteht der Zusammenhang

$$ds = dt\sqrt{1-v^2}. \tag{37}$$

Liegen zwei Weltpunkte A, B so zueinander, daß $\overrightarrow{AB}$ ein in die Zukunft gerichteter zeitartiger Vektor ist, so kann A mit B durch Weltlinien verbunden werden, deren Richtung überall gleichfalls dieser Bedingung genügt; es können also in A abgehende Massenpunkte nach B gelangen. Die von ihnen dazu benötigte Eigenzeit ist abhängig von der Weltlinie; sie ist am längsten für einen Massenpunkt, der in gleichförmiger Translation von A nach B fliegt. Denn zerspalten wir so in Raum und Zeit,

daß A und B in den gleichen Raumpunkt fallen, so ist diese Bewegung die Ruhe, und die Behauptung geht aus der Formel (37) hervor, welche lehrt, daß die Eigenzeit s hinter der Zeit t zurückbleibt. — Der Lebensprozeß eines Menschen kann sehr wohl mit einer Uhr verglichen werden. Von zwei Zwillingsbrüdern, die sich in einem Weltpunkt A trennen, bleibe der eine in der Heimat (d. h. ruhe dauernd in einem tauglichen Bezugsraum), der andere aber unternehme Reisen, bei denen er Geschwindigkeiten (relativ zur »Heimat«) entwickelt, die der Lichtgeschwindigkeit nahekommen; dann wird sich der Reisende, wenn er dereinst in die Heimat zurückkehrt, als merklich jünger herausstellen denn der Seßhafte.

Ein Massenelement dm (eines kontinuierlich ausgedehnten Körpers), das sich mit einer Geschwindigkeit von der Größe v bewegt, nimmt in einem bestimmten Moment ein Volumen dV ein, das mit seinem Ruhvolumen dV_0 durch die Formel zusammenhängt:

$$dV = dV_0 \sqrt{1 - v^2}.$$

Für Dichte $\frac{dm}{dV} = \mu$ und Ruhdichte $\frac{dm}{dV_0} = \mu_0$ gilt demnach die Gleichung

$$\mu_0 = \mu \sqrt{1 - v^2}.$$

μ_0 ist eine Invariante, $\mu_0 u$ mit den Komponenten $\mu_0 u^i$ also ein durch die Bewegung der Masse unabhängig vom Koordinatensystem bestimmter kontravarianter Vektor, der »materielle Strom«. Er genügt der Kontinuitätsgleichung

$$\sum_i \frac{\partial(\mu_0 u^i)}{\partial x_i} = 0.$$

Dieselben Bemerkungen finden Anwendung auf die Elektrizität: haftet sie an der Materie und ist de die elektrische Ladung des Massenelementes dm, so besteht zwischen Ruhdichte $\varrho_0 = \frac{de}{dV_0}$ und Dichte $\varrho = \frac{de}{dV}$ der Zusammenhang

$$\varrho_0 = \varrho \sqrt{1 - v^2},$$

und

$$s^i = \varrho_0 u^i$$

sind die kontravarianten Komponenten des »elektrischen (Vierer-)Stroms«; das entspricht genau dem Ansatz in § 20. In der phänomenologischen Maxwellschen Theorie der Elektrizität wird die verborgene Bewegung der Elektronen als Bewegung der Materie nicht mit berücksichtigt, folglich haftet dort die Elektrizität nicht an der Materie. Die einem Stück Materie zukommende Ladung kann dann nicht anders erklärt werden als: diejenige Ladung, welche sich gleichzeitig in demselben Raumstück befindet, das in dem betr. Moment von der Materie eingenommen wird; daraus geht hervor, daß sie nicht wie in der Elektronentheorie eine durch das Materiestück bestimmte Invariante ist, sondern abhängig von der Zerspaltung der Welt in Raum und Zeit.

§ 23. Elektrodynamik bewegter Körper.

Mit der Zerspaltung der Welt in Raum und Zeit ist eine Zerspaltung aller Tensoren verbunden; wie diese geschieht, wollen wir zunächst rein mathematisch betrachten, um sie dann auf die Herleitung der elektrodynamischen Grundgleichungen für bewegte Körper anzuwenden. Es handle sich um einen n-dimensionalen metrischen Raum, den wir als »Welt« bezeichnen, mit der metrischen Grundform $(\mathfrak{x}\mathfrak{x})$. Sei $\mathfrak{e}$ ein Vektor in ihm, für welchen $(\mathfrak{e}\mathfrak{e}) = e \neq 0$ ist: nach ihm spalten wir in bekannter Weise die Welt in Zeit und Raum $R_\mathfrak{e}$. $\mathfrak{e}_1, \mathfrak{e}_2, \ldots, \mathfrak{e}_{n-1}$ möge irgend ein Koordinatensystem im Raum $R_\mathfrak{e}$ sein und $\mathfrak{e}_1, \mathfrak{e}_2, \ldots, \mathfrak{e}_{n-1}$ diejenigen zu $\mathfrak{e} = \mathfrak{e}_0$ orthogonalen Verschiebungen der Welt, welche $\mathfrak{e}_1, \mathfrak{e}_2, \ldots, \mathfrak{e}_{n-1}$ in $R_\mathfrak{e}$ hervorrufen. In dem »zu $R_\mathfrak{e}$ gehörigen« Koordinatensystem $\mathfrak{e}_i (i = 0, 1, 2, \ldots, n-1)$ für die Welt hat das Schema der kovarianten Komponenten des metrischen Fundamentaltensors die Gestalt

$$\begin{vmatrix} e & 0 & 0 \\ 0 & g_{11} & g_{12} \\ 0 & g_{21} & g_{22} \end{vmatrix} \qquad (n = 3).$$

Wir fassen als Beispiel einen Tensor 2. Stufe ins Auge, der in diesem Koordinatensystem die Komponenten T_{ik} besitze. Er spaltet, wie wir behaupten, in einer durch $\mathfrak{e}$ allein bestimmten Weise nach dem folgenden Schema

$$\begin{array}{|c|cc|} \hline T_{00} & T_{01} & T_{02} \\ \hline T_{10} & T_{11} & T_{12} \\ T_{20} & T_{21} & T_{22} \\ \hline \end{array}$$

in einen Skalar, zwei Vektoren und einen Tensor 2. Stufe in $R_\mathfrak{e}$, die hier durch ihre Komponenten im Koordinatensystem $\mathfrak{e}_i (i = 1, 2, \ldots, n-1)$ charakterisiert sind.

Spaltet nämlich die beliebige Weltverschiebung $\mathfrak{x}$ nach $\mathfrak{e}$ wie folgt:

$$\mathfrak{x} = \xi \mid \mathfrak{x},$$

und gilt bei Zerlegung in einen zu $\mathfrak{e}$ proportionalen und einen zu $\mathfrak{e}$ orthogonalen Summanden

$$\mathfrak{x} = \xi \mathfrak{e} + \mathfrak{x}^*,$$

so ist, wenn $\mathfrak{x}$ die Komponenten ξ^i hat:

$$\mathfrak{x} = \sum_{i=0}^{n-1} \xi^i \mathfrak{e}_i, \qquad \xi = \xi^0, \qquad \mathfrak{x}^* = \sum_{i=1}^{n-1} \xi^i \mathfrak{e}_i, \qquad \mathfrak{x} = \sum_{i=1}^{n-1} \xi^i \mathfrak{e}_i.$$

Ohne Benutzung eines Koordinatensystems läßt sich daher die Zerlegung des Tensors so darstellen. Sind $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$ zwei willkürliche Verschiebungen der Welt und setzen wir

$$\mathfrak{x} = \xi \mathfrak{e} + \mathfrak{x}^*, \qquad \mathfrak{y} = \eta \mathfrak{e} + \mathfrak{y}^*, \tag{38}$$

so daß $\mathfrak{x}^*$ und $\mathfrak{y}^*$ orthogonal zu $\mathfrak{e}$ sind, so ist die zum Tensor 2. Stufe gehörige Bilinearform

$$T(\mathfrak{x}\mathfrak{y}) = \xi\eta\, T(\mathfrak{e}\mathfrak{e}) + \eta\, T(\mathfrak{x}^*\mathfrak{e}) + \xi\, T(\mathfrak{e}\mathfrak{y}^*) + T(\mathfrak{x}^*\mathfrak{y}^*).$$

Wir bekommen also, wenn wir für zwei beliebige Verschiebungen des Raumes $\mathbf{\mathfrak{x}}$, $\mathbf{\mathfrak{y}}$ unter $\mathfrak{x}^*$, $\mathfrak{y}^*$ die zu $\mathfrak{e}$ orthogonalen Verschiebungen der Welt verstehen, welche sie hervorrufen,

1. einen Skalar $T(\mathfrak{e}\mathfrak{e}) = J = \boldsymbol{J}$,
2. zwei Linearformen (Vektoren) im Raum $\boldsymbol{R}_\mathfrak{e}$, definiert durch

$$\boldsymbol{L}(\mathbf{\mathfrak{x}}) = T(\mathfrak{x}^*\mathfrak{e})\,, \qquad \boldsymbol{L}'(\mathbf{\mathfrak{x}}) = T(\mathfrak{e}\mathfrak{x}^*)\,,$$

3. eine Bilinearform (Tensor) im Raum $\boldsymbol{R}_\mathfrak{e}$, definiert durch

$$\boldsymbol{T}(\mathbf{\mathfrak{x}}\mathbf{\mathfrak{y}}) = T(\mathfrak{x}^*\mathfrak{y}^*)\,.$$

Sind $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$ beliebige Weltverschiebungen, welche $\mathbf{\mathfrak{x}}$, bzw. $\mathbf{\mathfrak{y}}$ in $\boldsymbol{R}_\mathfrak{e}$ hervorrufen, so muß man in diesen Definitionen $\mathfrak{x}^*$, $\mathfrak{y}^*$ nach (38) durch $\mathfrak{x} - \xi\mathfrak{e}$, $\mathfrak{y} - \eta\mathfrak{e}$ ersetzen, wo

$$\xi = \frac{1}{e}(\mathfrak{x}\mathfrak{e})\,, \qquad \eta = \frac{1}{e}(\mathfrak{y}\mathfrak{e})\,.$$

Setzen wir noch

$$T(\mathfrak{x}\mathfrak{e}) = L(\mathfrak{x})\,, \qquad T(\mathfrak{e}\mathfrak{x}) = L'(\mathfrak{x})\,,$$

so erhalten wir dann

$$(39)\quad \begin{cases} \boldsymbol{L}(\mathbf{\mathfrak{x}}) = L(\mathfrak{x}) - \dfrac{J}{e}(\mathfrak{x}\mathfrak{e})\,, \qquad \boldsymbol{L}'(\mathbf{\mathfrak{x}}) = L'(\mathfrak{x}) - \dfrac{J}{e}(\mathfrak{x}\mathfrak{e})\,; \\ \boldsymbol{T}(\mathbf{\mathfrak{x}}\mathbf{\mathfrak{y}}) = T(\mathfrak{x}\mathfrak{y}) - \dfrac{1}{e}(\mathfrak{y}\mathfrak{e})\,L(\mathfrak{x}) - \dfrac{1}{e}(\mathfrak{x}\mathfrak{e})\,L'(\mathfrak{y}) + \dfrac{J}{e^2}(\mathfrak{x}\mathfrak{e})(\mathfrak{y}\mathfrak{e})\,. \end{cases}$$

Die auf der linken Seite stehenden Linear- und Bilinearformen (Vektoren und Tensoren) in $\boldsymbol{R}_\mathfrak{e}$ können durch die auf der rechten Seite stehenden aus ihnen eindeutig sich bestimmenden Vektoren und Tensoren der Welt repräsentiert werden. In der obigen Komponentendarstellung kommt das darauf hinaus, daß z. B.

$$\boldsymbol{T} = \begin{vmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{vmatrix} \text{ repräsentiert wird durch } \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & T_{11} & T_{12} \\ 0 & T_{21} & T_{22} \end{vmatrix}.$$

Man sieht sofort ein, daß in allen Rechnungen die Tensoren des Raumes durch die repräsentierenden Welttensoren ersetzt werden können; doch werden wir hier nur davon Gebrauch machen, daß, wenn ein Raumtensor das λfache eines andern ist, das gleiche für die repräsentierenden Welttensoren gilt.

Legen wir dem Rechnen mit Komponenten ein *beliebiges* Koordinatensystem zugrunde, in welchem

$$\mathfrak{e} = (e^0, e^1, \ldots, e^{n-1})\,,$$

so ist die Invariante

$$J = T_{ik}e^i e^k \text{ und } e = e^i e_i\,.$$

Die beiden Vektoren und der Tensor in $\boldsymbol{R}_t$ aber haben gemäß (39) zu Repräsentanten in der Welt die beiden Vektoren und den Tensor mit den Komponenten

$$\boldsymbol{L}\colon\ L_i - \frac{J}{e}e_i, \qquad L_i = T_{ik}e^k,$$

$$\boldsymbol{L}'\colon L'_i - \frac{J}{e}e_i, \qquad L'_i = T_{ki}e^k;$$

$$\boldsymbol{T}\colon\ T_{ik} - \frac{e_k L_i + e_i L'_k}{2} + \frac{J}{e^2}e_i e_k.$$

Im Falle eines schiefsymmetrischen Tensors wird $J = 0$ und $\boldsymbol{L}' = -\boldsymbol{L}$; unsere Formeln reduzieren sich auf

$$\boldsymbol{L}\colon\ L_i = T_{ik}e^k$$

$$\boldsymbol{T}\colon\ T_{ik} + \frac{e_i L_k - e_k L_i}{e}.$$

Ein linearer Welttensor 2. Stufe spaltet im Raum in einen Vektor und einen linearen Raumtensor 2. Stufe. —

Die Maxwellschen Feldgleichungen für ruhende Körper sind in § 20 zusammengestellt worden. Von H. Hertz rührt der erste Versuch her, sie in allgemein gültiger Weise auf bewegte Körper auszudehnen. Das Faradaysche Induktionsgesetz lautet: Die zeitliche Abnahme des von einem Leiter umschlossenen Induktionsflusses ist gleich der induzierten elektromotorischen Kraft:

$$-\frac{1}{c}\frac{d}{dt}\int B_n\,do = \int \mathfrak{E}\,d\mathfrak{r}. \tag{40}$$

Dabei muß, wenn sich der Leiter bewegt, das Flächenintegral links erstreckt werden über eine in den Leiter eingespannte Fläche, die sich irgendwie mit dem Leiter mitbewegt. Da das Faradaysche Induktionsgesetz experimentell gerade an solchen Fällen geprüft wird, wo die zeitliche Änderung des vom Leiter umschlossenen Induktionsflusses durch die Bewegung des Leiters bewirkt wird, war Hertz nicht im Zweifel darüber, daß auch im Falle eines bewegten Leiters dieses Gesetz zu postulieren ist. Die Gleichung $\operatorname{div}\mathfrak{B} = 0$ bleibt bestehen; die Vektoranalysis lehrt, daß man, sie berücksichtigend, das Induktionsgesetz (40) in die differentielle Formel

$$\operatorname{rot}\mathfrak{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial\mathfrak{B}}{\partial t} + \frac{1}{c}\operatorname{rot}[\mathfrak{v}\mathfrak{B}] \tag{41}$$

kleiden kann, in der $\frac{\partial\mathfrak{B}}{\partial t}$ den nach der Zeit an einer festen Raumstelle genommenen Differentialquotienten bedeutet und $\mathfrak{v}$ die Geschwindigkeit der Materie.

Gleichung (41) hat merkwürdige Konsequenzen. Denken wir uns (Wilsonscher Versuch) zwischen zwei Kondensatorplatten ein homogenes Dielektrikum, das sich mit der konstanten Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$ von der

Größe v zwischen ihnen bewegt; die beiden Kondensatorplatten seien leitend verbunden, und es herrsche ein homogenes Magnetfeld H parallel den Platten, senkrecht zu $\mathfrak{v}$. Das Dielektrikum denken wir uns durch einen schmalen, leeren Zwischenraum von den Kondensatorplatten getrennt, dessen Dicke wir aber im Limes = 0 annnehmen. Aus (41) folgt dann, daß in dem Raum zwischen den Platten $\mathfrak{E} - \frac{1}{c}[\mathfrak{v}\mathfrak{B}]$ sich aus einem Potential ableitet; da dieses an den leitend verbundenen Platten = 0 sein muß, folgt leicht

$$\mathfrak{E} = \frac{1}{c}[\mathfrak{v}\mathfrak{B}].$$

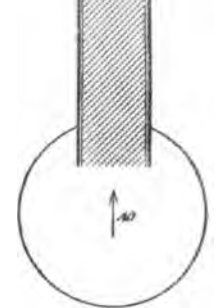


Fig. 14.

Es entsteht also senkrecht zu den Platten ein homogenes elektrisches Feld von der Stärke

$$E = \frac{\mu}{c} vH \qquad (\mu = \text{Permeabilität}).$$

Folglich muß auf den Platten eine statische Ladung mit der Oberflächendichte

$$\frac{\varepsilon\mu}{c} vH \quad (\varepsilon = \text{Dielektrizitätskonstante})$$

auftreten. Ist das Dielektrikum ein Gas, so müßte dieser Effekt auch bei beliebiger Verdünnung sich zeigen, da bei unendlicher Verdünnung $\varepsilon\mu$ nicht gegen 0, sondern gegen 1 konvergiert. Dies hat nur einen Sinn, wenn man an den Äther glaubt; dann heißt das, daß der Effekt auftritt, wenn der Äther zwischen den Platten sich relativ zu ihnen und dem außerhalb der Platten ruhenden Äther bewegt. Zur Erklärung der Induktion aber müßte man annehmen, daß der Äther bei der Bewegung des Leitungsdrahtes von diesem mitgerissen wird*). Die Beobachtung, der Fizeausche Versuch der Lichtfortpflanzung im strömenden Wasser und der Wilsonsche Versuch selber [10]) zeigen aber die Unrichtigkeit dieser Annahme; wie bei Fizeaus Versuch der Mitführungskoeffizient $1 - \frac{1}{n^2}$ auftritt, so ist bei der gegenwärtigen Anordnung nur eine Aufladung von der Größe

$$\frac{\varepsilon\mu - 1}{c} vH$$

beobachtet worden, welche verschwindet, wenn $\varepsilon\mu = 1$ wird. Das scheint in unlösbarem Widerspruch zur Tatsache der Induktion des bewegten Leiters zu stehen.

Die Relativitätstheorie bringt hier die volle Aufklärung. Setzen wir wieder, wie in § 20, $ct = x_0$ und fassen, wie dort $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{B}$ zum Felde F,

*) Und $\mathfrak{v}$ in (41) bedeutete nicht die Geschwindigkeit der Materie, sondern des Äthers, aber relativ wozu?

so auch $\mathfrak{D}$ und $\mathfrak{H}$ zu einem schiefsymmetrischen Tensor 2. Stufe H zusammen, so lauten die Feldgleichungen

$$(42)\qquad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial F_{kl}}{\partial x_i} + \frac{\partial F_{li}}{\partial x_k} + \frac{\partial F_{ik}}{\partial x_l} = 0\,, \\ \sum_k \frac{\partial H^{ik}}{\partial x_k} = s^i. \end{array} \right.$$

Sie gelten, wenn wir die F_{ik} als die kovarianten, H^{ik} als die kontravarianten Komponenten je eines Tensors 2. Stufe auffassen, die s^i aber als kontravariante Komponenten eines Vektors in der vierdimensionalen Welt, wegen ihres invarianten Charakters in einem beliebigen linearen Koordinatensystem. Die Materialgesetze

$$\mathfrak{D} = \varepsilon\mathfrak{E}, \qquad \mathfrak{B} = \mu\mathfrak{H}, \qquad \mathfrak{s} = \sigma\mathfrak{E}$$

aber besagen: spalten wir die Welt derart in Raum und Zeit, daß die Materie ruht, und spaltet dabei F in $\mathfrak{E} \mid \mathfrak{B}$, H in $\mathfrak{D} \mid \mathfrak{H}$ und s in $\varrho \mid \mathfrak{s}$, so gelten jene Beziehungen. Benutzen wir nunmehr ein beliebiges Koordinatensystem und hat in ihm die Weltrichtung der Materie die Komponenten u^i, so formulieren sich diese Tatsachen nach unsern obigen Ausführungen so:

$$(43)\qquad H_i^* = \varepsilon F_i^*,$$

wo

$$F_i^* = F_{ik}u^k, \qquad H_i^* = H_{ik}u^k$$

ist;

$$(44)\qquad F_{ik} - (u_i F_k^* - u_k F_i^*) = \mu\{H_{ik} - (u_i H_k^* - u_k H_i^*)\}$$

und

$$(45)\qquad s_i + u_i(s_k u^k) = \sigma F_i^*.$$

Das ist die invariante Form jener Gesetze. Für die Durchrechnung ist es noch bequem, (44) durch die unmittelbar daraus sich ergebenden Gleichungen

$$(46)\qquad F_{kl}u_i + F_{li}u_k + F_{ik}u_l = \mu\{H_{kl}u_i + H_{li}u_k + H_{ik}u_l\}$$

zu ersetzen. Sie gelten ihrer Herleitung nach nur für Materie, die in gleichförmiger Translation begriffen ist; wir dürfen sie aber auch als gültig betrachten für einen in gleichförmiger Bewegung befindlichen Einzelkörper, der durch leeren Raum von andern, sich mit andern Geschwindigkeiten bewegenden Körpern getrennt ist*); endlich auch für beliebig bewegte Materie, wenn deren Geschwindigkeit zeitlich und örtlich nicht zu rasch veränderlich ist.

Nachdem wir so die invariante Gestalt gewonnen haben, können wir jetzt nach einem beliebigen $\mathfrak{e}$ spalten; in $\boldsymbol{R}_\mathfrak{e}$ mögen die Meßinstrumente,

*) Das ist in den meisten Anwendungen der springende Punkt; dadurch, daß wir auf ein Gebiet, bestehend aus je einem Körper K und dem ihn umgebenden leeren Raum, in demjenigen Bezugssystem, in welchem K ruht, die Maxwellschen Ruh-Gesetze anwenden, kommen wir von den verschiedenen, gegeneinander bewegten Körpern her nicht zu Diskrepanzen im leeren Raum, *weil in ihm das Relativitätsprinzip gilt.*

die zur Messung der ponderomotorischen Wirkungen des Feldes benutzt werden, ruhen. Wir verwenden ein zu $\boldsymbol{R}_t$ gehöriges Koordinatensystem und setzen also

$$\begin{aligned}(F_{10}, F_{20}, F_{30}) &= (\boldsymbol{E}_1, \boldsymbol{E}_2, \boldsymbol{E}_3) = \mathfrak{E}\\ (F_{23}, F_{31}, F_{12}) &= (\boldsymbol{B}_{23}, \boldsymbol{B}_{31}, \boldsymbol{B}_{12}) = \mathfrak{B}\\ (H_{10}, H_{20}, H_{30}) &= (\boldsymbol{D}_1, \boldsymbol{D}_2, \boldsymbol{D}_3) = \mathfrak{D}\\ (H_{23}, H_{31}, H_{12}) &= (\boldsymbol{H}_{23}, \boldsymbol{H}_{31}, \boldsymbol{H}_{12}) = \mathfrak{H}\end{aligned}$$

$$s^0 = \varrho; \qquad (s^1, s^2, s^3) = (\mathfrak{s}^1, \mathfrak{s}^2, \mathfrak{s}^3) = \mathfrak{s}$$

$$u^0 = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2}}; \qquad (u^1, u^2, u^3) = \frac{(\mathfrak{v}^1, \mathfrak{v}^2, \mathfrak{v}^3)}{\sqrt{1 - v^2}} = \frac{\mathfrak{v}}{\sqrt{1 - v^2}},$$

dann ergeben sich zunächst wiederum *die Maxwellschen Feldgleichungen, die somit nicht nur für ruhende, sondern auch für bewegte Materie in unveränderter Form gültig sind.* Verstößt aber das nicht aufs krasseste gegen die Induktionsbeobachtungen, die doch ein Zusatzglied wie in (41) zu fordern scheinen? Nein; denn durch diese Beobachtungen wird in Wahrheit nicht die Feldstärke $\mathfrak{E}$ bestimmt, sondern der im Leiter fließende Strom; der Zusammenhang zwischen beiden ist aber für bewegte Körper ein anderer, nämlich durch die Gleichung (45) gegeben.

Schreiben wir von den Gleichungen (43), (45) die den Indizes $i = 1, 2, 3$ entsprechenden Komponenten hin, von (46) die, welche

$$(ikl) = (230), (310), (120)$$

korrespondieren (die andern sind überschüssig), so ergibt sich, wie man ohne weiteres übersieht, folgendes. Wird

$$\begin{aligned}\mathfrak{E} + [\mathfrak{v}\mathfrak{B}] &= \mathfrak{E}^*, & \mathfrak{D} + [\mathfrak{v}\mathfrak{H}] &= \mathfrak{D}^*,\\ \mathfrak{B} - [\mathfrak{v}\mathfrak{E}] &= \mathfrak{B}^*, & \mathfrak{H} - [\mathfrak{v}\mathfrak{D}] &= \mathfrak{H}^*\end{aligned}$$

gesetzt, so ist

$$\mathfrak{D}^* = \varepsilon\mathfrak{E}^*, \qquad \mathfrak{B}^* = \mu\mathfrak{H}^*.$$

Zerlegen wir außerdem $\mathfrak{s}$ in den »Konvektionsstrom« $\mathfrak{c}$ und »Leitungsstrom« $\mathfrak{s}^*$:

$$\mathfrak{s} = \mathfrak{c} + \mathfrak{s}^*;$$

$$\mathfrak{c} = \varrho^*\mathfrak{v}, \qquad \varrho^* = \frac{\varrho - (\mathfrak{v}\mathfrak{s})}{1 - v^2} = \varrho - (\mathfrak{v}\mathfrak{s}^*),$$

so ist ferner

$$\mathfrak{s}^* = \frac{\sigma\mathfrak{E}^*}{\sqrt{1 - v^2}}.$$

Jetzt klärt sich alles auf: der Strom ist teils Konvektionsstrom, rührt her von der Bewegung der geladenen Materie, teils Leitungsstrom, bestimmt durch die Leitfähigkeit σ der Substanz. Der Leitungsstrom berechnet sich aus dem Ohmschen Gesetz, wenn die elektromotorische Kraft nicht

durch das Linienintegral von $\mathfrak{E}$, sondern von $\mathfrak{E}^*$ definiert wird. Für $\mathfrak{E}^*$ aber gilt genau die zu (41) analoge Gleichung

$$\operatorname{rot} \mathfrak{E}^* = -\frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial t} + \operatorname{rot}[\mathfrak{v}\mathfrak{B}]$$

(c ist jetzt durchgängig $= 1$ genommen) oder, integral geschrieben wie (40),

$$-\frac{d}{dt}\int B_n \, do = \int \mathfrak{E}^* \, d\mathfrak{r} \, .$$

Damit ist die Faradaysche Induktion in bewegten Leitern vollkommen erklärt. Was den Wilsonschen Versuch betrifft, so gilt nach der jetzigen Theorie $\operatorname{rot} \mathfrak{E} = 0$, und es wird demnach $\mathfrak{E} = 0$ sein zwischen den Platten. Daraus ergibt sich aber für die konstanten Beträge der einzelnen Vektoren (von denen die elektrischen senkrecht zu den Platten, die magnetischen parallel den Platten senkrecht zur Geschwindigkeit gerichtet sind):

$$E^* = vB^* = v\mu H^* = \mu v(H + vD)$$
$$D = D^* - vH = \varepsilon E^* - vH.$$

Setzen wir den Ausdruck von E^* aus der ersten Gleichung ein, so kommt

$$D = v\{(\varepsilon\mu - 1) H + \varepsilon\mu v D\},$$

$$D = \frac{\varepsilon\mu - 1}{1 - \varepsilon\mu v^2} vH \, .$$

Das ist der Wert der flächenhaften Ladungsdichte, die sich auf den Kondensatorplatten herstellt; er stimmt mit den Beobachtungen überein, da wegen der Kleinheit von v der Nenner in unserer Formel außerordentlich wenig von 1 verschieden ist.

Die Grenzbedingungen an der Grenze der Materie gegen den Äther ergeben sich daraus, daß die Feldgrößen F und H keine sprunghafte Änderung erleiden werden, wenn man mit der Materie mitgeht; wohl aber werden sie im allgemeinen an einer festen, zunächst im Äther gelegenen Raumstelle einen Sprung in dem Momente erleiden, wo sich die Materie über diesen Punkt hinüberschiebt. Ist s die Eigenzeit eines Materieelements, so muß also

$$\frac{dF_{ik}}{ds} = \frac{\partial F_{ik}}{\partial x_l} u^l$$

überall endlich bleiben. Setzen wir

$$\frac{\partial F_{ik}}{\partial x_l} = -\left(\frac{\partial F_{kl}}{\partial x_i} + \frac{\partial F_{li}}{\partial x_k}\right),$$

so sieht man, daß dieser Ausdruck

$$= \frac{\partial F_i^*}{\partial x_k} - \frac{\partial F_k^*}{\partial x_i}$$

ist. $\mathfrak{E}^*$ kann folglich keine Flächenwirbel besitzen (und $\mathfrak{B}$ keine Flächendivergenz).

Die Grundgleichungen für bewegte Körper sind in der hier gegebenen Form im wesentlichen schon von Lorentz vor der Entdeckung des Relativitätsprinzips aus der Elektronentheorie hergeleitet worden. Das ist aber kein Wunder, da ja die Maxwellschen Grundgesetze für den Äther dem Relativitätsprinzip genügen und die Elektronentheorie durch Mittelwertbildung aus diesen Gesetzen die für die Materie gültigen herleitet. Der Fizeausche, der Wilsonsche und noch ein analoger, der Röntgen-Eichenwaldsche Versuch [11]) beweisen, daß für das elektromagnetische Verhalten der Materie das Relativitätsprinzip Geltung besitzt; die Probleme der Elektrodynamik für bewegte Körper waren es, die Einstein zu seiner Aufstellung führten. Minkowski verdanken wir die klare Einsicht, daß die Grundgleichungen für bewegte Körper durch das Relativitätsprinzip eindeutig festgelegt sind, wenn man die Maxwellsche Theorie für ruhende Materie zugibt; von ihm rührt die endgültige Formulierung her [12]).

Es handelt sich jetzt endlich darum, *die Mechanik*, die in ihrer klassischen Form dem Prinzip nicht Genüge leistet, ihm zu unterwerfen und zu untersuchen, ob sich die dazu nötigen Modifikationen in Einklang mit der Erfahrung befinden.

§ 24. Mechanik des Relativitätsprinzips.

Als maßgebend für die ponderomotorische Wirkung des elektromagnetischen Feldes haben wir in der Elektronentheorie einen Vektor $\mathfrak{p}$ gefunden, dessen kontravariante Komponenten

$$p^i = F^{ik} s_k = \varrho_0 F^{ik} u_k \cdot$$

sind. Er erfüllt also die Gleichung

$$p^i u_i = (\mathfrak{p}\mathfrak{u}) = 0\,; \tag{47}$$

$\mathfrak{u}$ ist die Weltrichtung der Materie. Spalten wir irgendwie in Raum und Zeit

$$\begin{cases} \mathfrak{u} = h \mid h\mathfrak{v} \\ \mathfrak{p} = \lambda \mid \mathfrak{p}, \end{cases} \tag{48}$$

so ist $\mathfrak{p}$ die Kraftdichte und, wie aus (47) oder

$$h\{\lambda - (\mathfrak{p}\mathfrak{v})\} = 0$$

hervorgeht, λ die Leistungsdichte.

Das Grundgesetz der dem Einsteinschen Relativitätsprinzip gemäßen Mechanik erhalten wir durch die gleiche Methode wie im vorigen Paragraphen die elektromagnetischen Grundgleichungen für bewegte Körper: wir nehmen an, daß das Newtonsche Gesetz in demjenigen Bezugsraum, in welchem die Materie ruht, seine Gültigkeit behalte. Wir fassen die Materiestelle m ins Auge, die sich in einem bestimmten Weltpunkt O befindet, und spalten nach ihrer Weltrichtung $\mathfrak{u}$ in Raum und Zeit. m ruht momentan in $\boldsymbol{R}_{\mathfrak{u}}$. μ_0 sei in $\boldsymbol{R}_{\mathfrak{u}}$ die Dichte der Materie im Punkte O.

Nach Verlauf der unendlichkleinen Zeit ds habe m die Weltrichtung $\mathfrak{u} + d\mathfrak{u}$. Aus $(\mathfrak{u}\mathfrak{u}) = -1$ folgt

$$(\mathfrak{u} \cdot d\mathfrak{u}) = 0;$$

mithin gilt bei der Spaltung nach $\mathfrak{u}$:

$$\mathfrak{u} = 1 \mid 0, \quad d\mathfrak{u} = 0 \mid d\mathfrak{v}, \quad \mathfrak{p} = 0 \mid \mathfrak{p}.$$

Aus

$$\mathfrak{u} + d\mathfrak{u} = 1 \mid d\mathfrak{v}$$

geht hervor, daß dabei $d\mathfrak{v}$ die von m (in $R_\mathfrak{u}$) während der Zeit ds gewonnene Relativgeschwindigkeit ist. Es kann kein Zweifel sein, daß das mechanische Grundgesetz lautet:

$$\mu_0 \frac{d\mathfrak{v}}{ds} = \mathfrak{p}.$$

Daraus folgt aber sofort die von jeder Zerspaltung unabhängige invariante Form

$$(49) \qquad \mu_0 \frac{d\mathfrak{u}}{ds} = \mathfrak{p};$$

μ_0 ist die *Ruhdichte*, ds die während der unendlichkleinen Verschiebung des Masseteilchens, bei welcher seine Weltrichtung den Zuwachs $d\mathfrak{u}$ erfährt, verfließende *Eigenzeit*.

Die Zerspaltung nach $\mathfrak{u}$ wäre eine solche, die während der Bewegung des Masseteilchens wechselt. Spalten wir aber jetzt in Raum und Zeit nach irgendeinem festen zeitartigen, in die Zukunft weisenden, der normierenden Bedingung $(\mathfrak{e}\mathfrak{e}) = -1$ genügenden Vektor $\mathfrak{e}$, so zerlegt sich (49) nach (48) in

$$(50) \qquad \left\{ \begin{aligned} \mu_0 \frac{d}{ds}\left(\frac{1}{\sqrt{1 - v^2}}\right) &= \lambda, \\ \mu_0 \frac{d}{ds}\left(\frac{\mathfrak{v}}{\sqrt{1 - v^2}}\right) &= \mathfrak{p}. \end{aligned} \right.$$

Bedeutet bei der jetzigen Zerspaltung t die Zeit, dV das Volumen und dV_0 das Ruhvolumen des Masseteilchens in einem bestimmten Augenblick, $m = \mu_0 dV_0$ aber dessen Masse,

$$\mathfrak{p}\, dV = \mathfrak{P}, \quad \lambda\, dV = \Lambda$$

die auf das Masseteilchen einwirkende Kraft und deren Leistung, so liefern unsere Gleichungen durch Multiplikation mit dV, wenn man noch beachtet, daß

$$\mu_0 dV \cdot \frac{d}{ds} = m\sqrt{1 - v^2} \cdot \frac{d}{ds} = m \cdot \frac{d}{dt}$$

ist, und daß die Masse m während der Bewegung erhalten bleibt:

$$(51) \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{m}{\sqrt{1 - v^2}}\right) = \Lambda,$$

$$(52) \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{m\mathfrak{v}}{\sqrt{1 - v^2}}\right) = \mathfrak{P}.$$

Das sind die mechanischen Gleichungen für den Massenpunkt. Die Impulsgleichung (52) hat gegenüber der Newtonschen nur die Änderung erfahren, daß der kinetische Impuls des Massenpunktes

$$\text{nicht} = m\mathfrak{v}, \text{ sondern} = \frac{m\mathfrak{v}}{\sqrt{1-v^2}}$$

ist. Die Energiegleichung (51) mutet zunächst fremd an; entwickelt man aber nach Potenzen von v, so ist

$$\frac{m}{\sqrt{1-v^2}} = m + \frac{mv^2}{2} + \cdots,$$

und wir werden unter Vernachlässigung der höheren Potenzen von v und des konstanten Gliedes auf den klassischen Ausdruck $\frac{mv^2}{2}$ für die kinetische Energie zurückgeführt.

Wie man sieht, sind die Abweichungen von der Newtonschen Mechanik, wie wir vermuteten, nur von der Größenordnung des Quadrats der an der Lichtgeschwindigkeit gemessenen Geschwindigkeit des Massenpunktes; bei den kleinen Geschwindigkeiten, mit denen wir es in der Mechanik stets zu tun haben, wird daher experimentell kein Unterschied festzustellen sein. Er wird erst bei Geschwindigkeiten merklich werden, die der Lichtgeschwindigkeit nahekommen; bei diesen nimmt der Trägheitswiderstand der Materie gegen die beschleunigende Kraft in solcher Weise zu, daß die Lichtgeschwindigkeit niemals erreicht wird. In den freien negativen Elektronen, die sich in den *Kathodenstrahlen* und der von einem radioaktiven Körper ausgehenden β-Strahlung bewegen, haben wir Korpuskeln kennen gelernt, deren Geschwindigkeit der Lichtgeschwindigkeit vergleichbar ist; für sie ist nun in der Tat durch Versuche von Kaufmann, Bucherer, Ratnowsky, Hupka u. a. das von der Relativitätstheorie geforderte Verhalten bei longitudinaler Beschleunigung durch ein elektrisches und transversaler Beschleunigung durch ein Magnetfeld experimentell festgestellt worden. Eine weitere Bestätigung, welche die Bewegung der im Atom umlaufenden Elektronen betrifft, hat sich neuerdings aus der Feinstruktur der vom Atom ausgestrahlten Spektrallinien ergeben[13]).

Erst wenn wir denjenigen Grundgleichungen der Elektronentheorie, die wir in § 20 auf eine dem Relativitätsprinzip genügende invariante Form gebracht haben, die Gleichung $s^i = \varrho_0 u^i$, die Aussage, daß die Elektrizität an der Materie haftet, und die mechanischen Grundgleichungen hinzugefügt haben, erhalten wir einen zyklisch geschlossenen Gesetzeszusammenhang, in dem eine wirkliche, von Bezeichnungskonventionen unabhängige Aussage über den Verlauf von Naturerscheinungen enthalten ist. Erst jetzt also können wir eigentlich behaupten, für ein gewisses Gebiet, das der elektromagnetischen Vorgänge, die Gültigkeit des Relativitätsprinzips nachgewiesen zu haben.

Im elektromagnetischen Feld leitet sich der ponderomotorische Vektor p_i ab aus einem nur von den lokalen Werten der Zustandsgrößen abhängigen Tensor S_{ik} nach den Formeln

$$p_i = -\frac{\partial S_i^k}{\partial x_k}.$$

Gemäß der universellen Bedeutung, welche wir dem Energiebegriff in der Naturwissenschaft zuschreiben, haben wir anzunehmen, daß dies nicht nur für das elektromagnetische Feld, sondern für jedes physikalische Erscheinungsgebiet zutrifft, und daß es überhaupt zweckmäßig ist, auf diesen Tensor statt auf die ponderomotorische Kraft als die ursprüngliche Größe zurückzugreifen. Für jedes Erscheinungsgebiet handelt es sich darum, zu ermitteln, in welcher Weise der Energie-Impuls-Tensor (dessen Komponenten S_{ik} stets der Symmetriebedingung genügen müssen) von den charakteristischen Feld- oder Zustandsgrößen abhängt. Auch die linke Seite der mechanischen Gleichungen

$$\mu_0 \frac{du_i}{ds} = p_i$$

kann ohne weiteres auf einen »kinetischen« Energie-Impuls-Tensor zurückgeführt werden:

$$U_{ik} = \mu_0 u_i u_k.$$

Es ist nämlich

$$\frac{\partial U_i^k}{\partial x_k} = u_i \frac{\partial(\mu_0 u^k)}{\partial x_k} + \mu_0 u^k \frac{\partial u_i}{\partial x_k}.$$

Das erste Glied auf der rechten Seite ist $= 0$ wegen der Kontinuitätsgleichung der Materie, die zweite $= \mu_0 \frac{du_i}{ds}$ wegen

$$u^k \frac{\partial u_i}{\partial x_k} = \frac{\partial u_i}{\partial x_k}\frac{dx_k}{ds} = \frac{du_i}{ds}.$$

Demgemäß besagen die mechanischen Gleichungen, daß der gesamte Energie-Impuls-Tensor

$$T_{ik} = U_{ik} + S_{ik},$$

zusammengesetzt aus dem kinetischen U und dem potentiellen S, den Erhaltungssätzen genügt:

$$\frac{\partial T_i^k}{\partial x_k} = 0.$$

Damit hat das Prinzip von der Erhaltung der Energie seine beste Formulierung erfahren; es ist aber nach der Relativitätstheorie unlöslich verknüpft mit dem Prinzip von der Erhaltung des Impulses, und *dem Begriff des Impulses muß eine ebenso universelle Bedeutung zukommen wie dem der Energie.* Drücken wir den kinetischen Tensor an einer Welt-

stelle in einem solchen normalen Koordinatensystem aus, relativ zu dem die Materie daselbst momentan ruht, so nehmen seine Komponenten eine außerordentlich einfache Gestalt an: es ist $U_{00} = \mu_0$ (oder $= c^2\mu_0$, wenn das *CGS*-System benutzt wird, in welchem c nicht $= 1$ ist), und alle übrigen Komponenten verschwinden. Dies legt den Gedanken nahe, daß die Masse als zusammengeballte potentielle Energie aufzufassen ist, die durch den Raum fortschreitet.

§ 25. Masse und Energie.

Den eben ausgesprochenen Gedanken genauer auszulegen, knüpfen wir an die Bewegung eines Elektrons an. Bisher haben wir uns vorgestellt, daß in seiner Bewegungsgleichung (52) für die Kraft $\mathfrak{P}$ diejenige

$$\mathfrak{P} = e(\mathfrak{E} + [\mathfrak{v}\mathfrak{H}]) \quad (e = \text{Ladung des Elektrons})$$

einzutreten hat, die sich aus dem von außen angelegten elektrischen und magnetischen Feld $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{H}$ ergibt. Tatsächlich unterliegt aber das Elektron während der Bewegung nicht nur der Einwirkung dieses äußeren, sondern auch des von ihm selbst erzeugten und mitgeführten Feldes. Bei dessen Ermittlung tritt uns die Schwierigkeit entgegen, daß wir die Konstitution des Elektrons nicht kennen, daß uns insbesondere die Natur und Gesetzmäßigkeit des Kohäsionsdrucks unbekannt ist, der das Elektron entgegen den enormen Fliehkräften der in ihm zusammengedrängten negativen Ladung zusammenhält. Jedenfalls ist aber das ruhende Elektron mitsamt seinem elektrischen Felde (dies rechnen wir durchaus mit zum Elektron) ein in statischem Gleichgewicht befindliches physikalisches System, und darauf allein kommt es an. Wir benutzen ein normales Koordinatensystem, in welchem das Elektron ruht. Sein Energietensor habe die Komponenten t_{ik}. Daß im Elektron Ruhe herrscht, drückt sich dadurch aus, daß der Energiestrom mit den Komponenten t_{0i} $(i = 1, 2, 3)$ verschwindet. Die 0te der Gleichgewichtsbedingungen

$$\frac{\partial t_i^k}{\partial x_k} = 0 \tag{53}$$

ergibt dann, daß die Energiedichte t_{00} von der Zeit x_0 unabhängig ist. Wegen der Symmetrie sind auch die Komponenten t_{i0} $(i = 1, 2, 3)$ der Impulsdichte $= 0$. Ist $\mathfrak{t}^{(1)}$ der Vektor mit den Komponenten t_{11}, t_{12}, t_{13}, so liefert die Gleichgewichtsbedingung (53) $(i = 1)$:

$$\operatorname{div} \mathfrak{t}^{(1)} = 0 .$$

Danach ist beispielsweise

$$\operatorname{div}(x_2\, \mathfrak{t}^{(1)}) = x_2 \operatorname{div} \mathfrak{t}^{(1)} + t_{12} = t_{12} ,$$

und weil das Integral einer Divergenz Null ist (wir dürfen annehmen, daß die t im Unendlichen mindestens in 4. Ordnung verschwinden), kommt

$$\int t_{12}\, dx_1\, dx_2\, dx_3 = 0 .$$

Auf gleiche Weise findet man, daß zwar nicht die t_{ik} (für $i, k = 1, 2, 3$), wohl aber ihre Volumintegrale $\int t_{ik} dV_0$ verschwinden. Diese Umstände dürfen wir für jedes im statischen Gleichgewicht befindliche System als zutreffend erachten. Das gewonnene Resultat läßt sich in einem beliebigen Koordinatensystem durch die invarianten Formeln ausdrücken:

$$\int t_{ik} dV_0 = E_0 u_i u_k \quad (i, k = 0, 1, 2, 3). \tag{54}$$

E_0 ist der (im Bezugsraum, in welchem das Elektron ruht, gemessene) Energieinhalt, u_i sind die kovarianten Komponenten der Weltrichtung des Elektrons und dV_0 das (gemäß der Vorstellung, daß der ganze Raum an der Bewegung des Elektrons teilnehme, berechnete) Ruhvolumen eines Raumelements. (54) gilt streng bei gleichförmiger Translation; wir werden die Formel aber auch auf ungleichförmige Bewegung anwenden dürfen, wenn $\mathfrak{u}$ räumlich und zeitlich nicht zu rasch veränderlich ist. Dann aber sind die Komponenten

$$\bar{p}^i = -\frac{\partial t^{ik}}{\partial x_k}$$

der ponderomotorischen Wirkung, welche das Elektron auf sich selbst ausübt, nicht mehr $= 0$.

Setzen wir das Elektron als völlig masselos voraus und ist p_i die von außen einwirkende »Vichererkraft«, so erfordert das Gleichgewicht, daß

$$\bar{p}^i + p^i = 0 \tag{55}$$

wird. Wir spalten nach einem festen $\mathfrak{e}$ in Raum und Zeit:

$$\mathfrak{u} = h \mid h\mathfrak{v}, \qquad \mathfrak{p} = (p^i) = \lambda \mid \mathfrak{p}$$

und integrieren (55) nach dem Volumen $dV = dV_0 \sqrt{1 - v^2}$. Da bei Benutzung eines zu $\mathfrak{e}$ gehörigen normalen Koordinatensystems

$$\int \bar{p}^i \, dV = \int \bar{p}^i dx_1 \, dx_2 dx_3 = -\frac{d}{dx_0} \int t^{i0} \, dx_1 \, dx_2 \, dx_3$$

$$= -\frac{d}{dx_0} (E_0 u^0 u^i \sqrt{1 - v^2}) = -\frac{d}{dt} (E_0 u^i)$$

ist ($x_0 = t$ die Zeit), so kommt dann

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{E_0}{\sqrt{1 - v^2}}\right) = \Lambda \left(= \int \lambda \, dV\right),$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{E_0 \mathfrak{v}}{\sqrt{1 - v^2}}\right) = \mathfrak{P} \left(= \int \mathfrak{p} \, dV\right).$$

Diese Gleichungen sind gültig, wenn die von außen angreifende Kraft $\mathfrak{P}$ (im Vergleich zu $\frac{E_0}{a}$, a = Elektronenradius) nicht zu groß ist und ihre Dichte im Bereich des Elektrons wesentlich konstant. Sie stimmen aber genau mit den mechanischen Grundgleichungen überein, wenn nur die

Masse m ersetzt wird durch E_0. Mit andern Worten: *die Trägheit ist eine Eigenschaft der Energie.* — In der Mechanik wird jedem materiellen Körper eine unveränderliche Masse m zugeschrieben, die zufolge der bekannten Art und Weise, wie sie in das Grundgesetz der Mechanik eingeht, die Trägheit, den Widerstand der Materie gegen beschleunigende Kräfte darstellt. Die Mechanik nimmt diese träge Masse als etwas Gegebenes hin, für das sie nach keiner weiteren Erklärung sucht. Hier aber erkennen wir: die in dem materiellen Körper enthaltene potentielle Energie ist die Ursache dieser Trägheit, und zwar entspricht im *CGS*-System, in welchem die Lichtgeschwindigkeit nicht = 1 ist, der Energie E_0 die Masse

$$m = \frac{E_0}{c^2}. \tag{56}$$

Damit ist eine neue, rein dynamische Auffassung der Materie gewonnen*). Wie wir uns in der Relativitätstheorie von dem Glauben haben befreien müssen, daß wir einen Raumpunkt zu verschiedenen Zeiten wiedererkennen können, so *hat es jetzt auch keinen Sinn mehr, von »derselben« Stelle der Materie zu verschiedenen Zeiten zu sprechen.* Das Elektron, das man sich früher wohl als einen substantiellen Fremdkörper im substanzlosen elektromagnetischen Felde vorstellte, erscheint uns nunmehr als ein gegen das Feld keineswegs scharf begrenzter kleiner Bezirk, in welchem die Feldgrößen und die elektrische Dichte enorm hohe Werte annehmen. Ein solcher »Energieknoten« pflanzt sich durch den leeren Raum nicht anders fort wie eine Wasserwelle über die Seefläche fortschreitet; es gibt da nicht »ein und dieselbe Substanz«, aus der das Elektron zu allen Zeiten besteht. Es existiert nur der potentielle, nicht daneben noch ein kinetischer Energie-Impuls-Tensor. Die Spaltung zwischen beiden, die in der Mechanik auftritt, ist nur die Scheidung zwischen der breit und dünn im Felde verteilten Energie und der in den Energieknoten, den Elektronen und Atomen, zusammengeballten; die Grenze zwischen beiden ist durchaus fließend. Es ist die Aufgabe der Feldtheorie, zu erklären, warum das Feld eine derartige körnige Struktur besitzt und jene Energieknoten sich im Hin- und Herströmen von Energie und Impuls dauernd erhalten (wenn auch natürlich nicht völlig unveränderlich, so doch mit einem außerordentlich hohen Grad von Genauigkeit): darin besteht das *Problem der Materie.* Die Maxwell-Lorentzsche Theorie kann es schon deshalb nicht lösen, weil in ihr der Kohäsionsdruck fehlt, welcher das Elektron zusammenhält. *Was wir gemeinhin Materie nennen, ist seinem Wesen nach atomistisch;* denn die diffus verteilte Feldenergie pflegen wir nicht als einen materiellen Körper anzusprechen. Freilich sind *die Atome und Elektronen keine letzten unveränderlichen Elemente*, an welchen die Naturkräfte nur von außen anpacken, sie hin- und herschiebend; sondern

*) Schon Kant lehrt in den »Metaphysischen Anfangsgründen der Naturwissenschaft«, daß die Materie einen Raum erfüllt nicht durch ihre bloße Existenz, sondern durch repulsive Kräfte aller ihrer Teile.

sie sind selber kontinuierlich ausgebreitet und in ihren feinsten Teilen feinen fließenden Veränderungen unterworfen. Nicht das Feld bedarf zu seiner Existenz der Materie als seines Trägers, sondern *die Materie* ist umgekehrt *eine Ausgeburt des Feldes;* die Formeln, welche die Komponenten des Energietensors T_{ik} durch die Zustandsgrößen des Feldes ausdrücken, lehren, *nach welchen Gesetzen* das Feld mit Energie und Impuls, d. h. mit Materie verknüpft ist. Da keine strenge Grenze zwischen der diffusen Feldenergie und derjenigen der Elektronen und Atome besteht, müssen wir den Begriff der Materie, falls er einen *exakten* Sinn behalten soll, weiter fassen als bisher: Materie nennen wir fortan dasjenige Reale, welches dargestellt wird durch den Energie-Impuls-Tensor. In diesem Sinne ist auch das optische Feld z. B. mit Materie verknüpft. Wie sich so die Materie, prinzipiell gesprochen, im Felde auflöst, löst sich die Mechanik in der Physik auf. Denn das Erhaltungsgesetz der Materie

$$\frac{\partial T_i^k}{\partial x_k} = 0 , \tag{57}$$

das mechanische Grundgesetz, stellt, wenn man die T_{ik} durch die Feldgrößen ausdrückt, einen differentiellen Zusammenhang zwischen diesen dar, muß also aus den Feldgleichungen folgen. Die Materie in dem weiten Sinne, wie wir jetzt das Wort nehmen, ist dasjenige, von dem wir direkt durch unsere Sinne Kunde erhalten. Fasse ich ein Stück Eis an, so nehme ich den an der Berührungsstelle zwischen jenem Körper und meinem Sinnesleib fließenden Energiestrom als Wärme, den Impulsstrom als Druck wahr; der optische Energiestrom an der Oberfläche des Sinnesepithels meines Auges bestimmt die optischen Wahrnehmungen, die ich habe. Hinter dieser uns durch die Sinnesorgane direkt offenbarten Materie verborgen aber steckt das *Feld.* Für die Aufdeckung seiner eignen Gesetzmäßigkeit und der Gesetze, nach welchen es die Materie bestimmt, ist die Maxwellsche Theorie der erste glänzende Anfang; aber hier stehen wir mit unserer Erkenntnis noch nicht am Ziel*).

Nach der Formel (56) müssen wir, um die Trägheit der Körper zu erklären, ihnen einen sehr beträchtlichen Energieinhalt zuschreiben: in 1 kg Wasser stecken $9 \cdot 10^{23}$ Erg. Diese Energie ist zu einem kleinen Teil die Kohäsionsenergie des Körpers, welche die Moleküle oder Atome im Verbande des Körpers zusammenhält; ferner die chemische Energie, welche die Atome im Molekül aneinander bindet und deren plötzliches Freiwerden wir z. B. bei einer Explosion beobachten (für feste Körper kann sie von der Kohäsionsenergie gar nicht geschieden werden). Für die chemischen Umlagerungen kommen aber auch schon die Energien der elektrischen Kräfte in Betracht, welche die Bausteine des Atoms, die negativ geladenen Elektronen und den positiven Atomkern, zusammenschweißen; alle Ionisationsvorgänge sind Eingriffe in diesen Bezirk. Viel

*) Später (§ 32, § 36) werden wir unsere Anschauungen von der Materie abermals modifizieren; die Überwindung der Substanzvorstellung ist aber eine endgültige.

größer als die bisher erwähnten Beiträge ist die Energie des zusammengesetzten Atomkerns, von welcher ein Bruchteil in den radioaktiven Zerfallserscheinungen frei wird. Zum weitaus größten Teil aber handelt es sich um die Eigenenergie der Elemente des Atomkerns und der Elektronen selbst; sie ist uns nur durch ihre Trägheitswirkung bekannt, da wir bislang keine Mittel kennen — Gott sei Dank! —, sie zur »Explosion« zu bringen. *Die träge Masse verändert sich mit dem Energieinhalt*: erwärmt man einen Körper, so nimmt seine träge Masse zu, kühlt man ihn ab, so vermindert sie sich; freilich ist dieser Effekt zu klein, um der direkten Beobachtung zugänglich zu sein.

Die hier nach Laue[14]) allgemein für ein im statischen Gleichgewicht befindliches System durchgeführte Überlegung wurde zuerst, noch vor der Einsteinschen Entdeckung des Relativitätsprinzips, am Elektron unter Zugrundelegung spezieller Voraussetzungen über dessen Konstitution angestellt: man nahm es als eine auf der Oberfläche oder im ganzen Innern gleichförmig geladene Kugel an, die durch allseitig gleichen, gegenwirkenden Kohäsionsdruck zusammengehalten wird. Die daraus sich ergebende »elektromagnetische Masse« $\frac{E_0}{c^2}$ befindet sich in numerischer Übereinstimmung mit der Erfahrung, wenn man dem Elektron einen Radius von der Größenordnung 10^{-13} cm zuschreibt. Man darf sich nicht wundern, daß schon vor der Relativitätstheorie eine derartige Deutung der Elektronenträgheit möglich war; denn indem man Maxwellsche Elektrodynamik trieb, stand man ja schon immer für dieses Erscheinungsgebiet unbewußt auf dem Boden des Relativitätsprinzips. Die allgemeine Erkenntnis von der Trägheit der Energie verdanken wir Einstein und Planck[15]); Planck stützte sich bei der Entwicklung der Dynamik auf einen — im Gegensatz zum Elektron — vollständig bekannten, freilich im gewöhnlichen Sinne nicht-materiellen »Probekörper«, die Hohlraumstrahlung im thermodynamischen Gleichgewicht, wie sie sich nach dem Kirchhoffschen Gesetz in jedem von gleichmäßig temperierten Wänden umgebenen Hohlraum ausbildet.

In denjenigen phänomenologischen Theorien, in denen wir von der atomistischen Struktur der Materie absehen, denken wir uns die in den Elektronen, Atomen usw. aufgespeicherte Energie stetig über den Körper verteilt; wir haben sie einfach dadurch zu berücksichtigen, daß wir in den Energie-Impuls-Tensor — bezogen auf ein Koordinatensystem, in welchem die Materie ruht — als Energiedichte die Ruhmassendichte μ_0 einführen. So haben wir z. B. in der Hydrodynamik bei Beschränkung auf adiabatische Vorgänge zu setzen

$$|T_i^k| = \begin{vmatrix} -\mu_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p \end{vmatrix}$$

p ist der allseitig gleiche Druck; der Energiestrom ist bei adiabatischen Vorgängen 0. Um die Komponenten dieses Tensors in einem beliebigen Koordinatensystem hinzuschreiben, setze man noch $\mu_0 = \mu^* - p$; dann erhält man die invarianten Gleichungen

$$T_i^k = \mu^* u_i u^k + p\delta_i^k \tag{58}$$

oder

$$T_{ik} = \mu^* u_i u_k + p \cdot g_{ik}.$$

Die Ruhmassendichte ist

$$T_{ik} u^i u^k = \mu^* - p = \mu_0,$$

und sie (nicht μ^*) ist also bei inkompressibeln Flüssigkeiten konstant zu setzen. Wirkt auf die Flüssigkeit keine Kraft, so lauten die hydrodynamischen Gleichungen

$$\frac{\partial T_i^k}{\partial x_k} = 0.$$

Auf ähnliche Weise, wie es soeben mit der Hydrodynamik geschah, kann auch der Elastizitätstheorie eine dem Relativitätsprinzip entsprechende Form gegeben werden [16]). Es bliebe endlich noch übrig, das Gesetz der Gravitation, das in seiner Newtonschen Form durchaus an das Newton-Galileische Relativitätsprinzip gebunden ist, dem Einsteinschen anzupassen. Sie birgt aber ihre besonderen Rätsel in sich, auf deren Lösung wir im letzten Kapitel zu sprechen kommen.

§ 26. Die Miesche Theorie.

Innerhalb der Elektronen kann die Maxwell-Lorentzsche Theorie nicht gültig sein; auf dem Standpunkt der gewöhnlichen Elektronentheorie müssen wir daher das Elektron als etwas a priori Gegebenes, als einen Fremdkörper im Felde behandeln. Es ist aber von *Mie* eine allgemeinere Elektrodynamik aufgestellt worden, auf Grund deren es möglich scheint, die Materie aus dem Felde zu konstruieren [17]). Wir wollen ihre Grundlagen hier kurz entwickeln — als Beispiel einer den neuen Ideen über die Materie völlig konformen physikalischen Theorie, das uns hernach noch gute Dienste leisten soll, und um an ihr zugleich das Problem der Materie genauer zu formulieren.

Wir halten daran fest, daß die in Betracht kommenden Zustandsgrößen sind: 1) der vierdimensionale Stromvektor s, die »Elektrizität«, und 2) der lineare Tensor 2. Stufe F, das »Feld«. Ihre Eigengesetzlichkeit ist ausgesprochen in den Gleichungen

$$1)\qquad \frac{\partial s^i}{\partial x_i} = 0,$$

$$2)\qquad \frac{\partial F_{kl}}{\partial x_i} + \frac{\partial F_{li}}{\partial x_k} + \frac{\partial F_{ik}}{\partial x_l} = 0.$$

Die Gleichungen 2) sind erfüllt, wenn F sich aus einem Vektor φ_i ableitet nach den Formeln

$$3) \qquad F_{ik} = \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_k} - \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_i};$$

es folgt umgekehrt aus 2), daß ein Vektor φ existieren muß derart, daß die Gleichungen 3) bestehen. Ebenso ist 1) erfüllt, wenn s sich aus einem schiefsymmetrischen Tensor 2. Stufe H in folgender Weise ableitet:

$$4) \qquad s^i = \frac{\partial H^{ik}}{\partial x_k};$$

es folgt umgekehrt aus 1), daß ein diesen Relationen genügender Tensor H notwendig existiert. 4) stimmt formal mit dem zweiten System der Maxwellschen Gleichungen überein. Lorentz nahm an, daß allgemein, nicht bloß im Äther, sondern auch im Gebiet der Elektronen, $H = F$ ist. Wir machen nach Mie die allgemeinere Voraussetzung, daß H keine bloße Rechengröße ist, sondern eine reale Bedeutung hat und seine Komponenten daher universelle Funktionen der ursprünglichen Zustandsgrößen s und F sind. Konsequenterweise müssen wir aber dann die gleiche Voraussetzung auch hinsichtlich φ machen! Die entstehende Größentabelle

φ	F
s	H

enthält in der ersten Zeile die Intensitätsgrößen, sie sind durch die Differentialgleichungen 3) miteinander verknüpft; in der zweiten Zeile die Quantitätsgrößen, für welche die Differentialgleichungen 4) gelten. Spalten wir in Raum und Zeit und wenden die schon in § 20 verwendeten Bezeichnungen an, so haben wir die wohlvertrauten Gleichungen vor uns

$$1) \qquad \frac{\partial \varrho}{\partial t} + \operatorname{div} \mathfrak{s} = 0,$$

$$2) \qquad \frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial t} + \operatorname{rot} \mathfrak{E} = 0 \qquad (\operatorname{div} \mathfrak{B} = 0),$$

$$3) \qquad \frac{\partial \mathfrak{f}}{\partial t} + \operatorname{grad} \varphi = \mathfrak{E} \qquad (-\operatorname{rot} \mathfrak{f} = \mathfrak{B}),$$

$$4) \qquad \frac{\partial \mathfrak{D}}{\partial t} - \operatorname{rot} \mathfrak{H} = -\mathfrak{s} \qquad (\operatorname{div} \mathfrak{D} = \varrho).$$

Kennen wir die universellen Funktionen, welche φ und H durch s und F ausdrücken, dann haben wir in den nicht eingeklammerten Gleichungen, jede Komponente besonders gezählt, 10 »Hauptgleichungen« vor uns, durch welche die Ableitungen der 10 Zustandsgrößen nach der Zeit in Abhängigkeit von diesen selbst und ihren räumlichen Ableitungen gesetzt werden; also jene Form der Naturgesetze, welche durch das *Kausalitätsprinzip* gefordert wird. Das Relativitätsprinzip aber, das hier in einen

gewissen Gegensatz zum Kausalitätsprinzip tritt, fordert, daß die Hauptgleichungen von den eingeklammerten »Nebengleichungen« begleitet werden, in denen keine nach der Zeit differentiierten Glieder auftreten. Die Versöhnung des Widerstreits liegt darin, daß die Nebengleichungen überschüssig sind. Aus den Hauptgleichungen 2) und 3) folgt nämlich

$$\frac{\partial}{\partial t}(\mathfrak{B} + \operatorname{rot} \mathfrak{f}) = 0,$$

aus 1) und 4)

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}(\operatorname{div} \mathfrak{D}).$$

Ein Vergleich der Mieschen mit den Lorentzschen Grundgleichungen der Elektronentheorie ist lehrreich. Bei Lorentz treten 1), 2) und 4) auf, und das Gesetz, nach welchem H durch die ursprünglichen Zustandsgrößen sich bestimmt, lautet einfach $\mathfrak{D} = \mathfrak{E}$, $\mathfrak{H} = \mathfrak{B}$. Hingegen werden dort φ und $\mathfrak{f}$ durch die Gleichung 3) *rechnerisch* definiert, und es fehlt ein Gesetz, das die Abhängigkeit dieser Potentiale von den Zustandsgrößen des Feldes und der Elektrizität festlegt. An dessen Stelle tritt die Formel für die Dichte der ponderomotorischen Kraft und das mechanische Grundgesetz für die Bewegung der Elektronen unter dem Einfluß dieser Kraft. Da nach unserer neuen Auffassung aber das mechanische Gesetz sich aus den Feldgleichungen ergeben muß, ist eine Ergänzung nötig, die von Mie eben in der Annahme, daß φ und $\mathfrak{f}$ eine reale Bedeutung in dem angegebenen Sinne haben, gefunden wurde. Wir können die Miesche Gleichung 3) aber in einer ganz analogen Form aussprechen wie das Grundgesetz der Mechanik. Der dort auftretenden ponderomotorischen Kraft stellen wir hier die *»elektrische Kraft«* $\mathfrak{E}$ gegenüber. Im statischen Falle besagt 3), daß

$$\mathfrak{E} - \operatorname{grad} \varphi = 0 \tag{59}$$

ist, d. h. daß der elektrischen Kraft $\mathfrak{E}$ durch einen *»elektrischen Druck«* φ im Äther das Gleichgewicht gehalten wird. Allgemein aber entsteht eine resultierende elektrische Kraft, welcher nun nach Gleichung 3) die Größe $\mathfrak{f}$ als *»elektrischer Impuls«* zugehört. Es ist wunderbar zu sehen, wie in der Mieschen Theorie die Grundgleichung der Elektrostatik (59), die am Anfang der Elektrizitätslehre steht, plötzlich eine viel anschaulichere Bedeutung gewinnt, indem das Potential als elektrischer Druck auftritt; das ist der gesuchte Kohäsionsdruck, welcher das Elektron zusammenhält.

Das Bisherige gibt nur ein leeres Schema, das seine Ausfüllung finden muß durch die noch unbekannten universellen Funktionen, welche die Quantitäts- mit den Intensitätsgrößen verknüpfen. Ihre Ermittlung kann bis zu einem gewissen Grade noch rein spekulativ geschehen durch die Forderung, daß für den Energie-Impuls-Tensor T_{ik} der Erhaltungssatz (57) gültig sein muß (also durch die Forderung der Geltung des Energieprinzips). Denn das ist gewiß eine notwendige Bedingung, damit sich

überhaupt ein Zusammenhang der Theorie mit der Erfahrung herstellen läßt. Das Energiegesetz muß die Form haben

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \operatorname{div} \mathfrak{S} = 0,$$

wo W die Energiedichte, $\mathfrak{S}$ der Energiestrom ist. In der Maxwellschen Theorie findet man es, indem man 2) mit $\mathfrak{H}$, 4) mit $\mathfrak{E}$ multipliziert und addiert:

$$\mathfrak{H}\frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial t} + \mathfrak{E}\frac{\partial \mathfrak{D}}{\partial t} + \operatorname{div}[\mathfrak{E}\mathfrak{H}] = -(\mathfrak{E}\mathfrak{s}). \tag{60}$$

In dieser Beziehung tritt auf der rechten Seite noch die Arbeit auf, welche zur Erhöhung der kinetischen Energie der Elektronen oder nach unserer jetzigen Auffassung zur Erhöhung der potentiellen Energie des Feldes im Gebiet der Elektronen verwendet wird. Hier muß dieses Glied also sich gleichfalls noch zusammensetzen lassen aus einem nach der Zeit differentiierten Term und einer div. Behandeln wir aber die Gleichungen 1) und 3) ganz analog, wie wir eben mit 2) und 4) verfahren sind, d. h. multiplizieren 1) mit φ und 3) skalar mit $\mathfrak{s}$, so kommt

$$\varphi\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \mathfrak{s}\frac{\partial \mathfrak{f}}{\partial t} + \operatorname{div}(\varphi\mathfrak{s}) = (\mathfrak{E}\mathfrak{s}). \tag{61}$$

Die Addition von (60) und (61) ergibt das Energiegesetz; es muß demnach der Energiestrom

$$\mathfrak{S} = [\mathfrak{E}\mathfrak{H}] + \varphi\mathfrak{s}$$

sein und

$$\varphi\,\delta\varrho + \mathfrak{s}\,\delta\mathfrak{f} + \mathfrak{H}\,\delta\mathfrak{B} + \mathfrak{E}\,\delta\mathfrak{D} = \delta W$$

das totale Differential der Energiedichte. Daß für den Energiestrom zu dem im Äther gültigen Glied $[\mathfrak{E}\mathfrak{H}]$ noch ein zu $\mathfrak{s}$ proportionaler Term $\varphi\mathfrak{s}$ hinzutritt, ist ohne weiteres verständlich. denn mit dem sich bewegenden Elektron, welches den Konvektionsstrom $\mathfrak{s}$ erzeugt, strömt dessen Energieinhalt. Im Äther wird das Glied $[\mathfrak{E}\mathfrak{H}]$ von $\mathfrak{S}$ überwiegen, im Elektron aber behauptet das andere $\varphi\mathfrak{s}$ bei weitem den Vorrang. In der Formel für das totale Differential der Energiedichte treten als unabhängig variierte Zustandsgrößen ϱ, $\mathfrak{f}$; $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{D}$ auf. Um da Ordnung zu schaffen, führen wir an Stelle von ϱ und $\mathfrak{D}$ bzw. φ und $\mathfrak{E}$ als Unabhängige ein; damit wird erreicht, daß die sämtlichen Intensitätsgrößen als unabhängige Variable fungieren. Man hat zu bilden

$$L = W - \mathfrak{E}\mathfrak{D} - \varrho\varphi; \tag{62}$$

dann ist

$$\delta L = (\mathfrak{H}\,\delta\mathfrak{B} - \mathfrak{D}\,\delta\mathfrak{E}) + (\mathfrak{s}\,\delta\mathfrak{f} - \varrho\,\delta\varphi).$$

Kennt man L als Funktion der Intensitätsgrößen, so sind durch diese Gleichung die Quantitätsgrößen als Funktionen derselben bestimmt. *Statt der zehn unbekannten universellen Funktionen haben wir jetzt nur noch eine*, L; das ist die Leistung des Energieprinzips.

Kehren wir zur vierdimensionalen Schreibweise zurück, so ergibt sich

$$\delta L = \tfrac{1}{2} H^{ik} \delta F_{ik} + s^i \delta \varphi_i. \tag{63}$$

Daraus geht hervor, daß δL, mithin L, die »*Hamiltonsche Funktion*«, eine Invariante ist. Die einfachsten Invarianten, welche sich von einem Vektor mit den Komponenten φ_i und einem linearen Tensor 2. Stufe mit den Komponenten F_{ik} bilden lassen, sind die ins Quadrat erhobenen Beträge

des Vektors φ^i: $\varphi_i \varphi^i$,

des Tensors F_{ik}: $2L^\circ = \frac{1}{2} F_{ik} F^{ik}$,

des linearen Tensors 4. Stufe mit den Komponenten $\Sigma \pm F_{ik} F_{lm}$ (die Summation erstreckt sich über die 24 Permutationen der Indizes $iklm$; für die geraden Permutationen gilt das obere, für die ungeraden das untere Vorzeichen); und endlich

des Vektors $F_{ik} \varphi^k$.

Wie in der dreidimensionalen Geometrie der wichtigste Kongruenzsatz aussagt, daß ein Vektorpaar $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ im Sinne der Kongruenz vollständig charakterisiert ist durch die Invarianten $\mathfrak{a}^2$, $\mathfrak{a}\mathfrak{b}$, $\mathfrak{b}^2$, so läßt sich in der vierdimensionalen Geometrie leicht zeigen, daß die eben angegebenen Invarianten die aus einem Vektor φ und einem linearen Tensor 2. Stufe F bestehende Figur im Sinne der Kongruenz vollständig festlegen. Jede Invariante, insbesondere die Hamiltonsche Funktion L, muß sich mithin durch jene vier Größen algebraisch ausdrücken lassen. Auf die Bestimmung dieses Ausdrucks reduziert die Miesche Theorie das Problem der Materie. Die Maxwellsche Theorie des Äthers, nach der freilich Elektronen nicht möglich sind, ist in ihr als der Spezialfall $L = L^\circ$ enthalten. Drückt man auch W und die Komponenten von $\mathfrak{S}$ vierdimensional aus, so erkennt man, daß sie die (negative) 0te Zeile in dem Schema

$$T_i^k = F_{ir} H^{kr} + \varphi_i s^k - L \cdot \delta_i^k \tag{64}$$

bilden. Die T_i^k sind also die gemischten Komponenten des Energie-Impuls-Tensors, welcher nach unseren Rechnungen dem Erhaltungssatz (57) für $i = 0$ und demnach auch für $i = 1, 2, 3$ genügt. Der Beweis, daß seine kovarianten Komponenten der Symmetriebedingung $T_{ki} = T_{ik}$ genügen, wird im nächsten Kapitel nachgeholt werden.

Die Feldgesetze können in ein sehr einfaches Variationsprinzip, *das Hamiltonsche Prinzip*, zusammengefaßt werden. Wir betrachten als unabhängige Zustandsgröße jetzt allein das Potential mit den Komponenten φ_i und *definieren* das Feld durch die Gleichung

$$F_{ik} = \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_k} - \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_i}.$$

In die Gesetze geht die invariante Hamiltonsche Funktion L ein, welche vom Potential und Feld abhängt. Wir *definieren* den Stromvektor s und den schiefsymmetrischen Tensor H durch (63). Ist bei Benutzung eines beliebigen linearen Koordinatensystems

$$d\omega = \sqrt{g}\, dx_0\, dx_1\, dx_2\, dx_3$$

das vierdimensionale »Volumelement« der Welt ($-g$ die Determinante der metrischen Fundamentalform), so ist das über irgendein Weltgebiet erstreckte Integral $\int L\,d\omega$ eine Invariante; sie heißt die in dem betr. Gebiet enthaltene *Wirkungsgröße*. Das Hamiltonsche Prinzip behauptet, daß die Änderung der gesamten Wirkungsgröße bei jeder infinitesimalen Variation des Feldzustandes, welche außerhalb eines endlichen Bereichs verschwindet, Null ist:

$$\delta\int L\,d\omega = \int \delta L\,d\omega = 0. \tag{65}$$

Das Integral ist hier über die ganze Welt zu erstrecken, oder, was dasselbe besagt, über ein endliches Gebiet, außerhalb dessen die Zustandsvariation verschwindet. Diese wird dargestellt durch die infinitesimalen Zuwächse $\delta\varphi_i$ der Potentialkomponenten und die damit verknüpfte unendlich kleine Änderung des Feldes

$$\delta F_{ik} = \frac{\partial(\delta\varphi_i)}{\partial x_k} - \frac{\partial(\delta\varphi_k)}{\partial x_i};$$

$\delta\varphi_i$ sind Raum-Zeit-Funktionen, die nur innerhalb eines endlichen Bereichs von 0 verschiedene Werte annehmen. Setzen wir für δL den Ausdruck (63) ein, so kommt

$$\delta L = s^i\,\delta\varphi_i + H^{ik}\frac{\partial(\delta\varphi_i)}{\partial x_k}.$$

Auf Grund des Prinzips der partiellen Integration (S. 100) ergibt sich

$$\int H^{ik}\frac{\partial(\delta\varphi_i)}{\partial x_k}\,d\omega = -\int\frac{\partial H^{ik}}{\partial x_k}\,\delta\varphi_i\,d\omega,$$

und es ist demnach

$$\delta\int L\,d\omega = \int\left\{s^i - \frac{\partial H^{ik}}{\partial x_k}\right\}\delta\varphi_i\,d\omega. \tag{66}$$

Während 3) durch Definition sichergestellt ist, liefert somit das Hamiltonsche Prinzip die Feldgleichungen 4). In der Tat, wäre z. B. an einer Stelle

$$s^1 - \frac{\partial H^{1k}}{\partial x_k} \neq 0,$$

etwa > 0, so können wir um diese Stelle eine Umgebung abgrenzen, in der jene Differenz durchweg positiv ist. Wählen wir dann für $\delta\varphi_1$ eine nicht-negative Funktion, die außerhalb der erwähnten Umgebung verschwindet, und $\delta\varphi_2 = \delta\varphi_3 = \delta\varphi_4 = 0$, so ergibt sich ein Widerspruch zu der Gleichung (65). — 1) und 2) folgen aus 3) und 4).

So drängt sich denn schließlich die Miesche Elektrodynamik in das einfache Wirkungsprinzip (65) *zusammen* — ganz analog, wie auch die Entwicklung der Mechanik schließlich im Wirkungsprinzip gipfelte. Während aber in der Mechanik zu jedem vorgegebenen mechanischen System eine bestimmte Wirkungsfunktion L gehört, die es aus dessen Konstitution zu ermitteln gilt, haben wir es hier mit einem einzigen System, der Welt,

zu tun. Das eigentliche Problem der Materie hebt damit erst an: es handelt sich darum, die der Welt zukommende Wirkungsfunktion, die »Weltfunktion« L zu bestimmen; ihm stehen wir vorerst noch ratlos gegenüber. Wählen wir in willkürlicher Weise ein L, so erhalten wir eine von dieser Wirkungsfunktion beherrschte »mögliche« Welt, in der wir uns (wenn uns nur die mathematische Analysis nicht im Stiche läßt) vollständig auskennen — besser als in der wirklichen. Es käme aber natürlich darauf an, unter all diesen möglichen Welten die einzige existierende *wirkliche* herauszufinden; nach allem, was wir von den Naturgesetzen wissen, muß das ihr zukommende L durch einfache mathematische Eigenschaften ausgezeichnet sein. Wieder ist die Physik, heute als Feldphysik, auf dem Wege, die Gesamtheit der Naturerscheinungen auf *ein einziges Naturgesetz* zurückzuführen, ein Ziel, dem sie schon einmal, als die durch Newtons Principia begründete mechanische Massenpunkt-Physik ihre Triumphe feierte, nahe zu sein glaubte. Doch ist auch heut dafür gesorgt, daß unsere Bäume nicht in den Himmel wachsen. Vorläufig wissen wir nicht, ob wir mit denjenigen Zustandsgrößen, welche der Mieschen Theorie zugrunde liegen, zur Beschreibung der Materie ausreichen, ob sie tatsächlich rein »elektrischer« Natur ist. Vor allem aber hängt die dunkle Wolke aller jener Erscheinungen, mit denen wir uns heute notdürftig vermittels des Wirkungsquantums auseinandersetzen, über dem Land der physikalischen Erkenntnis, wer weiß welch neuen Umsturz drohend.

Versuchen wir es einmal mit dem folgenden Ansatz für L:

$$L = \tfrac{1}{2}\,|F|^2 + w\left(\sqrt{-\varphi_i\varphi^i}\right) \tag{67}$$

(w ist das Zeichen für eine Funktion einer Variablen), der sich zunächst als der einfachste, über die Maxwellsche Theorie hinausgehende darbietet, — obschon durchaus kein Grund vorliegt, anzunehmen, daß die Weltfunktion in Wirklichkeit diese Gestalt besitzt. Wir beschränken uns auf die Betrachtung statischer Lösungen, für die

$$\mathfrak{B} = \mathfrak{H} = 0, \qquad \mathfrak{s} = \mathfrak{f} = 0$$

ist. Wir haben

$$\mathfrak{E} = \operatorname{grad}\varphi, \qquad \operatorname{div}\mathfrak{D} = \varrho$$
$$\mathfrak{D} = \mathfrak{E}, \qquad \varrho = -w'(\varphi)$$

(der Akzent bedeutet die Ableitung). Gegenüber der gewöhnlichen Elektrostatik im Äther ist hier das Neue, daß die Dichte ϱ eine universelle Funktion des Potentials, des elektrischen Drucks φ ist. Es ergibt sich als »Poissonsche Gleichung«

$$\Delta\varphi + w'(\varphi) = 0. \tag{68}$$

Ist $w(\varphi)$ keine gerade Funktion von φ, so bleibt diese Gleichung beim Übergang von φ zu $-\varphi$ nicht erhalten; das würde die *Wesensverschiedenheit der positiven und negativen Elektrizität* verständlich machen. Freilich führt das für nichtstatische Felder zu einer merkwürdigen Schwierigkeit. Sollen da Ladungen entgegengesetzten Vorzeichens auftreten, so muß die Wurzel in (67) an verschiedenen Stellen des Feldes verschiedene

Vorzeichen haben; es muß also Feldstellen geben, wo $\varphi_i\varphi^i$ verschwindet. In der Nähe eines solchen Punktes nimmt dann aber $\varphi_i\varphi^i$ notwendig positive wie negative Werte an (dieser Schluß versagt im statischen Fall, weil 0 das Minimum der Funktion φ_0^2 von φ_0 ist). Die Lösungen unserer Feldgleichungen müßten also strichweise imaginär werden. Was ein solcher Zerfall des Feldes in einzelne Teile bedeutet, die je nur Ladungen eines Vorzeichens enthalten und welche voneinander getrennt sind durch die Gegenden, wo das Feld imaginär wird, ist schwer zu sagen.

Eine (im Unendlichen verschwindende) Lösung der Gleichung (68) stellt einen möglichen elektrischen Gleichgewichtszustand, ein mögliches für sich existenzfähiges Korpuskel in der Welt dar, die wir jetzt konstruieren. Das Gleichgewicht wird nur dann stabil sein können, wenn die Lösung Kugelsymmetrie hat. In diesem Fall lautet die Gleichung, unter r den Radius vector verstanden,

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{d\varphi}{dr}\right)+w'(\varphi)=0. \tag{69}$$

Soll (69) eine bei $r=\infty$ reguläre Lösung

$$-\varphi=\frac{e_0}{r}+\frac{e_1}{r^2}+\cdots \tag{70}$$

besitzen, so findet man durch Einsetzen dieser Potenzentwicklung in das erste Glied der Gleichung, daß die Entwicklung von $w'(\varphi)$ mit der Potenz r^{-4} oder einer noch höheren negativen beginnt, daß folglich $w(x)$ für $x=0$ mindestens von 5ter Ordnung 0 sein muß. Unter dieser Voraussetzung hat aber die Gleichung ∞^1 bei $r=0$ und ∞^1 bei $r=\infty$ reguläre Lösungen. Man wird (als »allgemeinen« Fall) erwarten dürfen, daß diese beiden *eindimensionalen* Lösungsscharen (innerhalb der zweidimensionalen Gesamtschar aller Lösungen) eine endliche oder jedenfalls eine diskrete Anzahl von Lösungen gemein haben. Diese würden die verschiedenen möglichen Korpuskeln (Elektronen und Elemente des Atomkerns?) darstellen. Es ist freilich nicht *ein* Elektron oder ein Atomkern allein auf der Welt; aber die Abstände zwischen ihnen sind im Vergleich zu ihrer eigenen Ausdehnung doch so groß, daß durch ihre gegenseitige Einwirkung der Feldverlauf im Innern des einzelnen Elektrons oder Atomkerns nicht wesentlich modifiziert wird. Ist φ die ein solches Korpuskel darstellende Lösung (70) von (69), so ist die Gesamtladung desselben

$$=-4\pi\int_0^\infty w'(\varphi)r^2\,dr=-4\pi\cdot r^2\frac{d\varphi}{dr}\bigg|_{r=\infty}=4\pi e_0,$$

seine Masse aber berechnet sich als das Integral der Energiedichte W, die aus (62) hervorgeht:

$$\begin{aligned}\textit{Masse}&=4\pi\int_0^\infty\left\{\tfrac{1}{2}(\operatorname{grad}\varphi)^2+w(\varphi)-\varphi w'(\varphi)\right\}r^2\,dr\\&=4\pi\int_0^\infty\left\{w(\varphi)-\tfrac{1}{2}\varphi w'(\varphi)\right\}r^2\,dr.\end{aligned}$$

Wir können also *aus den Naturgesetzen die Masse und Ladung des Elektrons, die Atomgewichte und Atomladungen der einzelnen existierenden Elemente berechnen*, während wir bisher diese letzten Bausteine der Materie immer als etwas mit seinen numerischen Eigenschaften Gegebenes hingenommen haben. Zwar bleibt das einstweilen nur ein *Programm*, solange wir die Weltfunktion L nicht kennen; der eben zugrunde gelegte spezielle Ansatz (67) sollte nur dazu dienen, klar zu machen, ein wie tiefes und gründliches, auf Gesetze basiertes Verständnis für die Materie und ihre Konstitution uns die Kenntnis der Wirkungsfunktion eröffnen würde. Im übrigen kann die Diskussion derartiger willkürlich gewählter Ansätze nicht weiter führen, sondern es werden neue physikalische Einsichten und Prinzipien nötig sein, die uns den richtigen Weg zur Bestimmung der Hamiltonschen Funktion weisen.

Um das Wesen der reinen Feldphysik, welche durch Mie für das Gebiet der Elektrodynamik in ihrem allgemeinen Ansatz realisiert wurde, ex contrario deutlich zu machen, stellen wir dem in ihr gültigen Wirkungsprinzip (65) dasjenige gegenüber, von welchem die *Maxwell-Lorentzsche Theorie* beherrscht wird, die neben dem elektromagnetischen Felde eine sich bewegende *Substanz* kennt. Diese Substanz ist ein dreidimensionales Kontinuum; ihre Stellen können also in stetiger Weise auf die Wertsysteme von drei Koordinaten $\alpha\beta\gamma$ bezogen werden. Wir denken uns die Substanz in infinitesimale Elemente zerlegt; jedem Substanzelement kommt dann eine bestimmte unveränderliche positive Masse dm und eine unveränderliche elektrische Ladung de zu; ihm korrespondiert als Ausdruck seiner Geschichte eine mit Durchlaufungssinn versehene Weltlinie, oder besser gesagt, ein unendlich dünner »Weltfaden«. Teilen wir diesen in kleine Abschnitte und ist

$$ds = \sqrt{-g_{ik}\,dx_i\,dx_k}$$

die Eigenzeit-Länge eines solchen Abschnitts, $d\omega$ aber sein vierdimensionales Volumen, so führen wir durch die invariante Gleichung

$$dm\,ds = \mu_0\,d\omega \tag{71}$$

die Raum-Zeit-Funktion μ_0 der Ruhmassendichte ein. Das über ein Weltgebiet $\mathfrak{X}$ erstreckte Integral

$$\int_{\mathfrak{X}} \mu_0\,d\omega = \int dm\,ds = \int\left(dm\int\sqrt{-g_{ik}\,dx_i\,dx_k}\right)$$

nenne ich die *Substanzwirkung der Masse*. Im letzten Integral bezieht sich die innere Integration über denjenigen Teil der Weltlinie eines beliebigen Substanzelements von der Masse dm, der dem Gebiete $\mathfrak{X}$ angehört, die äußere bezeichnet Summation über alle Substanzelemente. Rein mathematisch stellt sich dieser Übergang von Substanz-Eigenzeit- zu gewöhnlichen Raum-Zeit-Integralen folgendermaßen dar. Wir führen zunächst die »Substanzdichte« ν der Masse durch die Gleichung ein:

$$dm = \nu\,d\alpha\,d\beta\,d\gamma$$

(gegenüber beliebigen Transformationen der Substanzkoordinaten $\alpha\beta\gamma$ verhält sich ν wie eine skalare Dichte). Auf jeder Weltlinie einer Substanzstelle $(\alpha\beta\gamma)$ zählen wir die Eigenzeit s von einem bestimmten Anfangspunkt aus (der aber natürlich von Substanzstelle zu Substanzstelle *stetig* variieren soll). Dann sind die Koordinaten x_i des Weltpunktes, in welchem sich die Substanzstelle $(\alpha\beta\gamma)$ im Augenblick s ihrer Bewegung (nach Verlauf der Eigenzeit s) befindet, stetige Funktionen von $\alpha\beta\gamma s$, deren Funktionaldeterminante

$$\frac{\partial(x_0 x_1 x_2 x_3)}{\partial(\alpha\beta\gamma s)} \text{ den absoluten Betrag } \Delta$$

besitze. Die Gleichung (71) besagt dann

$$\mu_0 \sqrt{g} = \frac{\nu}{\Delta}.$$

Auf analoge Art ist die Ruhdichte ϱ_0 der elektrischen Ladung zu erklären. Als *Substanzwirkung der Elektrizität* setzen wir an:

$$\int\left(de\int\varphi_i\,dx_i\right),$$

wo die äußere Integration sich wieder über alle Substanzelemente, die innere aber jeweils über denjenigen Teil der Weltlinie eines mit der Ladung de behafteten Substanzelementes erstreckt, der im Innern des Weltgebiets $\mathfrak{X}$ verläuft. Wir können dafür auch schreiben

$$\int de\,ds\cdot\varphi_i u^i = \int\varrho_0\,u^i\varphi_i\,d\omega = \int s^i\varphi_i\,d\omega,$$

wenn $u^i = \frac{dx_i}{ds}$ die Komponenten der Weltrichtung sind und $s^i = \varrho_0 u$ die Komponenten des Viererstroms (reiner Konvektionsstrom). Endlich tritt neben der Substanz- auch eine *Feldwirkung der Elektrizität* auf, für welche die Maxwellsche Theorie den einfachen Ansatz

$$\frac{1}{4}\int F_{ik}F^{ik}\,d\omega \qquad \left(F_{ik} = \frac{\partial\varphi_i}{\partial x_k} - \frac{\partial\varphi_k}{\partial x_i}\right)$$

macht. Das Hamiltonsche Prinzip, welches die Maxwell-Lorentzschen Gesetze zusammenfaßt, lautet dann wie folgt:

Die Gesamtwirkung, d. i. die Summe aus Feld- und Substanzwirkung der Elektrizität plus der Substanzwirkung der Masse erleidet bei einer beliebigen (außerhalb eines endlichen Gebiets verschwindenden) Variation des Feldzustandes (der φ_i) und einer ebensolchen raumzeitlichen Verschiebung der von den einzelnen Substanzstellen beschriebenen Weltlinien keine Änderung.

Dieses Prinzip liefert offenbar zunächst durch Variation der φ_i die Gleichungen

$$\frac{\partial F^{ik}}{\partial x_k} = s^i = \varrho_0 u^i.$$

Halten wir hingegen die φ_i fest und variieren die Weltlinien der Sub-

stanzelemente, so bekommen wir, indem wir (wie in § 17 bei Bestimmung der kürzesten Linien) Differentiation und Variation vertauschen und darauf partiell integrieren:

$$\delta\int \varphi_i dx_i = \int(\delta\varphi_i dx_i + \varphi_i d\delta x_i) = \int(\delta\varphi_i dx_i - \delta x_i d\varphi_i)$$

$$= \int\left(\frac{\partial\varphi_i}{\partial x_k} - \frac{\partial\varphi_k}{\partial x_i}\right)\delta x_k \cdot dx_i.$$

Dabei sind δx_i die Komponenten der infinitesimalen Verschiebung, welche die einzelnen Punkte der Weltlinie erfahren. Demnach ist

$$\delta\int\left(de\int\varphi_i dx_i\right) = \int de\,ds \cdot F_{ik}u^i\delta x_k = \int \varrho_0 F_{ik}u^i\delta x_k \cdot d\omega\,.$$

Variieren wir ebenso die Substanzwirkung der Masse (diese Rechnung wurde in § 17 schon allgemeiner, für variable g_{ik} durchgeführt), so gehen die mechanischen Gleichungen hervor, welche in der Maxwellschen Theorie zu den Feldgleichungen hinzutreten:

$$\mu_0\frac{du_i}{ds} = p_i, \qquad p_i = \varrho_0 F_{ik}u^k = F_{ik}s^k\,.$$

Und damit ist jener ganze zyklisch geschlossene Gesetzeszusammenhang gewonnen, von welchem auf S. 179 die Rede war. — Die Existenz des Elektrons vermag diese Theorie natürlich nicht zu erklären, da in ihr Kohäsionskräfte fehlen.

An dem eben formulierten Wirkungsprinzip fällt auf, daß neben die Substanzwirkung der Masse nicht ebenso eine Feldwirkung tritt, wie das bei der Elektrizität der Fall ist; diese Lücke wird im nächsten Kapitel ausgefüllt werden, wo sich das *Gravitationsfeld* als dasjenige zeigen wird, was der Masse in der gleichen Weise entspricht wie das elektromagnetische Feld der elektrischen Ladung.

Die große Erkenntnis, zur der wir in diesem Kapitel gelangt sind, ist die, daß der Schauplatz der Wirklichkeit nicht ein dreidimensionaler Euklidischer Raum ist, sondern *die vierdimensionale Welt, in der Raum und Zeit in unlöslicher Weise miteinander verbunden sind.* So tief die Kluft ist, welche für unser Erleben das anschauliche Wesen von Raum und Zeit trennt — von diesem qualitativen Unterschied geht in jene objektive Welt, welche die Physik aus der unmittelbaren Erfahrung herauszuschälen sich bemüht, nichts ein. Sie ist ein vierdimensionales Kontinuum, weder »Raum« noch »Zeit«; nur das an einem Stück dieser Welt hinwandernde Bewußtsein erlebt den Ausschnitt, welcher ihm entgegenkommt und hinter ihm zurückbleibt, als *Geschichte*, als einen in zeitlicher Entwicklung begriffenen, im Raume sich abspielenden Prozeß.

Diese vierdimensionale Welt ist *metrisch*, wie der Euklidische Raum; aber die quadratische Form, welche die Metrik bestimmt, ist nicht positiv-

definit, sondern hat *eine* negative Dimension. Dieser Umstand ist zwar mathematisch belanglos, aber für die Wirklichkeit und ihren Wirkungszusammenhang von tiefer Bedeutung. Es war nötig, den in mathematischer Hinsicht so einfachen Gedanken der metrischen vierdimensionalen Welt nicht nur in isolierter Abstraktion zu erfassen, sondern ihn in seine wichtigsten Konsequenzen für die Auffassung der physikalischen Vorgänge zu verfolgen, um zu einem lebendigen Verständnis seines Inhalts und seiner Tragweite zu gelangen; das sollte hier in aller Kürze versucht werden. Es bleibt merkwürdig, daß die dreidimensionale Geometrie der statischen Welt, die schon von Euklid in ein vollendetes axiomatisches System gebracht wurde, für uns einen so einleuchtenden Charakter besitzt, während wir uns der vierdimensionalen erst in zähem Ringen und im Anschluß an ein ausgedehntes physikalisch-empirisches Material haben bemächtigen können. Erst mit der Relativitätstheorie ist unsere Naturerkenntnis (darf man sagen) der Tatsache der Bewegung, der Veränderung in der Welt vollständig gerecht geworden.

Kapitel IV.

Allgemeine Relativitätstheorie.

§ 27. Relativität der Bewegung, metrisches Feld und Gravitation[1]).

In so vollendeter Weise auch immer das Einsteinsche Relativitätsprinzip, das wir im vorigen Kapitel entwickelt haben, den aus der Erfahrung gewonnenen, den Wirkungszusammenhang der Welt präzisierenden Naturgesetzen gerecht wird — in erkenntnistheoretischer Hinsicht können wir uns nicht mit ihm zufrieden geben. Greifen wir noch einmal auf den Anfang des letzten Kapitels zurück! Wir lernten damals ein »kinematisches« Relativitätsprinzip kennen. $x_1 x_2 x_3$, t waren die Raum-Zeit-Koordinaten eines Weltpunktes, bezogen auf ein bestimmtes dauernd vorhandenes Cartesisches Koordinatensystem im Raum, $x'_1 x'_2 x'_3$, t' die Koordinaten desselben Punktes in bezug auf ein zweites solches System, das zu dem ersten in beliebiger Bewegung begriffen sein kann; zwischen ihnen bestehen die Transformationsformeln (II), S. 137. Wir sahen mit voller Evidenz ein, daß zwei physikalische Zustandsverläufe objektiv in keiner Weise voneinander verschieden sind, wenn die Zustandsgrößen für den einen sich durch dieselben mathematischen Funktionen von $x'_1 x'_2 x'_3$, t' darstellen, die in den Argumenten $x_1 x_2 x_3$, t den andern Verlauf beschreiben. Es müssen also auch die Naturgesetze in dem einen System unabhängiger Raum-Zeit-Argumente genau die gleiche Form besitzen wie in dem andern. Freilich: die Tatsachen der Dynamik scheinen jener Forderung ins Gesicht zu schlagen, und unter dem Zwange dieser Tatsachen hat man sich seit Newton dazu entschließen müssen, nicht der

Translation, wohl aber der Rotation eine absolute Bedeutung zuzuschreiben; doch hat die Vernunft dieses ihr durch die Wirklichkeit zugemutete Abstrusum niemals recht verdauen können (trotz aller philosophischen Rechtfertigungsversuche, vgl. z. B. Kants »Metaphysische Anfangsgründe der Naturwissenschaften«), und das Problem der Zentrifugalkraft ist immer wieder als ungelöstes Rätsel empfunden worden*).

Wo liegt der Ursprung der Zentrifugal- und der andern Trägheitskräfte? Newton antwortete: im absoluten Raum. Die Antwort, welche die spezielle Relativitätstheorie gibt, ist nicht wesentlich von der Newtonschen verschieden; sie macht die metrische Struktur der Welt, welche sie als eine formale geometrische Eigenschaft derselben betrachtet, dafür verantwortlich. Was sich aber als Kraft äußert, muß selbst Realität besitzen. Als etwas Reales können wir jedoch die metrische Struktur nur dann anerkennen, wenn sie selbst veränderungsfähig ist und Rückwirkungen von der Materie erleidet. Wir kommen also aus dem Dilemma nur heraus — und dieser Ausweg wurde uns gleichfalls von Einstein eröffnet —, wenn wir die in Kap. II dargestellten Riemannschen Ideen, statt auf den dreidimensionalen Euklidischen Raum, auf die vierdimensionale Einstein-Minkowskische Welt, von welcher das vorige Kapitel handelte, anwenden. Wir ziehen dabei vorläufig nicht den allgemeinsten Begriff der metrischen Mannigfaltigkeit heran, sondern bleiben bei der Riemannschen Auffassung stehen. Die Weltpunkte, haben wir danach anzunehmen, bilden eine vierdimensionale Mannigfaltigkeit, welcher durch eine nicht-ausgeartete quadratische Differentialform Q von einer positiven und drei negativen Dimensionen*) eine Maßbestimmung aufgeprägt ist. Bei Benutzung irgendeines Koordinatensystems x_i ($i = 0, 1, 2, 3$) (im allgemeinen Riemannschen Sinne) sei

$$Q = \sum_{ik} g_{ik}\, dx_i dx_k. \tag{1}$$

Die Naturgesetze drücken sich jetzt als Tensorrelationen aus, die gegenüber beliebigen stetigen Transformationen der Argumente x_i invariant sind; dabei treten dann aber neben den übrigen physikalischen Zustandsgrößen die Koeffizienten g_{ik} der quadratischen Differentialform (1) auf. Der oben aufgestellten Relativitätsforderung wird demnach im Einklang mit den Erfahrungstatsachen Genüge geleistet, *wenn wir die g_{ik}* in genau der gleichen Weise wie etwa die Komponenten φ_i des elektromagnetischen Potentials (welche die Koeffizienten einer invarianten *linearen* Differentialform $\sum_i \varphi_i dx_i$ bilden) *als physikalische Zustandsgrößen betrachten, denen etwas Reales entspricht*, das »metrische Feld«. Es besteht unter diesen

*) Wir lassen gegenüber dem vorigen Kapitel die Änderung eintreten, daß wir die metrische Fundamentalform mit dem entgengesetzten Vorzeichen versehen. Die frühere Festsetzung war die bequemere zur Darstellung der Zerspaltung der Welt in Raum und Zeit, für die allgemeine Theorie erweist sich die gegenwärtige als die zweckmäßigere.

Umständen sogar Invarianz nicht bloß gegenüber den erwähnten Transformationen (II), die nur in bezug auf die Zeitkoordinate völlig willkürlichen (nicht-linearen) Charakter tragen, sondern gegenüber allen Transformationen überhaupt. Die Auszeichnung der Zeitkoordinate in (II) ist ja in der Tat mit den durch das Einsteinsche Relativitätsprinzip gewonnenen Erkenntnissen unverträglich. Indem wir aber statt (II) ganz beliebige Transformationen zulassen, auch solche, die in den Raumkoordinaten nicht-linear sind, behaupten wir, daß die Cartesischen Koordinatensysteme an sich in keiner Weise vor irgendeinem »krummlinigen« Koordinatensystem ausgezeichnet sind. Damit *fällt die Existenz einer von der Physik unabhängigen Geometrie* im alten Sinne, und gerade weil wir uns von dem Dogma der Existenz einer solchen Geometrie noch nicht frei gemacht hatten, waren wir durch vernünftige Überlegung auf das Relativitätsprinzip (II) und nicht sofort auf das Prinzip der Invarianz gegenüber beliebigen Transformationen der vier Weltkoordinaten gekommen. In Wahrheit beruht aber das räumliche Messen auf einem physikalischen Vorgang: der Reaktion der Lichtstrahlen und starren Maßstäbe auf die gesamte Körperwelt. Bereits in § 21 trat uns dieser Gesichtspunkt entgegen, vor allem aber können wir an die Ausführungen von § 12 anknüpfen; denn in der Tat sind wir hier zu Riemanns »dynamischer« Auffassung gelangt als einer notwendigen Konsequenz der Relativität aller Bewegung. Das Verhalten der Lichtstrahlen und Maßstäbe wird außer durch ihre eigene Beschaffenheit bestimmt durch das »metrische Feld«, genau so wie das Verhalten einer elektrischen Ladung außer von dieser selbst von dem elektrischen Feld abhängt. Wie aber das elektrische Feld seinerseits abhängt von den Ladungen und durch seine Vermittlung also eine ponderomotorische Wechselwirkung der Ladungen aufeinander zustande kommt, müssen wir hier annehmen, daß *das metrische Feld* (oder, mathematisch gesprochen, der Tensor mit den Komponenten g_{ik}) *in Abhängigkeit steht von dem Materiellen, welches die Welt erfüllt.* Wir verweisen auf das am Schlusse des vorigen Paragraphen aufgestellte Wirkungsprinzip, in dessen beiden, auf die Substanz bezüglichen Teilen das metrische Feld in der gleichen Weise der Masse gegenübertritt wie das elektrische Feld der elektrischen Ladung. Die im vorigen Kapitel über die Weltmetrik gemachte, der Euklidischen Geometrie im dreidimensionalen Raum entsprechende Annahme, daß es spezielle Koordinatensysteme gibt, die »linearen«, in welchen die metrische Fundamentalform konstante Koeffizienten hat, ist dieser Auffassung gegenüber nicht mehr aufrecht zu erhalten.

Durch ein einfaches anschauliches Beispiel kann man sich klar machen, wie die geometrischen Verhältnisse durch Bewegung in Mitleidenschaft gezogen werden. Man versetze eine ebene Scheibe in gleichförmige Rotation. Ich behaupte, wenn in demjenigen Bezugsraum, relativ zu dem hier von gleichförmiger Rotation gesprochen wird, die Euklidische Geometrie gilt, sie auf der rotierenden Scheibe, wenn diese mittels mitbe-

wegter Maßstäbe ausgemessen wird, nicht mehr gilt. Man betrachte nämlich einen um das Rotationszentrum beschriebenen Kreis auf der Scheibe. Sein Radius hat den gleichen Wert, ob ich ihn mittels ruhender oder mitbewegter Maßstäbe messe; denn die Bewegungsrichtung ist senkrecht zu der Längserstreckung des an den Radius angelegten Maßstabes. Hingegen ergibt sich für die Kreisperipherie mittels der mitbewegten Maßstäbe wegen der Lorentz-Kontraktion, welche sie erfahren, ein größerer Wert. Auf der rotierenden Scheibe gilt somit nicht mehr das Euklidische Gesetz, daß der Umfang des Kreises $= 2\pi$ mal dem Radius ist.

Wenn in einem Speisewagen, der durch eine scharfe Kurve fährt, die Gläser umfallen, oder ein in Rotation versetztes Schwungrad zerspringt, so haben wir darin nach der hier skizzierten Auffassung nicht, wie nach Newton, die Wirkung einer »absoluten Rotation« zu erblicken, die es nicht gibt, sondern des »metrischen Feldes« oder vielmehr des mit ihm verknüpften affinen Zusammenhangs. Das Galileische Trägheitsprinzip zeigt, daß in der Welt eine Art »zwangweiser Führung« besteht, die einem Körper, der mit bestimmter Geschwindigkeit losgelassen wird, eine ganz bestimmte Bewegung aufnötigt, aus welcher er nur durch äußere Kräfte herausgerissen werden kann. Dieses »Führungsfeld«, das etwas physikalisch Reales ist, nannten wir früher »affinen Zusammenhang«. Bei Ablenkung durch äußere Kräfte macht sich die Führung durch Reaktionskräfte, z. B. die Zentrifugalkraft bemerkbar. Sofern der Zustand des Führungsfeldes nicht beharrt, sondern der gegenwärtige sich aus vergangenen unter dem Einfluß der in der Welt vorhandenen Massen, der Fixsterne, herausgebildet hat, sind die oben erwähnten Erscheinungen also zum Teil eine Wirkung der Fixsterne, *relativ zu denen* die Rotation stattfindet*). —

Zur allgemeinen Relativitätstheorie, die wir jetzt aus der im vorigen Kapitel entwickelten »speziellen« mit Einstein herzuleiten im Begriffe sind, erheben wir uns am besten in zwei Stufen.

I. Wir vollziehen, dem Geiste der Kontinuität gemäß, den gleichen Übergang für die vierdimensionale Welt, der uns in Kap. II von der Euklidischen zur Riemannschen Geometrie führte. Dabei tritt eine quadratische Differentialform (1) als metrische Grundform auf. Es ist ohne weiteres möglich, die physikalischen Gesetze dieser Verallgemeinerung anzupassen. Dabei ist es angemessen, die Quantitätsgrößen durch Ten-

*) »Zum Teil« darum, weil die Massenverteilung in der Welt das Führungsfeld nicht eindeutig bestimmt; sondern beide sind *in einem Moment* unabhängig voneinander und zufällig (genau wie Ladung und elektrisches Feld), die Naturgesetze lehren lediglich, wie sich aus einem solchen Anfangszustand beider alle übrigen (vergangenen und zukünftigen) Zustände zwangsläufig entwickeln. So wenigstens muß man urteilen, solange man auf dem Standpunkt der reinen Feldphysik beharrt. Daß die Welt, wie wir sie tatsächlich vorfinden, im Großen genommen, stationär (in Ruhe) ist, kann, wenn überhaupt, nur als statistisches Gleichgewicht verstanden werden. Vgl. darüber § 34.

sordichten statt wie in Kap. III durch Tensoren zu repräsentieren, was durch Multiplikation mit $\sqrt{g}$ erreicht wird (g die negative Determinante der g_{ik}). So werden insbesondere Massen- und Ladungsdichte μ und ϱ statt durch die Formel (71), § 26 durch

$$dm\,ds = \mu\,dx, \qquad de\,ds = \varrho\,dx \qquad (dx = dx_0\,dx_1\,dx_2\,dx_3)$$

zu erklären sein; die Eigenzeit ds längs der Weltlinie bestimmt sich aus

$$ds^2 = g_{ik}\,dx_i\,dx_k.$$

Die Maxwellschen Gleichungen lauten

$$F_{ik} = \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_k} - \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_i}, \qquad \frac{\partial \mathfrak{F}^{ik}}{\partial x_k} = \mathfrak{s}^i.$$

φ_i sind die Koeffizienten einer invarianten linearen Differentialform $\varphi_i\,dx_i$, $\mathfrak{F}^{ik}$ bedeutet nach früherer Konvention $\sqrt{g} \cdot F^{ik}$. In der Lorentzschen Theorie wird für $\mathfrak{s}^i$ der Ansatz gemacht

$$\mathfrak{s}^i = \varrho u^i \qquad \left(u^i = \frac{dx_i}{ds}\right).$$

Die ponderomotorische Kraft pro Volumeinheit (eine kovariante Vektordichte in der vierdimensionalen Welt) bestimmt sich aus*)

$$\mathfrak{p}_i = -F_{ik}\,\mathfrak{s}^k, \tag{2}$$

und die mechanischen Gleichungen lauten allgemein

$$\mu\left(\frac{du_i}{ds} - \begin{Bmatrix} i\beta \\ \alpha \end{Bmatrix} u_\alpha u^\beta\right) = \mathfrak{p}_i; \tag{3}$$

dabei ist stets $\mathfrak{p}_i u^i = 0$. Wir können ihnen die frühere Form geben, wenn wir neben den $\mathfrak{p}_i$ die Größen

$$\begin{Bmatrix} i\beta \\ \alpha \end{Bmatrix} \cdot \mu u_\alpha u^\beta = \frac{1}{2}\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x_i} \cdot \mu u^\alpha u^\beta \tag{4}$$

— vgl. § 17, Gl. (64) — einführen als die Dichtekomponenten $\bar{\mathfrak{p}}_i$ einer aus dem metrischen Felde entspringenden »Scheinkraft« (Reaktionskraft des Führungsfeldes); denn dann lauten jene Gleichungen

$$\mu\frac{du_i}{ds} = \mathfrak{p}_i + \bar{\mathfrak{p}}_i.$$

Die einfachsten Beispiele solcher »Scheinkräfte« sind die Zentrifugal- und Coriolis-Kraft. Vergleichen wir die Formel (4) für die aus dem metrischen Felde entspringende »Scheinkraft« mit der für die ponderomotorische Kraft des elektromagnetischen Feldes, so zeigt sich eine vollständige Analogie. Wie nämlich die Vektordichte mit den kontravarianten Komponenten $\mathfrak{s}^i$ die Elektrizität charakterisiert, so wird, wie wir gesehen haben, die sich bewegende Materie durch die Tensordichte mit den Komponenten

*) Änderung des Vorzeichens wegen Änderung des Vorzeichens der metrischen Fundamentalform!

$\mathfrak{T}_i^k = \mu u_i u^k$ beschrieben. Den Komponenten F_{ik} des elektrischen Feldes entsprechen hier als Komponenten des metrischen Feldes die Größen

$$\Gamma_{i\beta}^{\alpha} = \left\{ \begin{matrix} i\beta \\ \alpha \end{matrix} \right\}.$$

Wie die Feldkomponenten F durch Differentiation aus dem elektromagnetischen Potential φ_i entspringen, so die Γ aus den g_{ik}; diese bilden somit das Potential des metrischen Feldes. Die Kraftdichte ist das Produkt aus elektrischem Feld und Elektrizität auf der einen Seite, aus metrischem Feld und Materie auf der andern Seite:

$$\mathfrak{p}_i = -F_{ik}\mathfrak{s}^k, \qquad \text{bzw.} \qquad \bar{\mathfrak{p}}_i = \Gamma_{i\beta}^{\alpha}\mathfrak{T}_{\alpha}^{\beta}.$$

Verlassen wir die Vorstellung einer unabhängig von den physikalischen Zuständen existierenden Substanz, so tritt an deren Stelle die durch den Zustand des Feldes bestimmte allgemeine Energie-Impuls-Dichte $\mathfrak{T}_i^k$. Nach der speziellen Relativitätstheorie genügt sie dem Erhaltungssatz

$$\frac{\partial \mathfrak{T}_i^k}{\partial x_k} = 0.$$

Diese Gleichung ist jetzt nach Formel (37), § 14 zu ersetzen durch die allgemein invariante

$$(5) \qquad \frac{\partial \mathfrak{T}_i^k}{\partial x_k} - \Gamma_{i\beta}^{\alpha}\mathfrak{T}_{\alpha}^{\beta} = 0.$$

Würde auf der linken Seite nur das erste Glied stehen, so würde auch jetzt $\mathfrak{T}$ den Erhaltungsgesetzen genügen. Statt dessen kommt aber ein zweiter Term hinzu: die »reale« Gesamtkraft

$$\mathfrak{p}_i = -\frac{\partial \mathfrak{T}_i^k}{\partial x_k}$$

verschwindet nicht, sondern ihr muß durch die aus dem metrischen Felde entspringende »Scheinkraft«

$$(6) \qquad \bar{\mathfrak{p}}_i = \Gamma_{i\beta}^{\alpha}\mathfrak{T}_{\alpha}^{\beta} = \frac{1}{2}\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x_i}\mathfrak{T}^{\alpha\beta}$$

das Gleichgewicht gehalten werden.

Diese Formeln erweisen sich auch in der speziellen Relativitätstheorie als zweckmäßig, wenn man sich auf ein krummliniges oder krummlinig bewegtes oder beschleunigtes Koordinatensystem zu beziehen hat. Um den schlichten Sinn unserer Ausführungen deutlich zu machen, wollen wir auf diesem Wege die *Zentrifugalkraft* bestimmen, die in einem rotierenden Bezugssystem auftritt. Verwenden wir ein normales Koordinatensystem für die Welt: t, x_1, x_2, x_3, führen aber an Stelle der Cartesischen Raumkoordinaten Zylinderkoordinaten r, z, θ ein, so ist

$$ds^2 = dt^2 - (dz^2 + dr^2 + r^2 d\theta^2).$$

Wir machen, unter ω eine konstante Winkelgeschwindigkeit verstanden, die Substitution

$$\theta = \theta' + \omega t', \qquad t = t'$$

und lassen hernach die Akzente wieder fort; dann kommt

$$ds^2 = dt^2(1 - r^2\omega^2) - 2r^2\omega\, d\theta\, dt - (dz^2 + dr^2 + r^2 d\theta^2).$$

Setzen wir einen Augenblick

$$t = x_0, \quad \theta = x_1, \quad z = x_2, \quad r = x_3,$$

so ist für einen in dem jetzt benutzten Bezugssystem ruhenden Massenpunkt $u^1 = u^2 = u^3 = 0$ und daher

$$(u^0)^2(1 - r^2\omega^2) = 1.$$

Für die Komponenten der Zentrifugalkraft gilt die Formel (4):

$$\bar{\mathfrak{p}}_i = \frac{1}{2}\frac{\partial g_{00}}{\partial x_i}\cdot \mu (u^0)^2,$$

und da die Ableitungen von $g_{00} = 1 - r^2\omega^2$ nach $x_0\, x_1\, x_2$ verschwinden und

$$\frac{\partial g_{00}}{\partial x_3} = \frac{\partial g_{00}}{\partial r} = -2r\omega^2$$

ist, ergibt sich bei Rückkehr zu den gewöhnlichen Maßeinheiten, in denen die Lichtgeschwindigkeit c nicht $= 1$ ist, und wenn man die kontravarianten Komponenten statt der kovarianten benutzt, statt der Indizes 0, 1, 2, 3 aber die bezeichnenderen t, θ, z, r:

$$(7) \qquad \bar{\mathfrak{p}}^t = \bar{\mathfrak{p}}^\theta = \bar{\mathfrak{p}}^z = 0, \qquad \bar{\mathfrak{p}}^r = \frac{\mu r\omega^2}{1 - \left(\frac{r\omega}{c}\right)^2}.$$

Zwei eng miteinander zusammenhängende Umstände sind für die »Scheinkräfte« des metrischen Feldes charakteristisch. *Erstens:* die Beschleunigung, welche sie einem an einer bestimmten Raum-Zeit-Stelle befindlichen (genauer: diese Stelle mit bestimmter Geschwindigkeit passierenden) Massenpunkt erteilen, ist unabhängig von dessen Masse — oder die Kraft selber ist der trägen Masse des Massenpunktes, an welcher sie angreift, proportional. *Zweitens:* bei Benutzung eines geeigneten, nämlich eines geodätischen Koordinatensystems an einer bestimmten Raum-Zeit-Stelle verschwinden jene Kräfte vollständig (vgl. § 14). Gilt die spezielle Relativitätstheorie, so kann dieses Verschwinden simultan für alle Raum-Zeit-Punkte durch Einführung eines linearen Koordinatensystems erreicht werden, aber auch im allgemeinen Falle können wenigstens für jede einzelne Stelle durch ein zu dieser Stelle gehöriges geeignetes Koordinatensystem die sämtlichen 40 Komponenten $\Gamma^\alpha_{i\beta}$ des affinen Zusammenhangs zum Verschwinden gebracht werden*).

*) Es liegt demnach im Wesen des metrischen Feldes, daß es nicht durch einen gegenüber beliebigen Transformationen invarianten Feldtensor Γ beschrieben werden kann.

Die erwähnten beiden Umstände treffen nun aber erfahrungsgemäß zu für die *Gravitationskraft.* Darin, daß ein gegebenes Gravitationsfeld jeder Masse, die man in das Feld bringt, die gleiche Beschleunigung erteilt, liegt ja gerade das eigentliche Rätsel der Schwerkraft. Im elektrostatischen Felde wirkt auf ein schwach geladenes Probekörperchen die Kraft $e \cdot \mathfrak{E}$, wo die elektrische Ladung e nur vom Probekörper, die elektrische Feldstärke $\mathfrak{E}$ nur vom Felde abhängt. Wirken keine weiteren Kräfte, so erteilt diese Kraft dem Probekörper von der trägen Masse m eine Beschleunigung $\mathfrak{b}$, welche sich durch die Grundgleichung der Mechanik $m\mathfrak{b} = e\mathfrak{E}$ bestimmt. Im Gravitationsfeld gilt etwas ganz Analoges. Die am Probekörper angreifende Kraft ist $= g\mathfrak{G}$, wo g, die »Gravitationsladung«, nur vom Probekörper, $\mathfrak{G}$ aber nur vom Felde abhängt; die Beschleunigung bestimmt sich auch hier durch die Gleichung $m\mathfrak{b} = g\mathfrak{G}$. Nun stellt sich aber die merkwürdige Tatsache heraus, daß die »Gravitationsladung« oder *»schwere Masse« g gleich der »trägen Masse«* m ist. Von Eötvös ist die empirische Geltung dieses Gesetzes in neuerer Zeit aufs genaueste geprüft worden [3]). Die einem Körper an der Erdoberfläche durch die Erddrehung erteilte Zentrifugalkraft ist der trägen, sein Gewicht der schweren Masse proportional. Die Resultierende aus beiden, die scheinbare Schwere, würde für verschiedene Körper verschiedene Richtung haben müssen, wenn nicht durchweg Proportionalität zwischen schwerer und träger Masse besteht. Daß eine solche Richtungsverschiedenheit nicht stattfindet, konstatiert Eötvös an dem empfindlichsten Instrument, der Drehwage; es wird dadurch die träge Masse eines Körpers mit derselben Genauigkeit gemessen, mit der wir durch eine Präzisionswage sein Gewicht bestimmen. Die Proportionalität zwischen schwerer und träger Masse gilt auch in solchen Fällen, wo ein Massenverlust nicht durch Entweichen von Substanz im alten Sinne, sondern durch Abgabe von radioaktiver Energie stattfindet. — Die träge Masse eines Körpers hat nach dem Grundgesetz der Mechanik *universelle* Bedeutung; sie regelt sein Verhalten gegenüber allen auf ihn stattfindenden Kraftwirkungen, welchen physikalischen Ursprungs sie auch sein mögen; seine schwere Masse ist aber nach der gewöhnlichen Auffassung (wie die elektrische Ladung) auf ein spezielles physikalisches Kraftfeld, das der Gravitation bezogen. Vom Standpunkt einer solchen Auffassung aus muß aber die Identität zwischen träger und schwerer Masse unverständlich bleiben; ihr kann nur eine Mechanik gerecht werden, die von vornherein neben der trägen Masse die Gravitation enthält. Das ist mit der Mechanik des allgemeinen Relativitätsprinzips der Fall, wenn wir annehmen, daß *die Gravitation genau so wie die Zentrifugal- oder Corioliskraft mit in jener »Scheinkraft« drin steckt, die dem metrischen Feld entspringt.* In der Tat wird sich herausstellen, daß die Planeten rein der durch das Führungsfeld vorgezeichneten Bahn folgen, daß wir nicht wie Newton noch eine besondere »Schwerkraft« nötig haben, welche sie aus ihrer Galilei-Bahn ablenkt. — Die Gravitationskräfte genügen erfahrungsgemäß auch der zweiten Forderung, daß sie an einer Raum-Zeit-Stelle durch Ein-

führung eines geeigneten Koordinatensystems zum Verschwinden gebracht werden können. Ein geschlossener Kasten, ein Lift, dessen Seil gerissen ist und der reibungslos im Schwerefeld der Erde abstürzt, ist ein anschauliches Beispiel eines solchen Bezugssystems. Alle frei fallenden Körper werden in diesem Kasten zu ruhen scheinen, die Vorgänge werden sich trotz der wirkenden Schwerkraft relativ zu dem Kasten genau so abspielen, als wenn der Kasten ruhte und kein Schwerefeld vorhanden wäre.

II. Der unter I. geschilderte Übergang von der speziellen zur allgemeinen Relativitätstheorie ist eine rein mathematische Angelegenheit. Unter Einführung der metrischen Grundform (1) können wir die Naturgesetze so formulieren, daß sie invariant sind gegenüber beliebigen Transformationen; das ist eine mathematische Wesensmöglichkeit, es liegt darin gar keine besondere Eigentümlichkeit dieser Gesetze. Ein neues physikalisches Moment kommt erst durch die Annahme hinein, die Weltmetrik sei nicht a priori fest gegeben, sondern jene quadratische Grundform hänge mit der Materie nach allgemein invarianten Gesetzen zusammen. Erst dadurch erheben wir uns zu einer Theorie, die den Namen einer allgemeinen Relativitätstheorie wirklich verdient und nicht nur das mathematische Gewand einer solchen erborgt hat. Erst sie ermöglicht es, das Problem der Relativität der Bewegung zu lösen. Erst sie führt jene schon unter I. erwähnte Analogie zu Ende, nach der sich das metrische Feld zur Materie verhält wie das elektrische zur Elektrizität. Und nur wenn wir sie akzeptieren, ist die am Schluß des vorigen Absatzes angedeutete Theorie möglich, nach der die Gravitation eine Äußerungsweise des metrischen Feldes ist; denn wir wissen aus der Erfahrung, daß das Gravitationsfeld sich durch die Massenverteilung (nach dem Newtonschen Attraktionsgesetz) bestimmt. Weniger in der Forderung der allgemeinen Invarianz, sondern in dieser Annahme erblicke ich daher den eigentlichen Kern der allgemeinen Relativitätstheorie. Stellen wir uns auf diesen Standpunkt, so sind wir nicht mehr berechtigt, die aus dem metrischen Feld entspringenden Kräfte als Scheinkräfte zu bezeichnen; sie haben dann eine genau so reale Bedeutung wie die ponderomotorischen Kräfte des elektromagnetischen Feldes. Auch Coriolis- und Zentrifugalkraft sind reale Kraftwirkungen, die von dem Gravitations- oder Führungsfeld auf die Materie ausgeübt werden. Während sich unter I. die mathematisch leicht zu lösende Aufgabe stellte, die bekannten Naturgesetze (wie die Maxwellschen Gleichungen) von dem speziellen Fall eines konstanten metrischen Fundamentaltensors auf den allgemeinen zu übertragen, haben wir zur Durchführung des jetzt entwickelten Gedankens *das invariante Gravitationsgesetz* zu ermitteln, *nach welchem die Materie die Komponenten* $\Gamma^{\alpha}_{i\beta}$ *des Gravitationsfeldes bestimmt* und das in der Einsteinschen Theorie an die Stelle des Newtonschen Attraktionsgesetzes tritt. Hierfür bieten uns die bekannten Feldgesetze keinen Anhaltspunkt. Trotzdem gelang es Einstein, dies Problem in zwingender Weise zu lösen und zu zeigen,

daß sich der Ablauf der Planetenbewegungen aus dem gefundenen Gesetz ebensogut erklärt wie aus dem alten Newtonschen, ja daß sich die einzige, bisher nicht befriedigend erklärte Unstimmigkeit, welche das Planetensystem gegenüber der Newtonschen Theorie aufweist, ein Vorrücken des Merkur-Perihels um den Betrag von 43″ pro Jahrhundert, quantitativ richtig aus seiner Gravitationstheorie ergibt.

So fällt uns durch diese Theorie, die eines der mächtigsten Zeugnisse für die Kraft spekulativen Denkens ist, mit der Lösung des Problems der Relativität aller Bewegung (einer Lösung, die allein imstande ist, unsere Vernunft zu befriedigen) zugleich die Lösung des Rätsels der Schwerkraft als eine reife Frucht mit in den Schoß[4]. Man sieht, wie bedeutsame Argumente hier, zu den in Kap. II besprochenen hinzutretend, dem Riemann-Einsteinschen Standpunkt der allgemeinen Relativität zum Durchbruch verhelfen. Auch darf man behaupten, daß erst dieser Standpunkt dem Umstande völlig gerecht wird, daß Raum und Zeit dem materialen Gehalt der Welt als *Formen* der Erscheinungen gegenübertreten: nur die physikalischen Zustandsgrößen können gemessen, d. h. aus materiellen Geschehnissen abgelesen werden, nicht aber die vier Weltkoordinaten, die vielmehr a priori in willkürlicher Weise den Weltpunkten zugeordnet werden, um die Darstellung der in der Welt ausgebreiteten Zustandsgrößen durch mathematische Funktionen (von vier unabhängigen Variablen) zu ermöglichen.

Während das Potential des elektromagnetischen Feldes von den Koeffizienten einer invarianten *linearen* Differentialform der Weltkoordinaten $\varphi_i dx_i$ gebildet wird, besteht das Potential des Gravitationsfeldes aus den Koeffizienten einer invarianten *quadratischen* Differentialform. In diese Erkenntnis von grundsätzlicher Bedeutung hat sich in dem Aufstieg, den wir hier vollzogen, allmählich der *Pythagoreische Lehrsatz* verwandelt. Sie kommt uns in der Tat nicht aus der Beobachtung der Gravitationserscheinungen im eigentlichen Sinne (Newton wurde den Beobachtungen durch Einführung eines einzigen Gravitationspotentials gerecht), sondern aus der Geometrie, den Erfahrungen des Messens. Die Einsteinsche Gravitationstheorie entspringt eben durch das Zusammentreten zweier Erkenntnisgebiete, die bis dahin in der historischen Entwicklung völlig getrennt verlaufen waren; wir könnten diese Synthese durch das Schema

$$\underbrace{\text{Pythagoras}\quad\text{Newton}}_{\text{Einstein}}$$

andeuten.

Um die Werte der Größen g_{ik} aus unmittelbar beobachtbaren Tatsachen zu entnehmen, benutzen wir wie in der speziellen Relativitätstheorie Lichtsignale und kräftefrei sich bewegende Massenpunkte. — Die Weltpunkte seien irgendwie auf Koordinaten x_i bezogen. Die durch einen Weltpunkt O hindurchgehenden geodätischen Linien

$$(8)\quad \frac{d^2 x_i}{ds^2} + \left\{ {\alpha\beta \atop i} \right\} \frac{dx_\alpha}{ds}\frac{dx_\beta}{ds} = 0\,; \qquad (9)\quad g_{ik}\frac{dx_i}{ds}\frac{dx_k}{ds} = C = \text{konst.}$$

zerfallen in zwei Klassen, diejenigen mit *raumartiger* und die mit *zeitartiger* Richtung ($C < 0$ bzw. $C > 0$). Die letzteren erfüllen einen »Doppelkegel« mit Knotenpunkt in O, der von O aus in zwei einfache Kegel zerfällt, den in die Zukunft und den in die Vergangenheit geöffneten. Der erste enthält alle Weltpunkte, die zur »*aktiven Zukunft*« von O gehören, der andere alle Weltpunkte, welche die »*passive Vergangenheit*« von O ausmachen. Der begrenzende Kegelmantel wird von den geodätischen Nullinien ($C = 0$) gebildet; auf seiner »zukünftigen« Hälfte liegen alle Weltpunkte, in denen ein in O gegebenes Lichtsignal eintrifft, allgemeiner die strengen »Einsatzpunkte« einer jeden in O ausgelösten Wirkung. Die metrische Fundamentalform bestimmt demnach allgemein, welche Weltpunkte untereinander in Wirkungszusammenhang stehen. Sind dx_i die relativen Koordinaten eines zu O unendlich benachbarten Weltpunktes O', so wird O' von einem in O aufgegebenen Lichtsignal dann und nur dann passiert, wenn $g_{ik} dx_i dx_k = 0$ ist. Durch Beobachtung der Lichtankunft in den zu O benachbarten Punkten können wir also das Verhältnis der Werte der g_{ik} im Punkte O feststellen; und wie in O, so in jedem andern Punkt. Mehr aber läßt sich aus dem Vorgang der Lichtausbreitung überhaupt nicht entnehmen; denn es geht aus einer Bemerkung auf S. 115 hervor, daß die geodätischen Nullinien nur von dem Verhältnis der g_{ik} abhängig sind. — Das optische Richtungsbild, das ein Beobachter (den wir uns wieder als »Punktauge« denken, vgl. S. 89) in einem Augenblick z. B. vom Sternenhimmel empfängt, ist folgendermaßen zu konstruieren. Vom Weltpunkt O, in dem sich der Beobachter befindet, sind diejenigen geodätischen Nullinien (Lichtlinien) auf dem rückwärtigen Kegel zu konstruieren, welche die Weltlinien der Sterne schneiden. Die Richtung jeder Lichtlinie in O ist zu zerlegen in eine Komponente, welche in die Richtung $\mathfrak{e}$ der Weltlinie des Beobachters hineinfällt, und eine dazu senkrechte $\mathfrak{s}$ (was »senkrecht« bedeutet, ist ja durch die Weltmetrik festgelegt, s. S. 109; $\mathfrak{s}$ ist die räumliche Richtung des Lichtstrahls). Innerhalb der dreidimensionalen linearen Mannigfaltigkeit der zu $\mathfrak{e}$ senkrechten Linienelemente in O ist $-ds^2$ eine positiv-definite Form; die aus ihr als metrischer Fundamentalform sich ergebenden Winkel — zu berechnen nach § 11, Formel (15) — zwischen den räumlichen Richtungen $\mathfrak{s}$ der Lichtstrahlen sind es, welche die vom Beobachter wahrgenommene Lage der Sterne zueinander bestimmen.

Der Proportionalitätsfaktor in den g_{ik}, der aus dem Vorgang der Lichtausbreitung nicht entnommen werden konnte, läßt sich durch die Bewegung von Massenpunkten ermitteln, die eine Uhr mit sich führen. Wenn wir nämlich annehmen, daß — wenigstens bei der kräftefreien, unbeschleunigten Bewegung — die an einer solchen Uhr abgelesene Zeit die Eigenzeit s ist, so ermöglicht die Gleichung (9) offenbar die Übertragung der Maßeinheit längs der Weltlinie der Bewegung. (Vgl. hierzu Anhang I.)

§ 28. Einsteins Grundgesetz der Gravitation.

Nach der Newtonschen Theorie wird der Zustand der Materie durch einen *Skalar*, die Massendichte μ, charakterisiert, und auch das Gravitationspotential ist ein *Skalar* Φ; es gilt *die Poissonsche Gleichung*

(10) $\Delta\Phi = 4\pi k\mu$ (Δ = div grad; k die Gravitationskonstante).

Dies ist das Gesetz, nach welchem die Materie das Gravitationsfeld bestimmt. Nach der Relativitätstheorie kann die Materie im strengen Sinne nur durch einen symmetrischen *Tensor* 2. Stufe T_{ik}, oder besser noch, durch die zugehörige gemischte Tensordichte $\mathfrak{T}_i^k$ zureichend beschrieben werden, und im Einklang damit besteht auch das Potential des Gravitationsfeldes aus den Komponenten eines symmetrischen *Tensors* g_{ik}. An Stelle der einen Gleichung (10) wird also in der Einsteinschen Theorie ein System von Gleichungen zu erwarten sein, deren linke Seiten Differentialausdrücke 2. Ordnung in den g_{ik} sind und auf deren rechter Seite die Komponenten der Energiedichte $\mathfrak{T}$ auftreten; dies System muß natürlich invariant gegenüber beliebigen Koordinatentransformationen sein. Um das Gravitationsgesetz zu finden, knüpfen wir am besten an das am Schluß von § 26 formulierte Hamiltonsche Prinzip an. Da bestand die Wirkungsgröße aus drei Teilen, der Substanz- und Feldwirkung der Elektrizität und der Substanzwirkung der Masse oder Gravitation. Hier fehlt ein vierter Term: die Feldwirkung der Gravitation, welche wir jetzt zu ermitteln haben. Bevor dies aber geschieht, wollen wir noch die Änderung berechnen, welche die Summe der uns schon bekannten drei ersten Terme erfährt, wenn wir die Potentiale φ_i des elektromagnetischen Feldes und die Weltlinien der Substanzelemente ungeändert lassen, aber die g_{ik}, *die Potentiale des metrischen Feldes, einer unendlich kleinen virtuellen Variation* δ *unterwerfen;* eine Möglichkeit, die sich ja erst in der allgemeinen Relativitätstheorie darbietet.

Die Substanzwirkung der Elektrizität erleidet dabei keine Änderung, die Änderung des in der Feldwirkung auftretenden Integranden

$$\tfrac{1}{2}\mathfrak{S} = \tfrac{1}{4}F_{ik}\mathfrak{F}^{ik}$$

ist

$$\tfrac{1}{4}\left\{\sqrt{g}\,\delta(F_{ik}F^{ik}) + (F_{ik}F^{ik})\,\delta\sqrt{g}\right\}\cdot$$

Hier ist der erste Summand in der geschweiften Klammer $= \mathfrak{F}_{rs}\delta F^{rs}$, und dafür findet man wegen

$$F^{rs} = g^{ri}g^{sk}F_{ik}$$

sogleich den Wert

$$2\sqrt{g}\,F_{ir}F_k^{\ r}\,\delta g^{ik};$$

der zweite Summand ist nach § 17, (58')

$$= -\,\mathfrak{S}g_{ik}\,\delta g^{ik}.$$

Es ergibt sich also schließlich für die Variation der Feldwirkung

$$-\int \tfrac{1}{2}\mathfrak{S}_{ik}\,\delta g^{ik}\,dx = \int \tfrac{1}{2}\mathfrak{S}^{ik}\,\delta g_{ik}\,dx$$

[vergl. § 17, (59)], wenn

$$\mathfrak{S}_i^k = \tfrac{1}{2}\mathfrak{S}\,\delta_i^k - F_{ir}\mathfrak{F}^{kr} \tag{11}$$

die Komponenten der Energiedichte des elektromagnetischen Feldes sind*). Plötzlich begreifen wir (aber erst hier, wo uns die Variation der Weltmetrik ermöglicht ist), woher eigentlich die komplizierten Ausdrücke (11) für die Energie-Impulsdichte des elektromagnetischen Feldes kommen. — Für die Substanzwirkung der Masse erhalten wir ein entsprechendes Resultat; es ist

$$\delta\sqrt{g_{ik}\,dx_i\,dx^k} = \frac{1}{2}\,\frac{dx_i\,dx_k\,\delta g_{ik}}{ds} = \tfrac{1}{2}\,ds\,u^i u^k\,\delta g_{ik},$$

also

$$\delta\int\left(dm\int\sqrt{g_{ik}\,dx_i\,dx_k}\right) = \int \tfrac{1}{2}\,\mu\,u^i u^k\,\delta g_{ik}\,dx\,.$$

Für die Gesamtänderung des uns schon bekannten Teils der Wirkungsgröße bei Variation des metrischen Feldes kommt demnach

$$\int \tfrac{1}{2}\mathfrak{T}^{ik}\,\delta g_{ik}\,dx\,, \tag{12}$$

wo $\mathfrak{T}_i^k$ die Tensordichte der Gesamtenergie bedeutet.

Das noch fehlende vierte Glied der Wirkungsgröße, die Feldwirkung der Gravitation, wird ein invariantes Integral $\int \mathfrak{G}\,dx$ sein müssen, dessen Integrand $\mathfrak{G}$ aus den Potentialen g_{ik} und den Feldkomponenten $\left\{\begin{smallmatrix} i\,k \\ r \end{smallmatrix}\right\}$ des Gravitationsfeldes $\left(\text{aus den } g_{ik} \text{ und ihren Ableitungen 1. Ordnung } \frac{\partial g_{ik}}{\partial x_r} = g_{ik,r}\right)$ aufgebaut ist; nur dann, sollte man meinen, werden sich als Gravitationsgesetze Differentialgleichungen von keiner höheren als der 2. Ordnung ergeben. Ist das totale Differential jener Funktion

$$\delta\mathfrak{G} = \tfrac{1}{2}\mathfrak{G}^{ik}\,\delta g_{ik} + \tfrac{1}{2}\mathfrak{G}^{ik,r}\,\delta g_{ik,r} \quad (\mathfrak{G}^{ki} = \mathfrak{G}^{ik},\ \mathfrak{G}^{ki,r} = \mathfrak{G}^{ik,r}), \tag{13}$$

so erhält man für eine infinitesimale Variation δg_{ik}, die außerhalb eines endlichen Gebiets verschwindet, durch eine partielle Integration

$$\delta\int \mathfrak{G}\,dx = \int \tfrac{1}{2}[\mathfrak{G}]^{ik}\,\delta g_{ik}\,dx\,, \tag{14}$$

wo die »Lagrangeschen Ableitungen« $[\mathfrak{G}]^{ik}$, die symmetrisch in den i und k sind, aus der Formel

*) Das entgegengesetzte Vorzeichen wie in Kap. III wegen Änderung des Vorzeichens der metrischen Fundamentalform!

$$[\mathfrak{G}]^{ik} = \mathfrak{G}^{ik} - \frac{\partial \mathfrak{G}^{ik,r}}{\partial x_r}$$

zu berechnen sind. So werden denn die Gravitationsgleichungen in der Tat die von vornherein vorausgesehene Form

$$[\mathfrak{G}]_i^k = -\mathfrak{T}_i^k \tag{15}$$

annehmen; und es wundert uns nun auch gar nicht mehr, daß durch Variation der g_{ik} an den ersten drei Bestandteilen der Wirkungsgröße nach (12) gerade die Energie-Impulskomponenten als Koeffizienten herausspringen. — Leider existiert aber eine skalare Dichte $\mathfrak{G}$, wie wir sie wünschen, überhaupt nicht; denn man kann ja an jeder vorgegebenen Stelle durch geeignete Wahl des Koordinatensystems alle $\left\{ {ik \atop r} \right\}$ zum Verschwinden bringen. Wohl aber haben wir im Skalar R der Riemannschen Krümmung eine Invariante kennen gelernt, welche die 2. Ableitungen der g_{ik} nur *linear* enthält; es ließe sich sogar zeigen, daß sie die einzige Invariante dieser Art ist*). Und infolge jener Linearität lassen sich in dem invarianten Integral $\int \frac{1}{2} R \sqrt{g}\, dx$ durch partielle Integration die Ableitungen 2. Ordnung herausschaffen. Wir bekommen dann

$$\int \tfrac{1}{2} R \sqrt{g}\, dx = \int \mathfrak{G}\, dx$$

+ einem Divergenzintegral, d. h. einem Integral, dessen Integrand die Gestalt $\frac{\partial \mathfrak{w}^i}{\partial x_i}$ besitzt; hier hängt nun $\mathfrak{G}$ nur von den g_{ik} und deren 1. Ableitungen ab. Für Variationen δg_{ik}, die außerhalb eines endlichen Bereichs verschwinden, ist daher

$$\delta \int \tfrac{1}{2} R \sqrt{g}\, dx = \delta \int \mathfrak{G}\, dx,$$

weil nach dem Prinzip der partiellen Integration

$$\int \frac{\partial(\delta \mathfrak{w}^i)}{\partial x_i}\, dx = 0$$

ist. Nicht $\int \mathfrak{G}\, dx$ selber, wohl aber die Variation $\delta \int \mathfrak{G}\, dx$ ist eine Invariante, und darauf kommt es ja in dem Hamiltonschen Prinzip allein an. *Wir brauchen daher keine Bedenken zu tragen, $\int \mathfrak{G}\, dx$ als die Wirkungsgröße des Gravitationsfeldes einzuführen; und dieser Ansatz ist der einzige, der sich als möglich herausstellt.* So werden wir zwangsläufig zu eindeutig bestimmten Gravitationsgleichungen (15) geführt. Aus ihnen geht hervor, daß *jede Art von Energie gravitierend wirkt;* nicht bloß die in den Elektronen und Atomen konzentrierte Energie, die Materie im engeren

*) Der Beweis ist im *Anhang II* durchgeführt.

Sinne, sondern auch die diffuse Feldenergie (denn $\mathfrak{T}_i^k$ sind die Komponenten der Gesamtenergie).

Bevor wir die Rechnungen durchführen, welche nötig sind, um die Gravitationsgleichungen in expliziter Form hinschreiben zu können, wollen wir zunächst noch prüfen, ob wir *im Falle der Mieschen Theorie* zu analogen Resultaten gelangen. Die in ihr auftretende Wirkungsgröße $\int \mathfrak{L}\, dx$ ist eine Invariante nicht nur gegenüber linearen, sondern beliebigen Transformationen; denn $\mathfrak{L}$ ist rein algebraisch (ohne Tensoranalysis) zusammengesetzt aus den Komponenten φ_i eines kovarianten Vektors (des elektromagnetischen Potentials), den Komponenten F_{ik} eines linearen Tensors 2. Stufe (des elektromagnetischen Feldes) und den Komponenten g_{ik} des metrischen Fundamentaltensors. Wir setzen das totale Differential dieser Funktion

$$(16) \qquad \delta \mathfrak{L} = \tfrac{1}{2} \mathfrak{T}^{ik} \delta g_{ik} + \delta_0 \mathfrak{L}, \qquad \delta_0 \mathfrak{L} = \tfrac{1}{2} \mathfrak{H}^{ik} \delta F_{ik} + \mathfrak{s}^i \delta \varphi_i$$
$$(\mathfrak{T}^{ki} = \mathfrak{T}^{ik}, \qquad \mathfrak{H}^{ki} = -\mathfrak{H}^{ik})$$

und bezeichnen alsdann die Tensordichte $\mathfrak{T}_i^k$ als Energie oder Materie. Wir bringen dadurch nur wiederum zum Ausdruck, daß sich das metrische Feld (mit den Potentialen g_{ik}) zu der Materie ($\mathfrak{T}^{ik}$) ebenso verhält wie das elektromagnetische Feld (mit den Potentialen φ_i) zum elektrischen Strom ($\mathfrak{s}^i$). Wir haben aber jetzt die Verpflichtung, nachzuweisen, daß die gegenwärtige Erklärung genau zu den in § 26, (64) angegebenen Ausdrücken für Energie und Impuls führt; damit wird dann auch der damals noch schuldig gebliebene Beweis für die Symmetrie des Energietensors erbracht. Wir können nun hier nicht mehr, wie es oben im besonderen Falle der Maxwellschen Theorie geschah, das Geforderte durch direkte Rechnung erreichen, sondern bedienen uns dazu der folgenden schönen Überlegung, deren Keime bei Lagrange zu finden sind, die aber in vollkommenster Form von F. Klein auseinandergesetzt wurde [5]).

Mit dem Weltkontinuum nehmen wir eine infinitesimale Deformation vor, durch welche allgemein der Punkt (x_i) in den Punkt $(\bar{x}_i)$ übergeht:

$$(17) \qquad \bar{x}_i = x_i + \varepsilon \cdot \xi^i(x_0 x_1 x_2 x_3)$$

(ε ist der konstante infinitesimale Parameter, dessen höhere Potenzen in allen Rechnungen zu streichen sind). Wir stellen uns vor, daß die Zustandsgrößen von der Deformation mitgenommen werden, so daß also nach Ausführung der Deformation die neuen φ_i (wir nennen sie $\bar{\varphi}_i$) solche Funktionen der Koordinaten sind, daß zufolge (17) die Gleichung besteht:

$$(18) \qquad \varphi_i(x)\, dx_i = \bar{\varphi}_i(\bar{x})\, d\bar{x}_i$$

und im gleichen Sinne auch die symmetrische und schiefsymmetrische bilineare Differentialform mit den Koeffizienten g_{ik}, bzw. F_{ik} ungeändert bleibt. Die Änderungen $\bar{\varphi}_i(x) - \varphi_i(x)$, welche die Größen φ_i an einer festen Weltstelle (x_i) durch die Deformation erfahren, bezeichnen wir mit $\delta \varphi_i$; entsprechende Bedeutung haben δg_{ik} und δF_{ik}. Setzen wir in die

Funktion $\mathfrak{L}$ an Stelle der alten Größen φ_i usw. die durch die Deformation daraus entstandenen $\overline{\varphi}_i \ldots$ ein, so möge die Funktion $\overline{\mathfrak{L}} = \mathfrak{L} + \delta\mathfrak{L}$ hervorgehen; dabei ist $\delta\mathfrak{L}$ durch (16) gegeben. Ferner sei $\mathfrak{X}$ ein beliebiges Weltgebiet, das durch die Deformation in $\overline{\mathfrak{X}}$ übergeht. Durch die Deformation erleidet die Wirkungsgröße

$$\int_{\mathfrak{X}} \mathfrak{L}\, dx \text{ eine Änderung } \delta' \int_{\mathfrak{X}} \mathfrak{L}\, dx$$

gleich dem Unterschied des Integrals von $\overline{\mathfrak{L}}$ über $\overline{\mathfrak{X}}$ und des Integrals von $\mathfrak{L}$ über $\mathfrak{X}$. Daß die Wirkungsgröße eine Invariante ist, drückt sich in der Gleichung aus:

$$\delta' \int_{\mathfrak{X}} \mathfrak{L}\, dx = 0\,. \tag{19}$$

Jene Differenz zerlegen wir natürlicherweise in zwei Teile: 1) die Differenz des Integrals von $\overline{\mathfrak{L}}$ und $\mathfrak{L}$ über $\overline{\mathfrak{X}}$, 2) die Differenz des Integrals von $\mathfrak{L}$ über $\overline{\mathfrak{X}}$ und $\mathfrak{X}$. Für den ersten Teil können wir, da $\overline{\mathfrak{X}}$ nur infinitesimal von $\mathfrak{X}$ verschieden ist, setzen

$$\delta \int_{\mathfrak{X}} \mathfrak{L}\, dx = \int_{\mathfrak{X}} \delta \mathfrak{L}\, dx\,,$$

der zweite ist auf S. 100 zu

$$\varepsilon \cdot \int_{\mathfrak{X}} \frac{\partial (\mathfrak{L} \xi^i)}{\partial x_i}\, dx$$

bestimmt worden.

Um die Betrachtung durchzuführen, müssen wir jetzt zunächst die Variationen $\delta\varphi_i$, δg_{ik}, δF_{ik} berechnen. Wenn wir einen Augenblick $\overline{\varphi}_i(\overline{x}) - \varphi_i(x) = \delta' \varphi_i$ setzen, gilt wegen (18):

$$\delta' \varphi_i \cdot dx_i + \varepsilon \varphi_r\, d\xi^r = 0\,, \quad \text{also}$$

$$\delta' \varphi_i = -\varepsilon \cdot \varphi_r \frac{\partial \xi^r}{\partial x_i}\,,$$

und da

$$\delta \varphi_i = \delta' \varphi_i - \{\overline{\varphi}_i(\overline{x}) - \overline{\varphi}_i(x)\} = \delta' \varphi_i - \varepsilon \cdot \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_r} \xi^r$$

ist, mit Unterdrückung des selbstverständlichen Faktors ε:

$$-\delta \varphi_i = \varphi_r \frac{\partial \xi^r}{\partial x_i} + \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_r} \xi^r\,. \tag{20}$$

Ebenso kommt

$$-\delta g_{ik} = g_{ir} \frac{\partial \xi^r}{\partial x_k} + g_{rk} \frac{\partial \xi^r}{\partial x_i} + \frac{\partial g_{ik}}{\partial x_r} \xi^r\,, \tag{20'}$$

$$-\delta F_{ik} = F_{ir} \frac{\partial \xi^r}{\partial x_k} + F_{rk} \frac{\partial \xi^r}{\partial x_i} + \frac{\partial F_{ik}}{\partial x_r} \xi^r\,. \tag{20''}$$

Dabei ist

$$\text{wegen } F_{ik} = \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_k} - \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_i} \text{ auch } (21)\ \delta F_{ik} = \frac{\partial(\delta\varphi_i)}{\partial x_k} - \frac{\partial(\delta\varphi_k)}{\partial x_i};$$

denn weil die erste Relation invarianter Natur ist, folgt aus ihr

$$\bar{F}_{ik}(\bar{x}) = \frac{\partial \bar{\varphi}_i(\bar{x})}{\partial \bar{x}_k} - \frac{\partial \bar{\varphi}_k(\bar{x})}{\partial \bar{x}_i}, \text{ also auch } \bar{F}_{ik}(x) = \frac{\partial \bar{\varphi}_i(x)}{\partial x_k} - \frac{\partial \bar{\varphi}_k(x)}{\partial x_i}.$$

Durch Einsetzen findet man

$$-\delta\mathfrak{L} = (\mathfrak{T}_i^k + \mathfrak{H}^{rk} F_{ri} + \mathfrak{s}^k \varphi_i)\frac{\partial \xi^i}{\partial x_k} + (\tfrac{1}{2}\mathfrak{T}^{\alpha\beta}\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x_i} + +)\xi^i.$$

Beseitigen wir die Ableitungen der ξ^i durch partielle Integration und setzen zur Abkürzung

$$\mathfrak{V}_i^k = \mathfrak{T}_i^k + F_{ir}\mathfrak{H}^{kr} + \varphi_i \mathfrak{s}^k - \delta_i^k \mathfrak{L}$$

so erhalten wir eine Formel von folgender Gestalt:

$$(22) \qquad -\delta'\int_{\mathfrak{X}} \mathfrak{L}\,dx = \int_{\mathfrak{X}} \frac{\partial(\mathfrak{V}_i^k \xi^i)}{\partial x_k}\,dx + \int_{\mathfrak{X}} (\mathfrak{t}_i \xi^i)\,dx = 0.$$

Nun folgt daraus zunächst in bekannter Weise, wenn wir die ξ^i geeignet wählen, und zwar so, daß sie außerhalb eines endlichen Gebiets verschwinden, und für $\mathfrak{X}$ eben dieses Gebiet wählen: daß an jeder Stelle

$$(23) \qquad \mathfrak{t}_i = 0$$

ist. Mithin ist in (22) auch der erste Summand $= 0$; die so entstandene Identität gilt für beliebige Größen ξ^i und jedes endliche Integrationsgebiet $\mathfrak{X}$. Also muß, da das Integral einer stetigen Funktion über *jedes* Gebiet nur dann verschwindet, wenn die Funktion selber $= 0$ ist,

$$\frac{\partial(\mathfrak{V}_i^k \xi^i)}{\partial x_k} = \mathfrak{V}_i^k \frac{\partial \xi^i}{\partial x_k} + \frac{\partial \mathfrak{V}_i^k}{\partial x_k}\xi^i = 0$$

sein. Hier können nun an einer Stelle ξ^i und $\frac{\partial \xi^i}{\partial x_k}$ beliebige Werte annehmen; infolgedessen ist

$$\mathfrak{V}_i^k = 0, \quad \left(\frac{\partial \mathfrak{V}_i^k}{\partial x_k} = 0\right).$$

Damit sind wir zu dem gewünschten Resultat gelangt:

$$\mathfrak{T}_i^k = \mathfrak{L}\delta_i^k - F_{ir}\mathfrak{H}^{kr} - \varphi_i \mathfrak{s}^k.$$

Diese Überlegung liefert uns aber zugleich *die Erhaltungssätze für Energie und Impuls*, die wir in § 26 durch Rechnung gefunden hatten: sie sind in den Gleichungen (23) enthalten. Für die Änderung der Wirkungsgröße der ganzen Welt bei einer, außerhalb eines endlichen Weltgebiets verschwindenden, unendlichkleinen Deformation finden wir

$$(24) \qquad \int \delta\mathfrak{L}\,dx = \int \tfrac{1}{2}\mathfrak{T}^{ik}\delta g_{ik}\,dx + \int \delta_0 \mathfrak{L}\,dx = 0.$$

Hier fällt infolge der Gleichungen (21) und *der Gültigkeit des Hamiltonschen Prinzips*

$$(25) \qquad \int \delta_0 \mathfrak{L}\, dx = 0$$

(den Maxwellschen Gleichungen) der zweite Teil weg; der erste aber ist, wie wir schon oben berechnet haben,

$$= -\int\left(\mathfrak{T}_i^k \frac{\partial \xi^i}{\partial x^k} + \frac{1}{2}\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x_i}\mathfrak{T}^{\alpha\beta}\xi^i\right) dx = \int\left(\frac{\partial \mathfrak{T}_i^k}{\partial x_k} - \frac{1}{2}\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x_i}\mathfrak{T}^{\alpha\beta}\right)\xi^i\, dx\,.$$

So ergeben sich *als eine Folge der Gesetze des elektromagnetischen Feldes die mechanischen Gleichungen*

$$(26) \qquad \frac{\partial \mathfrak{T}_i^k}{\partial x_k} - \frac{1}{2}\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x_i}\mathfrak{T}^{\alpha\beta} = 0.$$

(Wegen des durch die Gravitation bedingten Zusatzgliedes können diese Gleichungen in der allgemeinen Relativitätstheorie nicht mehr gut als Erhaltungssätze bezeichnet werden; die Frage, ob sich wirkliche Erhaltungssätze aufstellen lassen, wird erst in § 33 geprüft werden.)

Aus dem durch *Hinzufügung der Wirkungsgröße des Gravitationsfeldes* ergänzten Hamiltonschen Prinzip

$$(27) \qquad \delta\int(\mathfrak{L} + \mathfrak{G})\, dx = 0,$$

in welchem nun elektromagnetischer *und Gravitations*-Feldzustand unabhängig voneinander virtuellen unendlichkleinen Veränderungen unterworfen werden dürfen, entspringen neben den elektromagnetischen Gesetzen noch die Gravitationsgleichungen (15). Wenden wir die obige zu (26) führende Überlegung auf $\mathfrak{G}$ statt auf $\mathfrak{L}$ an — es gilt ja für die durch unendlichkleine, außerhalb eines endlichen Bezirks verschwindende Deformation des Weltkontinuums bewirkte Variation δ auch hier

$$\delta\int \mathfrak{G}\, dx = \delta\int \tfrac{1}{2} R\sqrt{g}\, dx = 0 \text{ —},$$

so fließen daraus die zu (26) analogen *mathematischen Identitäten*:

$$\frac{\partial [\mathfrak{G}]_i^k}{\partial x_k} - \frac{1}{2}\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x_i}[\mathfrak{G}]^{\alpha\beta} = 0.$$

Der Umstand, daß $\mathfrak{G}$ außer den g_{ik} noch deren Ableitungen enthält, macht dabei gar nichts aus. *Die mechanischen Gleichungen* (26) *sind demnach ebensowohl eine Folge der Gravitationsgleichungen* (15) *wie der elektromagnetischen Feldgesetze.*

Die wunderbaren Zusammenhänge, welche sich hier zeigen, können, unabhängig von der Frage nach der Gültigkeit der Mieschen Elektrodynamik, folgendermaßen formuliert werden. 'Der Zustand eines physikalischen Systems wird relativ zu einem Koordinatensystem beschrieben durch gewisse raumzeitlich variable *Zustandsgrößen* φ (das waren oben

die φ_i). Außer ihnen kommt das durch seine Potentiale g_{ik} zu charakterisierende *metrische Feld* in Betracht, in welches das System eingebettet ist. Die Gesetzmäßigkeit der Vorgänge im System wird beherrscht von einer *Integralinvariante* $\int \mathfrak{L}\,dx$; die skalare Dichte $\mathfrak{L}$ ist dabei eine Funktion der φ und ihrer Ableitung 1., eventuell höherer Ordnung; außerdem der g_{ik}, doch gehen nur diese Größen selber, nicht auch ihre Ableitungen in $\mathfrak{L}$ ein. Wir bilden das totale Differential der Funktion $\mathfrak{L}$, wobei wir nur denjenigen Teil explizite hinschreiben, welcher die Differentiale δg_{ik} enthält:

$$\delta \mathfrak{L} = \tfrac{1}{2}\mathfrak{T}^{ik}\delta g_{ik} + \delta_0 \mathfrak{L}\,.$$

Dann ist $\mathfrak{T}_i^k$ die Tensordichte der mit dem physikalischen Zustand des Systems verknüpften *Energie* (*Materie*). Die Bestimmung ihrer Komponenten ist damit ein für allemal auf die Bestimmung der Hamiltonschen Funktion $\mathfrak{L}$ zurückgeführt; *nur die allgemeine Relativitätstheorie*, *welche die Variation der Weltmetrik ermöglicht*, *führt zur wahren Definition der Energie.* Die *Zustandsgesetze* ergeben sich aus dem »partiellen« Wirkungsprinzip (25), in welchem nur die Zustandsgrößen φ zu varriieren sind; es fließen daraus so viele Gleichungen her, als Größen φ vorhanden sind. Die hinzutretenden 10 *Gravitationsgleichungen* (15) für die 10 Potentiale g_{ik} ergeben sich, wenn man das partielle zum totalen Wirkungsprinzip (27) erweitert, in welchem nun auch die g_{ik} mitzuvariieren sind. Die *mechanischen Gleichungen* (26) sind sowohl eine Folge der Zustands- wie der Gravitationsgesetze; man könnte sie als die Eliminante aus beiden bezeichnen. In dem System der Zustands- und Gravitationsgesetze sind daher vier überschüssige Gleichungen enthalten. In der Tat muß die allgemeine Lösung vier willkürliche Funktionen enthalten, da die Gleichungen ja zufolge ihrer invarianten Natur das Koordinatensystem der x_i vollständig unbestimmt lassen und mithin durch willkürliche stetige Transformation dieser Koordinaten aus einer Lösung der Gleichungen immer wiederum Lösungen hervorgehen (die aber objektiv denselben Weltverlauf darstellen). Die alte Einteilung in Geometrie, Mechanik und Physik muß in der Einsteinschen Theorie durch die Gegenüberstellung von physikalischem Zustand und metrischem oder Gravitationsfeld ersetzt werden.

Der Vollständigkeit halber kehren wir noch einmal zu dem *Hamiltonschen Prinzip der Maxwell-Lorentzschen Theorie* zurück. Variation der φ_i liefert die elektromagnetischen, Variation der g_{ik} die Gravitationsgesetze. Da die Wirkungsgröße eine Invariante ist, ist die unendlichkleine Änderung, welche an ihr eine infinitesimale Deformation des Weltkontinuums hervorruft, $= 0$; dabei sollen elektromagnetisches und Gravitationsfeld sowie die Weltlinien der Substanzelemente von der Deformation mitgenommen werden. Jene Änderung besteht aus drei Summanden: denjenigen Änderungen, die durch die betreffende Variation des elektromagnetischen und des Gravitationsfeldes und der Substanzbahnen je für sich hervorgebracht werden. Die beiden ersten Bestandteile sind 0 zufolge der

elektromagnetischen und der Gravitationsgesetze; also verschwindet auch der dritte Bestandteil, und es ergeben sich so die mechanischen Gleichungen als eine Folge der beiden eben erwähnten Gesetzesgruppen. Frühere Rechnungen rekapitulierend, können wir diese Herleitung im einzelnen so bewerkstelligen: Aus den Gravitationsgesetzen folgen die Gleichungen (26) oder

$$\mu U_i + u_i M = -\left\{\frac{\partial \mathfrak{S}_i^k}{\partial x_k} - \frac{1}{2}\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x_i}\mathfrak{S}^{\alpha\beta}\right\}; \tag{28}$$

darin ist $\mathfrak{S}_i^k$ die Tensordichte der elektromagnetischen Feldenergie,

$$U_i = \frac{du_i}{ds} - \frac{1}{2}\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x_i}u^\alpha u^\beta$$

und M die linke Seite der Kontinuitätsgleichung der Materie:

$$M = \frac{\partial(\mu u^i)}{\partial x_i}.$$

Zufolge der Maxwellschen Gleichungen ist in (28) die rechte Seite

$$= \mathfrak{p}_i = -F_{ik}\mathfrak{s}^k \quad (\mathfrak{s}^i = \varrho u^i).$$

Multipliziert man darauf (28) mit u^i und summiert nach i, so kommt $M = 0$; und somit sind wir bei der Kontinuitätsgleichung der Materie und den mechanischen Gleichungen in ihrer gewöhnlichen Form angelangt.

Ist jetzt der volle Überblick darüber gewonnen, wie sich die Einsteinschen Gravitationsgesetze in das Gefüge der übrigen physikalischen Gesetze einordnen, so bleibt uns zum Schluß noch die Aufgabe, *den* expliziten Ausdruck der $[\mathfrak{G}]_i^k$ zu berechnen[6]). Die virtuelle Änderung

$$\delta\Gamma_{ik}^r = \delta\left\{\begin{matrix} i\,k \\ r \end{matrix}\right\} = \gamma_{ik}^r$$

der Komponenten des affinen Zusammenhangs ist, wie wir wissen (S. 102), ein Tensor. Benutzen wir an einer Stelle ein geodätisches Koordinatensystem, so ergibt sich aus der Formel für R_{ik} [§ 17, (60)] ohne weiteres

$$\delta R_{ik} = \frac{\partial\gamma_{ik}^r}{\partial x_r} - \frac{\partial\gamma_{ir}^r}{\partial x_k},$$

$$g^{ik}\delta R_{ik} = g^{ik}\frac{\partial\gamma_{ik}^r}{\partial x_r} - g^{ir}\frac{\partial\gamma_{ik}^k}{\partial x_r}.$$

Setzen wir

$$g^{ik}\gamma_{ik}^r - g^{ir}\gamma_{ik}^k = w^r,$$

so ist also

$$g^{ik}\delta R_{ik} = \frac{\partial w^r}{\partial x_r},$$

oder in einem beliebigen Koordinatensystem

$$\delta R = R_{ik}\delta g^{ik} + \frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial(\sqrt{g}\,w^r)}{\partial x_r}.$$

Bei der Integration fällt die Divergenz fort, und wir erhalten daher, weil nach Definition

$$\delta \int R_i^i \sqrt{g}\, dx = \int [\mathfrak{G}]^{ik} \delta g_{ik}\, dx = -\int [\mathfrak{G}]_{ik} \delta g^{ik}\, dx$$

sein soll und die R_{ik} im Riemannschen Raum symmetrisch sind:

$$[\mathfrak{G}]_{ik} = \sqrt{g}\left(\tfrac{1}{2} g_{ik} R - R_{ik}\right) = \tfrac{1}{2} g_{ik} \mathfrak{R} - \mathfrak{R}_{ik},$$
$$[\mathfrak{G}]_i^k = \tfrac{1}{2} \delta_i^k \mathfrak{R} - \mathfrak{R}_i^k .$$

Die Gravitationsgleichungen aber lauten

$$\boxed{\mathfrak{R}_i^k - \tfrac{1}{2} \delta_i^k \mathfrak{R} = \mathfrak{T}_i^k} . \tag{29}$$

Hierbei ist natürlich (genau wie in den elektromagnetischen Gleichungen über die Einheit der Ladung) über die Einheit der Masse in rationeller Weise verfügt. Behalten wir die Einheiten des *CGS*-Systems bei, so wird rechts eine universelle Konstante $8\pi\varkappa$ als Faktor hinzuzufügen sein. Es könnte von vornherein noch zweifelhaft sein, ob $\varkappa$ positiv oder negativ ist, und ob nicht in den Gleichungen (29) die rechte Seite mit dem entgegengesetzten Vorzeichen zu versehen ist. $\varkappa$ wird sich aber im nächsten Paragraphen auf Grund der Erfahrung, daß Massen sich anziehen und nicht abstoßen, in der Tat als positiv herausstellen. — Man beachte in mathematischer Hinsicht, daß *die exakten Gravitationsgesetze nicht linear* sind; wenn auch linear in den Ableitungen der Feldkomponenten $\left\{ {ik \atop r} \right\}$, so doch nicht in diesen selbst. Verjüngen wir die Gleichungen (29), d. h. setzen $k = i$ und summieren nach i, so kommt $-\mathfrak{R} = \mathfrak{T} = \mathfrak{T}_i^i$; deshalb kann man für (29) auch schreiben

$$\mathfrak{R}_i^k = \mathfrak{T}_i^k - \tfrac{1}{2} \delta_i^k \mathfrak{T} . \tag{30}$$

In der ersten Arbeit, in welcher Einstein, noch nicht geleitet vom Hamiltonschen Prinzip, die Gravitationsgleichungen aufstellte, fehlte rechts das Glied $-\tfrac{1}{2}\delta_i^k \mathfrak{T}$; erst hernach erkannte er, daß es durch den Energie-Impulssatz gefordert wird [7]. Der ganze hier dargestellte, vom Hamiltonschen Prinzip beherrschte Zusammenhang ist erst in weiteren Arbeiten von H. A. Lorentz, Hilbert, Einstein, Klein und dem Verf. zutage getreten [8].

Für das Folgende ist auch noch die Berechnung von $\mathfrak{G}$ erwünscht. Um durch partielle Integration (Abspaltung einer Divergenz)

$$\int R \sqrt{g}\, dx \quad \text{in} \quad 2\int \mathfrak{G}\, dx$$

zu verwandeln, hat man zu setzen

$$\sqrt{g}\, g^{ik} \frac{\partial}{\partial x_r} \left\{ {ik \atop r} \right\} = \frac{\partial}{\partial x_r}\left(\sqrt{g}\, g^{ik} \left\{ {ik \atop r} \right\}\right) - \left\{ {ik \atop r} \right\} \frac{\partial}{\partial x_r}\left(\sqrt{g}\, g^{ik}\right),$$
$$\sqrt{g}\, g^{ik} \frac{\partial}{\partial x_k} \left\{ {ir \atop r} \right\} = \frac{\partial}{\partial x_k}\left(\sqrt{g}\, g^{ik} \left\{ {ir \atop r} \right\}\right) - \left\{ {ir \atop r} \right\} \frac{\partial}{\partial x_k}\left(\sqrt{g}\, g^{ik}\right);$$

also ist

$$2\mathfrak{G}=\left\{{is \atop s}\right\}\frac{\partial}{\partial x_k}(\sqrt{g}\,g^{ik})-\left\{{ik \atop r}\right\}\frac{\partial}{\partial x_r}(\sqrt{g}\,g^{ik})+\left(\left\{{ik \atop r}\right\}\left\{{rs \atop s}\right\}-\left\{{ir \atop s}\right\}\left\{{ks \atop r}\right\}\right)\sqrt{g}\,g^{ik}.$$

Nach § 17 (57′), (57″) sind aber die beiden ersten Glieder rechts, unter Fortlassung des Faktors $\sqrt{g}$,

$$= -\left\{{is \atop s}\right\}\left\{{kr \atop i}\right\}g^{kr} + 2\left\{{ik \atop r}\right\}\left\{{rs \atop i}\right\}g^{sk} - \left\{{ik \atop r}\right\}\left\{{rs \atop s}\right\}g^{ik}$$

$$=\left(-\left\{{rs \atop s}\right\}\left\{{ik \atop r}\right\} + 2\left\{{sk \atop r}\right\}\left\{{ri \atop s}\right\} - \left\{{ik \atop r}\right\}\left\{{rs \atop s}\right\}\right)g^{ik}$$

$$= 2g^{ik}\left(\left\{{ir \atop s}\right\}\left\{{ks \atop r}\right\} - \left\{{ik \atop r}\right\}\left\{{rs \atop s}\right\}\right).$$

Mithin kommt schließlich

$$\frac{1}{\sqrt{g}}\mathfrak{G} = \tfrac{1}{2}g^{ik}\left(\left\{{ir \atop s}\right\}\left\{{ks \atop r}\right\} - \left\{{ik \atop r}\right\}\left\{{rs \atop s}\right\}\right). \tag{31}$$

Damit haben wir die Grundlagen der Einsteinschen Gravitationstheorie entwickelt. Jetzt fragt es sich, ob die Erfahrung diese rein spekulativ gewonnene Theorie bestätigt, vor allem, ob die Planetenbewegung aus ihr ebensogut (oder noch besser) wie aus dem Newtonschen Attraktionsgesetz erklärt werden kann. §§ 29—32 handeln von der Lösung der Gravitationsgleichungen; die Weiterführung der allgemeinen Theorie wird erst im § 33 wieder aufgenommen.

§ 29. Statisches Gravitationsfeld. *Zusammenhang mit der Erfahrung.*

Um den Zusammenhang mit den am Planetensystem gewonnenen Erfahrungen herzustellen, spezialisieren wir zunächst die Einsteinschen Gesetze auf den Fall des statischen Gravitationsfeldes [9]). Dieser ist dadurch charakterisiert, daß bei Benutzung geeigneter Koordinaten die Welt sich in Raum und Zeit zerspaltet, daß also für die metrische Grundform

$$ds^2 = f^2\,dt^2 - d\sigma^2, \quad d\sigma^2 = \sum_{i,k=1}^{3}\gamma_{ik}\,dx_i\,dx_k$$

gilt:

$$g_{00} = f^2; \quad g_{0i} = g_{i0} = 0; \quad g_{ik} = -\gamma_{ik} \quad (i, k = 1, 2, 3);$$

und daß dabei die auftretenden Koeffizienten f, γ_{ik} nur von den Raumkoordinaten $x_1 x_2 x_3$, nicht von der Zeit $t = x_0$ abhängen. $d\sigma^2$ ist eine positiv-definite quadratische Differentialform, welche die Metrik des Raumes mit den Koordinaten $x_1 x_2 x_3$ bestimmt; f ist offenbar die Lichtgeschwindigkeit. Das Maß t der Zeit ist (nach Wahl der Zeiteinheit) durch die aufgestellten Forderungen vollständig festgelegt, die Raumkoordinaten $x_1 x_2 x_3$ hingegen nur bis auf eine beliebige stetige Transformation dieser drei Koordinaten untereinander. Im statischen Fall liefert die Weltmetrik also außer der Maßbestimmung des Raumes noch ein Skalarfeld f im Raum.

Bezeichnen wir die auf die ternäre Form $d\sigma^2$ bezüglichen Christoffelschen Dreiindizes-Symbole durch einen angehängten * und durchlaufen die Indexbuchstaben i, k, l bloß die Ziffern 1, 2, 3, so folgt aus der Definition leicht:

$$\begin{Bmatrix} i\,k \\ l \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} i\,k \\ l \end{Bmatrix}^*;$$

$$\begin{Bmatrix} i\,k \\ 0 \end{Bmatrix} = 0, \qquad \begin{Bmatrix} 0\,i \\ k \end{Bmatrix} = 0, \qquad \begin{Bmatrix} 0\,0 \\ 0 \end{Bmatrix} = 0;$$

$$\begin{Bmatrix} i\,0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \frac{f_i}{f}, \qquad \begin{Bmatrix} 0\,0 \\ i \end{Bmatrix} = f f^i.$$

Darin sind $f_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}$ die kovarianten Komponenten des dreidimensionalen Gradienten, $f^i = \gamma^{ik} f_k$ die zugehörigen kontravarianten; $\sqrt{\gamma} f^i = \mathfrak{f}^i$ sind die Komponenten einer kontravarianten Vektordichte im Raum. Für die Determinante γ der γ_{ik} gilt $\sqrt{g} = f\sqrt{\gamma}$. Setzen wir ferner

$$f_{ik} = \frac{\partial f_i}{\partial x_k} - \begin{Bmatrix} i\,k \\ r \end{Bmatrix}^* f_r = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_k} - \begin{Bmatrix} i\,k \\ r \end{Bmatrix}^* \frac{\partial f}{\partial x_r}$$

(auch der Summationsbuchstabe r durchläuft nur die drei Ziffern 1, 2, 3) und

$$\Delta f = \frac{\partial \mathfrak{f}^i}{\partial x_i} \qquad (\Delta f = \sqrt{\gamma}\cdot f_i^i),$$

so erhalten wir zwischen den Komponenten R_{ik} und P_{ik} des Krümmungstensors 2. Stufe, der zur quadratischen Fundamentalform ds^2 bzw. $d\sigma^2$ gehört, durch eine einfache Rechnung die Beziehungen:

$$R_{ik} = \mathsf{P}_{ik} - \frac{f_{ik}}{f};$$

$$R_{i0} = R_{0i} = 0;$$

$$R_{00} = f \cdot \frac{\Delta f}{\sqrt{\gamma}} \qquad (\mathfrak{R}_0^0 = \Delta f).$$

Für ruhende inkohärente (nicht durch Spannungen aufeinander einwirkende) Materie ist $\mathfrak{T}_0^0 = \mu$ die einzige von 0 verschiedene Komponente der tensoriellen Energiedichte; es ist daher auch $\mathfrak{T} = \mu$. Ruhende Materie erzeugt ein statisches Gravitationsfeld. Von den Gravitationsgleichungen (30) interessiert uns nur die $\binom{0}{0}^{\text{te}}$; sie liefert

$$\Delta f = \tfrac{1}{2}\mu \tag{32}$$

oder mit Hinzufügung des konstanten Proportionalitätsfaktors $8\pi\varkappa$:

$$\Delta f = 4\pi\varkappa\mu. \tag{32'}$$

Nehmen wir an, daß ds^2 (bei geeigneter Wahl der Raumkoordinaten $x_1 x_2 x_3$) unendlich wenig von

$$c^2 dt^2 - (dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2) \tag{33}$$

abweicht — dazu müssen die das Gravitationsfeld erzeugenden Massen unendlich schwach sein —, so ergibt sich, wenn wir

$$f = c + \frac{\Phi}{c} \tag{34}$$

setzen (Φ unendlich klein):

$$\Delta\Phi \equiv \frac{\partial^2\Phi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial x_3^2} = 4\pi\varkappa c\mu\,, \tag{10}$$

und μ ist das c-fache der Massendichte in den gewöhnlichen Maßeinheiten. Tatsächlich trifft diese Annahme nach allen unsern geometrischen Erfahrungen innerhalb des Planetensystems mit großer Annäherung zu.

Da die Massen der Planeten gegenüber der felderzeugenden, als ruhend zu betrachtenden Sonnenmasse sehr klein sind, können wir jene wie »Probekörper«, die in das Gravitationsfeld der Sonne eingebettet sind, behandeln. Die Bewegung eines jeden von ihnen ist dann (von den gegenseitigen Störungen abgesehen) durch eine geodätische Weltlinie in diesem statischen Gravitationsfeld gegeben. Sie genügt als solche dem Variationsprinzip

$$\delta\int ds = 0,$$

wobei die Enden des betreffenden Weltlinienstücks fest bleiben. Im statischen Falle ergibt sich dafür

$$\delta\int\sqrt{f^2 - v^2}\,dt = 0\,,$$

wo

$$v^2 = \left(\frac{d\sigma}{dt}\right)^2 = \sum_{i,k=1}^{3}\gamma_{ik}\frac{dx_i}{dt}\frac{dx_k}{dt}$$

das Quadrat der Geschwindigkeit ist. Dies ist ein Variationsprinzip von derselben Form wie das der klassischen Mechanik; als »Lagrangesche Funktion« tritt

$$L = \sqrt{f^2 - v^2}$$

auf. Machen wir die gleiche Annäherung wie soeben und bedenken noch, daß bei unendlich schwachem Gravitationsfeld auch die auftretenden Geschwindigkeiten unendlich klein (gegenüber c) sein werden, so ist

$$\sqrt{f^2 - v^2} = \sqrt{c^2 + 2\Phi - v^2} = c + \frac{1}{c}\left(\Phi - \tfrac{1}{2}v^2\right),$$

und da jetzt

$$v^2 = \sum_{i=1}^{3}\left(\frac{dx_i}{dt}\right)^2 = \sum_i \dot{x}_i^2$$

gesetzt werden darf, ergibt sich

$$\delta\int\left\{\tfrac{1}{2}\sum_i \dot{x}_i^2 - \Phi\right\}dt = 0\,;$$

d. h. der Planet von der Masse m bewegt sich nach den Gesetzen der klassischen Mechanik, wenn man annimmt, daß eine Kraft mit dem

Potential $m\Phi$ auf ihn einwirkt. *Damit ist der vollständige Anschluß an die Newtonsche Theorie erreicht:* Φ ist das Newtonsche Potential, das der Poissonschen Gleichung (10) genügt, $k = c^2\varkappa$ die Newtonsche Gravitationskonstante. Für $8\pi\varkappa$ ergibt sich aus dem bekannten numerischen Wert der Newtonschen Konstante k der Zahlwert

$$8\pi\varkappa = \frac{8\pi k}{c^2} = 1{,}87 \cdot 10^{-27}\,\mathrm{cm} \cdot \mathrm{gr}^{-1}\,.$$

Die Abweichung der metrischen Fundamentalform von der »Euklidischen« (33) ist also immerhin so beträchtlich, daß sich die geodätischen Weltlinien in dem Maße, wie die Planetenbewegung es zeigt, von der geradlinig-gleichförmigen Bewegung unterscheiden — obwohl die im Raume gültige, auf $d\sigma^2$ beruhende Geometrie in den Abmessungen des Planetensystems nur ganz unerheblich von der Euklidischen abweicht (die Winkelsumme in einem geodätischen Dreieck von diesen Abmessungen ist nur sehr wenig von 180^0 verschieden). Es liegt das vor allem daran, daß der Radius der Erdbahn etwa 8 Lichtminuten beträgt, die Dauer des Erdumlaufs hingegen ein ganzes Jahr!

Wir wollen die exakte Theorie der Bewegung eines Massenpunktes und der Lichtstrahlen im statischen Gravitationsfeld noch etwas weiter verfolgen[10]). Die geodätischen Weltlinien können nach § 17 durch die beiden Variationsprinzipe

$$(35) \qquad \delta\int\sqrt{Q}\,ds = 0 \quad \text{oder} \quad \delta\int Q\,ds = 0\,, \qquad Q = g_{ik}\frac{dx_i}{ds}\frac{dx_k}{ds}$$

gekennzeichnet werden. Das zweite setzt voraus, daß der Parameter s in geeigneter Weise gewählt ist. Für die »Nullinien«, die der Bedingung $Q = 0$ genügen und das Fortschreiten eines Lichtsignals angeben, kommt nur das zweite in Betracht. Die Variation muß so vorgenommen werden, daß die Enden des betrachteten Weltlinienstücks ungeändert bleiben. Unterwerfen wir nur $x_0 = t$ einer Variation, so ist im statischen Fall

$$(36) \qquad \delta\int Q\,ds = \left[2f^2\frac{dx_0}{ds}\delta x_0\right] - 2\int\frac{d}{ds}\left(f^2\frac{dx_0}{ds}\right)\delta x_0\,ds\,.$$

Also gilt

$$f^2\frac{dx_0}{ds} = \text{konst.}$$

Bleiben wir zunächst beim Fall des Lichtstrahls stehen, so können wir, indem wir die Maßeinheit des Parameters s geeignet wählen — bis auf eine willkürliche Maßeinheit ist s durch das Variationsprinzip selbst normiert —, die rechts auftretende konst. = 1 machen. Nehmen wir jetzt die Variation allgemeiner so vor, daß wir die räumliche Bahnkurve des Strahles unter Festhaltung der Enden abändern, hinsichtlich der Zeit aber die Nebenbedingung, daß für die Enden $\delta x_0 = 0$ sein soll, fallen lassen, so lautet das Prinzip, wie aus (36) hervorgeht,

$$\delta\int Q\,ds = 2[\delta t] = 2\,\delta\int dt\,.$$

Wird die variierte Bahn insbesondere gleichfalls wie die ursprüngliche mit Lichtgeschwindigkeit durchlaufen, so gilt auch für die variierte Weltlinie

$$Q = 0, \qquad d\sigma = f\,dt,$$

und wir erhalten dann

$$\delta \int dt = \delta \int \frac{d\sigma}{f} = 0. \tag{37}$$

Durch diese Gleichung wird nur die räumliche Lage des Lichtstrahls festgelegt; sie ist nichts anderes als das *Fermatsche Prinzip der raschesten Ankunft.* In der letzten Formulierung ist die Zeit ganz eliminiert; sie gilt für ein beliebiges Stück der Bahn des Lichtstrahls, wenn dieses im Raum irgendwie unter Festhaltung seiner Enden unendlich wenig verlagert wird.

Benutzt man für ein statisches Gravitationsfeld irgendwelche Raumkoordinaten $x_1 x_2 x_3$, so kann man sich zur graphischen Darstellung eines Euklidischen Bildraums bedienen, indem man den Punkt mit den Koordinaten $x_1 x_2 x_3$ durch einen Bildpunkt mit den Cartesischen Koordinaten $x_1 x_2 x_3$ zur Darstellung bringt. Trägt man in diesen Bildraum den Ort zweier ruhender Sterne S_1, S_2 und eines ruhenden Beobachters B ein, so ist der Winkel, unter welchem die Sterne dem Beobachter erscheinen, nicht gleich dem Winkel der geraden Verbindungslinien BS_1, BS_2, sondern man muß B mit S_1, S_2 durch die aus (37) sich ergebenden gekrümmten Linien kürzester Ankunft verbinden und den Winkel, den diese in B miteinander bilden, durch eine weitere Hilfskonstruktion vom Euklidischen Maß auf das durch die metrische Grundform $d\sigma^2$ bestimmte Riemannsche Maß [vgl. § 11, Formel (15)] transformieren. Die so berechneten Winkel sind es, welche die anschaulich erfaßte Lage der Gestirne zueinander bestimmen, sie sind es, die an dem Teilkreis des Beobachtungsinstrumentes abgelesen werden. Während B, S_1, S_2 unverrückt ihre Stelle im Raum behalten, kann dieser $\sphericalangle S_1 B S_2$ sich ändern, wenn große Massen in die Nähe des Strahlengangs gelangen. In dem erörterten Sinne ist die Behauptung zu verstehen, daß *durch das Gravitationsfeld die Lichtstrahlen gekrümmt werden.* Doch sind die Strahlen nicht, wie wir in § 12 zu vorläufiger Orientierung angenommen hatten, geodätische Linien in dem Raum mit der metrischen Grundform $d\sigma^2$, sie machen nicht das Integral $\int d\sigma$, sondern das Integral

$$\int \frac{d\sigma}{f}$$

zum Extremum. Die Krümmung der Lichtstrahlen findet insbesondere in dem Gravitationsfeld der Sonne statt. Legen wir der graphischen Darstellung Koordinaten $x_1 x_2 x_3$ zugrunde, für welche im Unendlichen die Euklidische Formel

$$d\sigma^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2$$

gilt, so ergibt die numerische Rechnung für einen unmittelbar an der Sonne vorübergehenden Lichtstrahl eine Ablenkung von 1.″74 (siehe § 31).

Das bedeutet eine durchaus meßbare Verrückung des Orts von Fixsternen, die in nächster Nähe der Sonne stehen. Solche Sternorte können natürlich nur während einer totalen Sonnenfinsternis beobachtet werden. Die in Betracht kommenden Sterne müssen hinreichend hell sein, möglichst zahlreich, so nahe an der Sonne, daß der Effekt einen merklichen Betrag besitzt und doch weit genug vom Sonnenrand entfernt, um nicht von der Korona überstrahlt zu werden. Der günstigste Tag dafür ist der 29. Mai; und ein glücklicher Zufall wollte es, daß am 29. Mai 1919 eine totale Sonnenfinsternis stattfand. Zwei englische Expeditionen wurden in die Totalitätszone zur Feststellung der Einsteinschen Strahlenablenkung entsandt, die eine nach Sobral in Nordbrasilien, die andere nach der Insel Principe im Golf von Guinea. Die Erscheinung in der vorausgesagten Größe wurde bestätigt; die endgültigen Meßresultate ergaben für Sobral 1ʺ.98 ± 0ʺ.12, für Principe 1ʺ.61 ± 0ʺ.30[11]).

Ein anderer, durch die Einsteinsche Gravitationstheorie geforderter optischer Effekt im statischen Feld, der unter günstigen Umständen vielleicht gerade noch der Beobachtung zugänglich ist, beruht auf dem an einer festen Raumstelle zwischen der kosmischen Zeit dt und der Eigenzeit ds bestehenden Zusammenhang

$$ds = f\,dt\,.$$

Sind zwei ruhende Natriumatome objektiv einander gleich, so muß der Vorgang in ihnen, der zu den optischen Wellen der D-Linie Anlaß gibt, in beiden die gleiche Frequenz, gemessen in *Eigenzeit*, besitzen. Zwischen den Frequenzen ν_1, ν_2 in kosmischer Zeit besteht daher, wenn f an den betreffenden Stellen, an denen sich die Atome befinden, die Werte f_1, f_2 hat, der Zusammenhang

$$\frac{\nu_1}{f_1} = \frac{\nu_2}{f_2}\,.$$

Die von einem Atom ausgehenden Lichtwellen haben aber natürlich in dem ganzen Raum, in *kosmischer* Zeit gemessen, überall die gleiche Frequenz (denn in einem *statischen* metrischen Felde haben die Maxwellschen Gleichungen eine Lösung, für welche die Abhängigkeit von der Zeit durch den Ausdruck $e^{i\nu t}$ mit einer beliebigen *konstanten* Frequenz ν gegeben wird). Indem man also das Licht der Natrium-D-Linie, das von einem Stern großer Masse herkommt, mit dem von einer irdischen ausgesandten in demselben Spektroskop vergleicht, muß jene Linie gegenüber dieser eine kleine Verschiebung nach dem Rot hin zeigen, da f in der Nähe großer Massen einen etwas kleineren Wert besitzt als fern von ihnen. Das Verhältnis, in welchem die Frequenz herabgedrückt wird, hat nach unserer Näherungsformel (34) in der Entfernung r von einer Masse m_0 den Wert $1 - \frac{\varkappa m_0}{r}$. An der Oberfläche der Sonne macht das für eine Linie im Blau von der Wellenlänge 4000 Å eine Verschiebung um 0.008 Å aus. Das liegt an der Grenze des Beobachtbaren; es kommen

hinzu: die Vermischung mit dem Dopplereffekt, die Unsicherheit des irdischen Vergleichsmaterials und gewisse unregelmäßig schwankende Verschiebungen der Sonnenlinien, deren Ursachen nur teilweise aufgeklärt sind; endlich die gegenseitige Störung der dicht gedrängten Sonnenlinien durch Überlagerung ihrer Intensitäten (wodurch unter Umständen zwei Linien zu einer einzigen, mit einem einzigen Intensitätsmaximum, verschmelzen können). Berücksichtigt man dies, so scheint das vorliegende Beobachtungsmaterial[12]) eine Rotverschiebung von dem angegebenen Betrage im ganzen zu bestätigen. Aber die Frage kann noch nicht als vollständig abgeklärt gelten.

Eine dritte Möglichkeit der Kontrolle durch die Erfahrung ist diese. Nach Einstein ist die Newtonsche Planetentheorie nur eine erste Annäherung; es fragt sich, ob die Abweichungen der strengen Einsteinschen Theorie von dieser groß genug sind, um einen mit unsern heutigen Hilfsmitteln wahrnehmbaren Einfluß hervorzubringen. Offenbar werden in dieser Hinsicht die Chancen für den sonnennächsten Planeten, den Merkur, am günstigsten liegen. In der Tat hat Einstein, indem er die Approximation einen Schritt weiter fortsetzte, und Schwarzschild[13]), indem er in aller Strenge das von einer ruhenden Masse erzeugte kugelsymmetrische Gravitationsfeld und die Bahnkurve eines Massenpunktes von unendlichkleiner Masse in diesem Felde bestimmte, gefunden, *daß die Bahnellipse des Merkur* (außer den von den übrigen Planeten hervorgebrachten Störungen) *in Richtung der Bahnbewegung eine langsame Drehung erfahren muß, welche pro Jahrhundert 43″ ausmacht.* Seit Leverrier ist ein Betrag von dieser Größe in den säkularen Störungen des Merkurperihels bekannt, der durch die Störungstheorie nicht erklärt werden konnte; es wurden die mannigfachsten Hypothesen ersonnen, um diese Diskrepanz zwischen Theorie und Beobachtung zu beseitigen[14]). — Auf die von Schwarzschild angegebene strenge Lösung kommen wir im übernächsten Paragraphen zurück.

Wir sehen: so radikal die Umwälzung ist, welche die Einsteinsche Gravitationstheorie für unsere Vorstellungen von Raum und Zeit bedeutet, so winzig sind die tatsächlichen Abweichungen, welche sie für die beobachtbaren Erscheinungen mit sich bringt. Die meßbaren unter ihnen haben sich bisher bestätigt. Ihre eigentliche Stütze findet aber die Theorie zweifellos weniger in der Erfahrung als in ihrer eigenen inneren Folgerichtigkeit, durch welche sie der klassischen Mechanik ganz erheblich überlegen ist, und darin, daß sie in einer die Vernunft aufs höchste befriedigenden Weise das Rätsel der Relativität der Bewegung und der Gravitation auf einen Schlag löst.

Nach der gleichen Methode wie für den Lichtstrahl können wir auch für die Bewegung eines Massenpunktes im statischen Gravitationsfeld ein nur die räumliche Bahnkurve betreffendes Minimalprinzip, das dem Fermatschen der kürzesten Ankunft entspricht, aufstellen. Ist der Parameter s die Eigenzeit, so wird

$$(38) \qquad Q = 1, \quad \text{und} \quad f^2 \frac{dt}{ds} = \text{konst.} = \frac{1}{E}$$

ist das Energieintegral. Jetzt benutzen wir das erste der beiden Variationsprinzipe (35) und verallgemeinern es wie oben in der Weise, daß wir die räumliche Bahnkurve unter Festhaltung ihrer Enden, $x_0 = t$ aber ganz beliebig variieren. Es lautet dann

$$(39) \qquad \delta \int \sqrt{Q}\, ds = \left[\frac{1}{E}\, \delta t\right] \doteq \delta \int \frac{dt}{E}\,.$$

Um die Eigenzeit zu eliminieren, dividieren wir die erste der Gleichungen (38) durch die ins Quadrat erhobene zweite; es kommt

$$(40) \qquad \frac{1}{f^4}\left\{f^2 - \left(\frac{d\sigma}{dt}\right)^2\right\} = E^2, \qquad d\sigma = f^2 \sqrt{U}\, dt,$$

wo

$$U = \frac{1}{f^2} - E^2.$$

(40) liefert das Geschwindigkeitsgesetz, nach welchem der Massenpunkt seine Bahn durchmißt. Variieren wir insbesondere so, daß auch die variierte Bahnkurve nach dem gleichen Gesetz mit der gleichen Konstante E durchlaufen wird, so folgt aus (39):

$$\delta \int \frac{dt}{E} = \delta \int \sqrt{f^2 - \left(\frac{d\sigma}{dt}\right)^2}\, dt = \delta \int E f^2\, dt, \qquad \text{d. i.}$$

$$\delta \int f^2\, U\, dt = 0$$

oder schließlich, indem wir dt durch das räumliche Bogenelement $d\sigma$ ausdrücken und so die Zeit ganz eliminieren:

$$\delta \int \sqrt{U}\, d\sigma = 0.$$

Nachdem hieraus die Bahnkurve des Massenpunktes ermittelt ist, ergibt sich der zeitliche Ablauf der in dieser Bahnkurve vonstatten gehenden Bewegung aus (40):

$$dt = \frac{d\sigma}{f^2 \sqrt{U}}\,.$$

Für $E = 0$ kommen wir auf die Gesetze des Lichtstrahls zurück.

§ 30. Gravitationswellen.

Es ist Einstein gelungen[15], unter der Voraussetzung, daß das erzeugende Energiefeld $\mathfrak{T}_i^k$ unendlich schwach ist, die Gravitationsgleichungen allgemein zu integrieren. Die g_{ik} werden unter diesen Umständen bei geeigneter Wahl der Koordinaten sich von konstanten Werten $\overset{\circ}{g}_{ik}$ nur um unendlichkleine Beträge γ_{ik} unterscheiden. Wir betrachten dann die Welt als eine »Euklidische« mit der metrischen Fundamentalform

$$(41) \qquad \overset{\circ}{g}_{ik}\, dx_i\, dx_k$$

und γ_{ik} als die Komponenten eines symmetrischen Tensorfeldes 2. Stufe *in* dieser Welt. Die im folgenden auszuführenden Operationen sind immer solche, denen die metrische Fundamentalform (41) zugrunde liegt; wir befinden uns augenblicklich wieder auf dem Boden der speziellen Relativitätstheorie. Das Koordinatensystem denken wir uns als ein »normales« gewählt, so daß $\overset{\circ}{g}_{ik} = 0$ ist für $i \neq k$ und

$$\overset{\circ}{g}_{00} = 1, \quad \overset{\circ}{g}_{11} = \overset{\circ}{g}_{22} = \overset{\circ}{g}_{33} = -1.$$

x_0 ist die Zeit, $x_1 x_2 x_3$ sind Cartesische Raumkoordinaten; die Lichtgeschwindigkeit ist $= 1$ genommen.

Wir führen die Größen

$$\psi_i^k = \gamma_i^k - \gamma\delta_i^k \qquad (\gamma = \tfrac{1}{2}\gamma_i^i)$$

ein und behaupten zunächst, daß es keine Einschränkung enthält, anzunehmen, es sei

$$\frac{\partial \psi_i^k}{\partial x_k} = 0. \tag{42}$$

Ist dies nämlich nicht von vornherein der Fall, so können wir das gewählte Koordinatensystem unendlich wenig so abändern, daß (42) besteht. Die zum neuen Koordinatensystem $\bar{x}$ hinüberführenden Transformationsformeln

$$\bar{x}_i = x_i + \xi^i(x_0 x_1 x_2 x_3)$$

enthalten die unbekannten Funktionen ξ^i, welche unendlichklein der gleichen Größenordnung sind wie die γ. Wir bekommen neue Koeffizienten $\bar{g}_{ik}$, für die nach früheren Formeln

$$g_{ik}(x) - \bar{g}_{ik}(x) = g_{ir}\frac{\partial \xi^r}{\partial x_k} + g_{kr}\frac{\partial \xi^r}{d x_i} + \frac{\partial g_{ik}}{\partial x_r}\xi^r,$$

ist, also hier

$$\gamma_{ik}(x) - \bar{\gamma}_{ik}(x) = \frac{\partial \xi_i}{\partial x_k} + \frac{\partial \xi_k}{\partial x_i}, \qquad \gamma(x) - \bar{\gamma}(x) = \frac{\partial \xi^i}{\partial x_i} = \Xi,$$

und es kommt

$$\frac{\partial \gamma_i^k}{\partial x_k} - \frac{\partial \bar{\gamma}_i^k}{\partial x_k} = \nabla \xi_i + \frac{\partial \Xi}{\partial x_i}, \qquad \frac{\partial \gamma}{\partial x_i} - \frac{\partial \bar{\gamma}}{\partial x_i} = \frac{\partial \Xi}{\partial x_i}.$$

Dabei bedeutet ∇ für eine beliebige Funktion f den Differentialoperator:

$$\nabla f = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\overset{\circ}{g}{}^{ik}\frac{\partial f}{\partial x_k}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_0^2} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_3^2}\right).$$

Die gewünschte Bedingung wird also im neuen Koordinatensystem realisiert sein, wenn man die ξ^i aus den Gleichungen

$$\nabla \xi_i = \frac{\partial \psi_i^k}{\partial x_k}$$

bestimmt, die sich durch retardierte Potentiale lösen lassen (vgl. Kap. III, S. 148). Dadurch ist dann das Koordinatensystem, wenn man die linearen Lorentz-Transformationen frei gibt, nicht nur bis auf Unendlich-

kleines 1., sondern sogar 2. Ordnung genau festgelegt; es ist sehr bemerkenswert, daß eine solche invariante Normierung möglich ist.

Jetzt berechnen wir die Krümmungskomponenten R_{ik}; da die Feldgrößen $\begin{Bmatrix} ik \\ r \end{Bmatrix}$ unendlichklein sind, kommt hier bei Beschränkung auf die Glieder 1. Ordnung:

$$R_{ik} = \frac{\partial}{\partial x_r}\begin{Bmatrix} ik \\ r \end{Bmatrix} - \frac{\partial}{\partial x_k}\begin{Bmatrix} ir \\ r \end{Bmatrix}.$$

Es ist

$$\begin{bmatrix} ik \\ r \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \gamma_{ir}}{\partial x_k} + \frac{\partial \gamma_{kr}}{\partial x_i} - \frac{\partial \gamma_{ik}}{\partial x_r}\right), \quad \text{also}$$

$$\begin{Bmatrix} ik \\ r \end{Bmatrix} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \gamma_i^r}{\partial x_k} + \frac{\partial \gamma_k^r}{\partial x_i} - \overset{\circ}{g}{}^{rs}\frac{\partial \gamma_{ik}}{\partial x_s}\right).$$

Daraus ergibt sich, wenn wir die Gleichungen (42) oder

$$\frac{\partial \gamma_i^k}{\partial x_k} = \frac{\partial \gamma}{\partial x_i}$$

heranziehen:

$$\frac{\partial}{\partial x_r}\begin{Bmatrix} ik \\ r \end{Bmatrix} = \frac{\partial^2 \gamma}{\partial x_i \partial x_k} - \frac{1}{2}\nabla \gamma_{ik}.$$

Ebenso kommt

$$\frac{\partial}{\partial x_k}\begin{Bmatrix} ir \\ r \end{Bmatrix} = \frac{\partial^2 \gamma}{\partial x_i \partial x_k}.$$

Das Resultat ist

$$R_{ik} = -\frac{1}{2}\nabla \gamma_{ik}.$$

Infolgedessen gilt $R = -\nabla \gamma$ und

$$R_i^k - \frac{1}{2}\delta_i^k R = -\frac{1}{2}\nabla \psi_i^k.$$

Die Gravitationsgleichungen aber lauten

$$\frac{1}{2}\nabla \psi_i^k = -T_i^k, \tag{43}$$

die sich sofort durch retardierte Potentiale integrieren lassen (vgl. S. 148; wir gebrauchen hier dieselben Bezeichnungen):

$$\psi_i^k = -\int \frac{T_i^k(t-r)}{2\pi r}\, dV.$$

Jede Änderung der Materieverteilung bringt demnach eine Gravitationswirkung hervor, die sich im Raum mit Lichtgeschwindigkeit ausbreitet. Schwingende Massen erzeugen Gravitationswellen. Freilich kommen in der von uns zu überblickenden Natur nirgendwo so starke Massenschwingungen vor, daß die daraus resultierenden Gravitationswellen der Beobachtung zugänglich sind.

Die Gleichungen (43) entsprechen vollständig den elektromagnetischen

$$\nabla \varphi^i = s^i,$$

und wie die Potentiale φ^i des elektrischen Feldes der Nebenbedingung $\frac{\partial \varphi^i}{\partial x_i} = 0$ zu genügen haben, weil der Strom s^i diese Beziehung erfüllt:

$$\frac{\partial s^i}{\partial x_i} = 0,$$

so waren hier die Nebenbedingungen (42) für das System der Gravitationspotentiale ψ_i^k einzuführen, weil sie für den Materietensor bestehen:

$$\frac{\partial T_i^k}{\partial x_k} = 0.$$

Im materiefreien Raum können sich *ebene Gravitationswellen* fortpflanzen; diese erhalten wir durch den analogen Ansatz wie in der Optik:

$$\psi_i^k = a_i^k \cdot e^{(\alpha_0 x_0 + \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3)\sqrt{-1}}.$$

Die a_i^k und α_i sind Konstante; die letzteren genügen der Bedingung $\alpha_i \alpha^i = 0$. $\alpha_0 = \nu$ ist die Frequenz der Schwingung, $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 =$ konst. sind die Ebenen konstanter Phase. Die Differentialgleichungen $\nabla \psi_i^k = 0$ sind identisch erfüllt, die Nebenbedingungen (42) verlangen

$$a_i^k \alpha_k = 0. \tag{44}$$

Ist die x_1-Achse die Fortschreitungsrichtung der Welle, so haben wir

$$\alpha_2 = \alpha_3 = 0, \qquad -\alpha_1 = \alpha_0 = \nu,$$

und die Gleichungen (44) besagen

$$a_i^0 = a_i^1 \quad \text{oder} \quad a_{0i} = -a_{1i}. \tag{45}$$

Es genügt demnach, den Raumteil des konstanten symmetrischen Tensors a:

$$\begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{Vmatrix}$$

anzugeben, da die a mit einem Index 0 nach (45) sich aus diesem bestimmen; der Raumteil aber unterliegt keiner Einschränkung. Er spaltet seinerseits nach der Fortschreitungsrichtung der Welle in drei Summanden:

$$\begin{Vmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix} + \begin{Vmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & 0 & 0 \\ a_{31} & 0 & 0 \end{Vmatrix} + \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & a_{32} & a_{33} \end{Vmatrix}.$$

Die Tensorschwingung läßt sich demnach in drei voneinander unabhängige Bestandteile zerspalten: eine longitudinal-longitudinale, eine longitudinal-transversale und eine transversal-transversale Welle.

Von der näherungsweisen Integration der Gravitationsgleichungen hat H. Thirring zwei interessante Anwendungen gemacht[16]. Er hat mit ihrer Hilfe den Einfluß der Rotation einer großen schweren Hohlkugel auf die Bewegung von Massenpunkten in der Nähe des Kugelmittelpunktes untersucht und dabei, wie zu erwarten war, eine Kraftwirkung von der gleichen

Art wie die Zentrifugalkraft festgestellt. Daneben tritt aber noch eine Kraft auf, die nach dem gleichen Gesetz den Körper in die Äquatorebene der Rotation hineinzuziehen sucht, wie die Zentrifugalkraft ihn von der Achse zu entfernen strebt. Zweitens hat er (zusammen mit J. Lense) den Einfluß der Eigenrotation der Zentralkörper auf ihre Planeten bzw. Monde studiert; für den 5. Jupitermond erreicht die durch die Rotation des Jupiter hervorgerufene Störung einen solchen Betrag, daß vielleicht ein Vergleich mit der Beobachtung möglich ist.

Nachdem wir in §§ 29, 30 uns mit der näherungsweisen Integration der Gravitationsgleichungen beschäftigt haben, die durch Beschränkung auf die linearen Glieder zustande kommen, wollen wir jetzt versuchen, strenge Lösungen zu ermitteln; dabei fassen wir aber nur die Gravitationsstatik ins Auge.

§ 31. Strenge Lösung des Einkörperproblems[17]).

Für ein statisches Gravitationsfeld ist

$$ds^2 = f^2 dx_0^2 - d\sigma^2,$$

wo $d\sigma^2$ eine positiv-definite quadratische Form der drei Raumvariablen $x_1 x_2 x_3$ ist; die Lichtgeschwindigkeit f hängt gleichfalls nur von diesen ab. Das Feld ist *kugelsymmetrisch*, wenn bei geeigneter Wahl der Raumkoordinaten f und $d\sigma^2$ invariant sind gegenüber linearer orthogonaler Transformation derselben. Damit dies der Fall ist, muß f eine Funktion der Entfernung

$$r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$$

vom Zentrum sein, $d\sigma^2$ aber besitzt notwendig die Gestalt

$$\lambda(dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2) + l(x_1 dx_1 + x_2 dx_2 + x_3 dx_3)^2, \tag{46}$$

worin λ und l gleichfalls Funktionen von r allein bedeuten. Ohne daß diese Normalform zerstört wird, kann man die Raumkoordinaten noch einer Transformation unterwerfen, die darin besteht, daß man x_1, x_2, x_3 ersetzt durch τx_1, τx_2, τx_3 mit einem Proportionalitätsfaktor τ, der eine willkürliche Funktion der Entfernung r ist. Indem man über ihn geeignet verfügt, kann man offenbar erreichen, daß $\lambda = 1$ wird; dies sei geschehen. Wir haben dann also mit den Bezeichnungen von § 29

$$\gamma_{ik} = -g_{ik} = \delta_i^k + l \cdot x_i x_k \qquad (i, k = 1, 2, 3).$$

Wir wollen jetzt dieses kugelsymmetrische Feld so bestimmen, daß es den homogenen Gravitationsgleichungen genügt, welche dort gelten, wo keine Materie vorhanden ist, d. h. wo die Energiedichte $\mathfrak{T}_i^k$ verschwindet. Jene Gleichungen sind zusammengefaßt in dem Variationsprinzip

$$\delta \int \mathfrak{G}\, dx = 0.$$

Das Gravitationsfeld, das wir finden, ist *das von ruhenden Massen erzeugte, die kugelsymmetrisch um ein Zentrum verteilt sind.* Bedeutet der Akzent Ableitung nach r, so bekommen wir

$$\frac{\partial \gamma_{ik}}{\partial x_\alpha} = l' \frac{x_\alpha}{r} x_i x_k + l(\delta^\alpha{}_i x_k + \delta^\alpha{}_k x_i)$$

und daher

$$-\begin{bmatrix} ik \\ \alpha \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \frac{x_\alpha}{r} l' x_i x_k + l \delta_i^k x_\alpha \quad (i, k, \alpha = 1, 2, 3).$$

Da aus

$$x_\alpha = \sum_{\beta=1}^{3} \gamma_{\alpha\beta} x^\beta ,$$

wie man sich durch Einsetzen überzeugt,

$$x^\alpha = \frac{1}{h^2} x_\alpha, \qquad h^2 = 1 + lr^2$$

folgt, ist mithin

$$\begin{Bmatrix} ik \\ \alpha \end{Bmatrix} = \frac{1}{2} \frac{x_\alpha}{r} \frac{l' x_i x_k + 2 lr \delta_i^k}{h^2} .$$

Es genügt, die Berechnung von $\mathfrak{G}$ für den Punkt $x_1 = r$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$ durchzuführen. An dieser Stelle sind von den eben berechneten Dreiindizes-Symbolen

$$\begin{Bmatrix} 1\,1 \\ 1 \end{Bmatrix} = \frac{h'}{h}, \qquad \begin{Bmatrix} 2\,2 \\ 1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 3\,3 \\ 1 \end{Bmatrix} = \frac{lr}{h^2},$$

alle übrigen $= 0$. Von den 0 enthaltenden Dreiindizes-Symbolen sind nach § 29

$$\begin{Bmatrix} 1\,0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0\,1 \\ 0 \end{Bmatrix} = \frac{f'}{f}, \qquad \begin{Bmatrix} 0\,0 \\ 1 \end{Bmatrix} = \frac{ff'}{h^2},$$

alle andern $= 0$. Von den g_{ik} sind die in der Hauptdiagonale stehenden $(i = k)$ gleich

$$f^2, \; -h^2, \; -1, \; -1,$$

die seitlichen $(i \neq k)$ sind 0; für die in der Hauptdiagonale stehenden g^{ik} findet man daher die Werte

$$\frac{1}{f^2}, \quad -\frac{1}{h^2} \quad -1, \quad -1,$$

für die seitlichen 0. Die Definition (31) von $\mathfrak{G}$ liefert daher hier:

$$-\frac{2}{\sqrt{g}} \mathfrak{G} =$$

$$\begin{array}{r|l}
\frac{1}{f^2} & \begin{Bmatrix} 0\,0 \\ 1 \end{Bmatrix}\left(\begin{Bmatrix} 1\,0 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 1\,1 \\ 1 \end{Bmatrix}\right) - 2 \begin{Bmatrix} 0\,1 \\ 0 \end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} 0\,0 \\ 1 \end{Bmatrix} \\
-\frac{1}{h^2} & \begin{Bmatrix} 1\,1 \\ 1 \end{Bmatrix}\left(\begin{Bmatrix} 1\,0 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 1\,1 \\ 1 \end{Bmatrix}\right) - \begin{Bmatrix} 1\,0 \\ 0 \end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} 1\,0 \\ 0 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} 1\,1 \\ 1 \end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} 1\,1 \\ 1 \end{Bmatrix} \\
-1 & \begin{Bmatrix} 2\,2 \\ 1 \end{Bmatrix}\left(\begin{Bmatrix} 1\,0 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 1\,1 \\ 1 \end{Bmatrix}\right) \\
-1 & \begin{Bmatrix} 3\,3 \\ 1 \end{Bmatrix}\left(\begin{Bmatrix} 1\,0 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 1\,1 \\ 1 \end{Bmatrix}\right) .
\end{array}$$

Die in der ersten und zweiten Zeile stehenden Glieder ergeben zusammen

$$\left(\begin{Bmatrix}1\,1\\1\end{Bmatrix}-\begin{Bmatrix}1\,0\\0\end{Bmatrix}\right)\left(\frac{1}{f^2}\begin{Bmatrix}0\,0\\1\end{Bmatrix}-\frac{1}{h^2}\begin{Bmatrix}1\,0\\0\end{Bmatrix}\right);$$

in diesem Produkt ist aber der zweite Faktor $= 0$. Da [§ 17, Gl. (57)]

$$\sum_{i=0}^{3}\begin{Bmatrix}1\,i\\i\end{Bmatrix}=\frac{\Delta'}{\Delta}\qquad(\Delta=\sqrt{g}=hf),$$

ist die Summe der in der dritten und vierten Zeile stehenden Terme

$$=-\frac{2lr}{h^2}\cdot\frac{\Delta'}{\Delta}.$$

Erstrecken wir das Weltintegral $\mathfrak{G}$ nach der Zeit x_0 über ein festes Intervall, nach dem Raum über eine von zwei Kugelflächen begrenzte Schale, so lautet, da das Integrationselement

$$dx = dx_0\cdot d\Omega\cdot r^2 dr\qquad(d\Omega = \text{räumlicher Winkel})$$

ist, die zu lösende Variationsgleichung

$$\delta\int\mathfrak{G}r^2dr = 0;$$

also, wenn wir

$$\frac{lr^3}{h^2}=\frac{lr^3}{1+lr^2}=\left(1-\frac{1}{h^2}\right)r=w$$

setzen,

$$\delta\int w\Delta'\,dr = 0.$$

Darin dürfen wir Δ und w als die unabhängig zu variierenden Funktionen betrachten.

Indem wir w variieren, ergibt sich

$$\Delta'=0,\qquad \Delta=\text{konst.};$$

bei geeigneter Wahl der Maßeinheit der Zeit also

$$\Delta = hf = 1.$$

Partielle Integration liefert

$$\int w\Delta'\,dr=[w\Delta]-\int\Delta w'\,dr.$$

Daher kommt, wenn wir Δ variieren,

$$w'=0,\qquad w=\text{konst.}=2m.$$

Aus der Definition von w und $\Delta = 1$ folgt nunmehr

$$\boxed{f^2=1-\frac{2m}{r},\qquad h^2=\frac{1}{f^2}}.$$

Unsere Aufgabe ist damit vollständig gelöst. Die Maßeinheit der Zeit ist so gewählt, daß die Lichtgeschwindigkeit im Unendlichen $= 1$ ist. In Entfernungen r, die groß gegenüber m sind, gilt der Newtonsche Potentialwert in dem Sinne, daß die durch die Gleichung $m = \varkappa m_0$ eingeführte

Größe m_0 als *felderzeugende Masse* auftritt; wir nennen m den *Gravitationsradius* der die Feldstörung verursachenden Materie. Da $4\pi m$ der Fluß der räumlichen Vektordichte $\mathfrak{f}^i$ durch eine beliebige, die Massen umschließende Kugel ist, ergibt sich für inkohärente Materie aus (32′):

$$m_0 = \int \mu\, dx_1\, dx_2\, dx_3\,.$$

Da f^2 nicht negativ werden kann, zeigt sich übrigens, daß bei Verwendung der hier eingeführten Koordinaten für das von Materie freie Raumgebiet überall $r > 2m$ sein muß. Weitere Aufklärung darüber gibt der in § 32 durchzuführende besondere Fall der Flüssigkeitskugel, wo wir das Gravitationsfeld auch innerhalb der Masse bestimmen werden. Die gefundene Lösung dürfen wir für das Schwerefeld der Sonne außerhalb derselben benutzen, wenn wir die Einwirkung der Planeten und der fernen Fixsterne vernachlässigen. Der Gravitationsradius für die Sonnenmasse mißt ungefähr 1,47 km, für die Erde beträgt er nur 5 mm.

Die Bewegung eines Planeten (dessen Masse wir unendlichklein gegenüber der Sonnenmasse annehmen) wird durch eine geodätische Weltlinie dargestellt. Von deren vier Gleichungen

$$\frac{d^2 x_i}{ds^2} + \begin{Bmatrix} \alpha\beta \\ i \end{Bmatrix} \frac{dx_\alpha}{ds}\frac{dx_\beta}{ds} = 0$$

liefert die dem Index $i = 0$ entsprechende im statischen Gravitationsfeld, wie wir oben sahen, das Energieintegral

$$f^2 \frac{dx_0}{ds} = \text{konst.}$$

oder da

$$\left(f\frac{dx_0}{ds}\right)^2 = 1 + \left(\frac{d\sigma}{ds}\right)^2:$$

$$f^2\left[1 + \left(\frac{d\sigma}{ds}\right)^2\right] = \text{konst.}$$

Die den Indizes $i = 1, 2, 3$ entsprechenden Gleichungen liefern für ein kugelsymmetrisches Feld, wie die hingeschriebenen Werte der Dreiindizes-Symbole ohne weiteres erkennen lassen, die Proportion

$$\frac{d^2 x_1}{ds^2} : \frac{d^2 x_2}{ds^2} : \frac{d^2 x_3}{ds^2} = x_1 : x_2 : x_3$$

und daraus in bekannter Weise die drei Gleichungen, welche den Flächensatz enthalten:

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \quad x_1 \frac{dx_2}{ds} - x_2 \frac{dx_1}{ds} = \text{konst.}$$

Gegenüber der Newtonschen Theorie besteht hinsichtlich dieses Satzes nur der Unterschied, daß nicht nach der kosmischen Zeit, sondern der Eigenzeit s des Planeten differentiiert werden muß. Wegen des Flächensatzes

erfolgt die Bewegung in einer Ebene, die wir zur Koordinatenebene $x_3 = 0$ wählen können. Führen wir in ihr Polarkoordinaten ein:

$$x_1 = r\cos\varphi\,, \qquad x_2 = r\sin\varphi\,,$$

so lautet das Flächenintegral

$$r^2\frac{d\varphi}{ds} = \text{konst.} = b\,. \tag{47}$$

Für das Energieintegral aber kommt, da

$$dx_1^2 + dx_2^2 = dr^2 + r^2\,d\varphi^2\,, \qquad x_1\,dx_1 + x_2\,dx_2 = r\,dr\,,$$
$$d\sigma^2 = (dr^2 + r^2\,d\varphi^2) + l(r\,dr)^2 = h^2 dr^2 + r^2\,d\varphi^2 \text{ ist:}$$
$$f^2\left\{1 + h^2\left(\frac{dr}{ds}\right)^2 + r^2\left(\frac{d\varphi}{ds}\right)^2\right\} = \text{konst.}$$

Da $fh = 1$ ist, folgt durch Einsetzen des Wertes von f^2

$$-\frac{2m}{r} + \left(\frac{dr}{ds}\right)^2 + r(r - 2m)\left(\frac{d\varphi}{ds}\right)^2 = -E = \text{konst.} \tag{48}$$

Diese Gleichung zeigt gegenüber der Energiegleichung in der Newtonschen Theorie nur den einen Unterschied, daß im letzten Gliede links der eine Faktor r durch $r - 2m$ ersetzt ist.

Die weitere Behandlung geschieht genau wie in der Newtonschen Theorie. Wir setzen $\frac{d\varphi}{ds}$ aus (47) in (48) ein:

$$\left(\frac{dr}{ds}\right)^2 = \frac{2m}{r} - E - \frac{b^2(r - 2m)}{r^3}\,,$$

oder statt r die reziproke Entfernung $\varrho = \frac{1}{r}$ benutzend,

$$\left(\frac{d\varrho}{\varrho^2 ds}\right)^2 = 2m\varrho - E - b^2\varrho^2(1 - 2m\varrho)\,.$$

Wollen wir die Planetenbahn ermitteln, so eliminieren wir die Eigenzeit, indem wir diese Gleichung durch die quadrierte Gleichung (47) dividieren:

$$\left(\frac{d\varrho}{d\varphi}\right)^2 = \frac{2m}{b^2}\varrho - \frac{E}{b^2} - \varrho^2 + 2m\varrho^3\,.$$

In der Newtonschen Theorie fehlt das letzte Glied rechts. Für die numerischen Verhältnisse, die bei einem Planeten vorliegen, hat das Polynom 3. Grades in ϱ auf der rechten Seite drei positive Wurzeln $\varrho_0 > \varrho_1 > \varrho_2$ und ist also

$$= 2m(\varrho_0 - \varrho)(\varrho_1 - \varrho)(\varrho - \varrho_2)\,;$$

ϱ bewegt sich zwischen ϱ_1 und ϱ_2. Die Wurzel ϱ_0 ist sehr groß gegenüber den beiden andern. Wir setzen wie in der Newtonschen Theorie

$$\frac{1}{\varrho_1} = a(1 - e)\,, \qquad \frac{1}{\varrho_2} = a(1 + e)$$

und nennen a die halbe große Achse und e die Exzentrizität; dann ist

$$\varrho_1 + \varrho_2 = \frac{2}{a(1-e^2)}\,.$$

Vergleichen wir die Koeffizienten von ϱ^2 miteinander, so kommt

$$\varrho_0 + \varrho_1 + \varrho_2 = \frac{1}{2m}\,.$$

φ drückt sich durch ϱ mittels eines elliptischen Integrals 1. Gattung aus, daher ist ϱ umgekehrt eine elliptische Funktion von φ. Die Bewegung hat genau den gleichen Typus wie die des sphärischen Pendels. Um einfache Näherungsformeln zu finden, machen wir die gleiche Substitution, wie sie zur Bestimmung der Keplerschen Bahnellipse in der Newtonschen Theorie benutzt wird:

$$\varrho - \frac{\varrho_1+\varrho_2}{2} = \frac{\varrho_1-\varrho_2}{2}\cos\theta\,.$$

Dann ist

$$\varphi = \int \frac{d\theta}{\sqrt{2m\left(\varrho_0 - \frac{\varrho_1+\varrho_2}{2} - \frac{\varrho_1-\varrho_2}{2}\cos\theta\right)}}\,. \tag{49}$$

Das Perihel ist charakterisiert durch die Werte $\theta = 0,\ 2\pi,\ \ldots$; der Zuwachs des Azimuts φ für einen vollen Umlauf von Perihel zu Perihel wird also durch das obige Integral, genommen in den Grenzen von 0 bis 2π, geliefert. Mit bei weitem ausreichender Genauigkeit ist er

$$= \frac{2\pi}{\sqrt{2m\left(\varrho_0 - \frac{\varrho_1+\varrho_2}{2}\right)}}\,.$$

Wir finden aber

$$\varrho_0 - \frac{\varrho_1+\varrho_2}{2} = (\varrho_0+\varrho_1+\varrho_2) - \tfrac{3}{2}(\varrho_1+\varrho_2) = \frac{1}{2m} - \frac{3}{a(1-e^2)}\,.$$

Infolgedessen ist jener Zuwachs

$$= \frac{2\pi}{\sqrt{1-\frac{6m}{a(1-e^2)}}} \sim 2\pi\left\{1 + \frac{3m}{a(1-e^2)}\right\}$$

und *das Vorrücken des Perihels pro Bahnumlauf*

$$= \frac{6\pi m}{a(1-e^2)}\,.$$

m, der Gravitationsradius der Sonne, kann nach dem dritten Keplerschen Gesetz noch durch die Umlaufszeit T des Planeten und die halbe große Achse a ausgedrückt werden:

$$m = \frac{4\pi^2 a^3}{c^2 T^2}\,.$$

Einen mit den feinen astronomischen Beobachtungsmitteln sicher konstatierbaren Betrag erreicht dieses Vorrücken des Perihels nur für den sonnennächsten Planeten, den Merkur[18]).

Die Formel (49) ergibt auch die Ablenkung α eines Lichtstrahls. Ist $\theta_0 = \frac{\pi}{2} + \varepsilon$ derjenige Winkel θ, für welchen $\varrho = 0$ ist, so ist der Wert des von $-\theta_0$ bis $+\theta_0$ zu erstreckenden Integrals $= \pi + \alpha$. Dabei ist jetzt

$$2m(\varrho_0 - \varrho)(\varrho_1 - \varrho)(\varrho - \varrho_2) = \frac{1}{b^2} - \varrho^2 + 2m\varrho^3 .$$

ϱ variiert zwischen 0 und ϱ_1; $\frac{1}{\varrho_1} = r_1$ ist der Abstand, bis zu welchem sich der Lichtstrahl dem Massenzentrum O nähert, b der Abstand der beiden Asymptoten des Lichtstrahls von O (denn bei einer beliebigen Kurve wird dieser Abstand gegeben durch den Wert von $\frac{d\varphi}{d\varrho}$ für $\varrho = 0$). Es ist genau

$$2m(\varrho_0 + \varrho_1 + \varrho_2) = 1 ;$$

wenn $\frac{m}{b}$ ein kleiner Bruch ist, gilt ferner in erster Annäherung

$$m\varrho_1 = -m\varrho_2 = \frac{m}{b}, \quad \frac{m}{2}(\varrho_1 + \varrho_2) = \left(\frac{m}{b}\right)^2, \quad \varepsilon = \frac{m}{b};$$

$$\alpha = \int_{-\theta_0}^{+\theta_0} \left(1 + \frac{m}{b}\cos\theta\right) d\theta - \pi = 2\varepsilon + \frac{2m}{b}, \quad \text{also} \quad \boxed{\alpha = \frac{4m}{b}} .$$

Berechnet man die Bahn des Lichtstrahls nach der Newtonschen Theorie unter Berücksichtigung der Schwere des Lichts, nämlich als die Bahn eines Körpers, der im Unendlichen die Lichtgeschwindigkeit c besitzt, so erhält man, wenn

$$\frac{1}{b^2} + \frac{2m}{b^2}\varrho - \varrho^2 = (\varrho_1 - \varrho)(\varrho - \varrho_2)$$

gesetzt wird ($\varrho_1 > 0$, $\varrho_2 < 0$) und

$$\cos\theta_0 = -\frac{\varrho_1 + \varrho_2}{\varrho_1 - \varrho_2}:$$

$$\pi + \alpha = 2\theta_0, \quad \alpha \sim \frac{2m}{b} .$$

Das Newtonsche Attraktionsgesetz liefert demnach nur eine halb so große Ablenkung wie das Einsteinsche. Die Beobachtungen von Sobral und Principe entscheiden die Frage deutlich zugunsten von Einstein gegen Newton[19]).

§ 32. Weitere strenge Lösungen des statischen Gravitationsproblems.

In einem Euklidischen Raum mit den Cartesischen Koordinaten $x_1 x_2 x_3$ lautet die Gleichung einer Rotationsfläche, welche die x_3-Achse zur Drehachse hat,

$$x_3 = F(r)\,, \qquad r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}\,;$$

auf ihr ist also das Quadrat des Abstandes $d\sigma$ zweier unendlich benachbarter Punkte

$$d\sigma^2 = (dx_1^2 + dx_2^2) + (F'(r))^2 dr^2 = (dx_1^2 + dx_2^2) + \left(\frac{F'(r)}{r}\right)^2 (x_1 dx_1 + x_2 dx_2)^2.$$

Im kugelsymmetrischen statischen Gravitationsfeld ist auf einer durch das Zentrum gehenden Ebene ($x_3 = 0$)

$$d\sigma^2 = (dx_1^2 + dx_2^2) + l(x_1 dx_1 + x_2 dx_2)^2,$$

wo

$$l = \frac{h^2 - 1}{r^2} = \frac{2m}{r^2(r - 2m)}\,.$$

Die beiden Formeln kommen zur Übereinstimmung, wenn man

$$F'(r) = \sqrt{\frac{2m}{r - 2m}}\,, \qquad F(r) = \sqrt{8m(r - 2m)}$$

setzt. *Die Geometrie in jener Ebene ist also die gleiche, wie sie im Euklidischen Raum auf der Rotationsfläche einer Parabel*

$$z = \sqrt{8m(r - 2m)}$$

gilt[20]).

Eine *geladene Kugel* erzeugt außer dem kugelsymmetrischen Gravitationsfeld auch ein ebensolches elektrostatisches Feld; da sich beide Felder gegenseitig beeinflussen, können sie nur simultan bestimmt werden[21]). Verwenden wir wie für die übrigen Größen so für die Elektrizität die gewöhnlichen Maßeinheiten des *CGS*-Systems (und nicht die sonst hier zugrunde gelegten Heavisideschen, die über den Faktor 4π anders verfügen), so lautet in dem von Massen und Ladungen freien Gebiet das Integral, das für den Gleichgewichtszustand einen stationären Wert annimmt:

$$\int \left\{ w\Delta' - \varkappa \frac{\Phi'^2 r^2}{\Delta} \right\} dr\,.$$

Die Bezeichnungen sind dieselben wie oben, Φ ist das elektrostatische Potential. Als Wirkungsfunktion des elektrischen Feldes ist gemäß der klassischen Theorie das Quadrat des Feldbetrages zugrunde gelegt. Die Variation von w ergibt, ebenso wie im ladungslosen Fall,

$$\Delta' = 0\,, \qquad \Delta = \text{konst.} = c\,,$$

Variation von Φ aber:

$$\frac{d}{dr}\left(\frac{r^2 \Phi'}{\Delta}\right) = 0 \qquad \text{und daraus} \qquad \Phi = \frac{e_0}{r}\,.$$

Für das elektrostatische Potential erhält man demnach die gleiche Formel wie ohne Berücksichtigung der Gravitation; die Konstante e_0 ist die das Feld erzeugende elektrische Ladung. Variiert man endlich Δ, so kommt

$$w' - \varkappa \frac{\Phi'^2 r^2}{\Delta^2} = 0$$

und daraus

$$w = 2m - \frac{\varkappa}{c^2} \frac{e_0^2}{r}, \quad \frac{1}{h^2} = \left(\frac{f}{c}\right)^2 = 1 - \frac{2\varkappa m_0}{r} + \frac{\varkappa}{c^2} \frac{e_0^2}{r^2}.$$

m_0 ist dabei die das Gravitationsfeld erzeugende Masse. Es tritt aber in f^2, wie man sieht, außer dem von der Masse abhängigen Gliede noch ein stärker mit r abnehmendes elektrisches Zusatzglied auf. Wir nennen $m = \varkappa m_0$ den Gravitationsradius der Masse m_0, $\frac{\sqrt{\varkappa}}{c} e_0 = e$ den Gravitationsradius der Ladung e_0. Unsere Formel ergibt *eine wesentlich von der üblichen abweichende Auffassung vom Bau des Elektrons.* Man hat dem Elektron einen endlichen Radius zugeschrieben, um nicht auf eine unendliche Gesamtenergie des von ihm erzeugten elektrostatischen Feldes und damit auf eine unendlich große träge Masse zu kommen. Rührt die träge Masse des Elektrons allein von seiner Feldenergie her, so ist der Radius von der Größenordnung

$$a = \frac{e_0^2}{m_0 c^2}.$$

In unserer Formel aber tritt eine endliche (gravitationsfeld-erzeugende) Masse m_0 auf, ganz unabhängig davon, bis zu einem wie kleinen Wert von r herab wir diese Formel als gültig ansehen; wie reimt sich das zusammen? Nach Faraday ist die von einer Fläche Ω umschlossene Ladung nichts anderes als der Fluß des elektrischen Feldes durch Ω. Analog wird sich im nächsten Paragraphen als der wahre Sinn des Massenbegriffs herausstellen, daß auch die Masse, und zwar in beiderlei Bedeutung: sowohl als *felderzeugende* wie als *träge oder schwere Masse*, durch einen Feldfluß gegeben ist. Für die hier ermittelte statische Lösung ist, wenn wir sie im ganzen Raum als gültig betrachten, der Fluß des elektrischen Feldes durch irgendeine Kugel um das Zentrum $= 4\pi e_0$. Hingegen wird die Masse, welche eine Kugel vom Radius r umschließt, den von r abhängigen Wert

$$m_0 - \frac{1}{2} \frac{e_0^2}{c^2 r}.$$

bekommen. Die Masse ist demnach kontinuierlich verteilt. Die Massendichte stimmt natürlich mit der Energiedichte überein, aber wegen der Singularität im Zentrum ist trotz unendlicher Energie die Masse endlich. Das »Anfangsniveau« im Zentrum, von dem aus die Masse gerechnet werden muß, ist nicht $= 0$, sondern $= -\infty$; die Masse m_0 des Elektrons kann deshalb überhaupt nicht von hier aus bestimmt werden, sondern bezeichnet

das »Auslaufniveau« in unendlich großer Entfernung. a bedeutet jetzt den Radius derjenigen Kugel, welche die Masse o umschließt. Im Gegensatz zu der Anschauung Mies erscheint *die Materie als eine wirkliche Singularität* im Felde. In der allgemeinen Relativitätstheorie, wo wir den Raum nicht als Euklidisch voraussetzen, sind wir aber auch nicht gezwungen, ihm die Zusammenhangsverhältnisse des Euklidischen Raumes zuzuschreiben; es ist sehr wohl möglich, daß er außer dem Unendlichfernen noch andere Grenzen besitzt, insbesondere daß er so zusammenhängt wie ein Euklidischer Raum, aus welchem einzelne Punkte herausgestochen sind (vgl. darüber § 34); *die singulären Stellen selbst nämlich gehören nicht mit zum Felde.* Wir dürfen daher die jetzt entwickelte Vorstellung — nach der zwischen der Gesamtmasse des Elektrons und der potentiellen Energie des von ihm erzeugten Feldes kein Zusammenhang besteht und die Frage nach einem das Elektron zusammenhaltenden Kohäsionsdruck sinnlos wird — gleichberechtigt der Mieschen gegenüberstellen. Nur ist es wohl unbefriedigend, daß das Feld völlig ladungslos sein soll, während die Masse = Energie mit kontinuierlich abnehmender Dichte sich durchs ganze Feld erstreckt; das wird aber später in zwingender Weise eine Korrektur erfahren.

Übrigens gilt

$$a : e = e : m \quad \text{oder} \quad e = \sqrt{am}.$$

Für das Elektron ist der Quotient $\frac{e}{m}$ eine Zahl von der Größenordnung 10^{20}, $\frac{a}{m}$ von der Ordnung 10^{40}; d. h. die elektrische Abstoßung, welche zwei Elektronen (in großer Entfernung) aufeinander ausüben, ist 10^{40}mal so groß wie ihre Anziehung durch Gravitation. Daß am Elektron eine derartige reine Zahl auftritt, die von ganz anderer Größenordnung als 1 ist, macht die in der Mieschen Theorie enthaltene These, daß alle aus den Maßgrößen des Elektrons bestimmten reinen Zahlen sich als mathematische Konstante aus den exakten Naturgesetzen ergeben müssen, einigermaßen bedenklich; so schwer es uns freilich auf der andern Seite fällt, zu glauben, daß dem Weltbau gewisse reine Zahlen von zufälligem numerischen Wert zugrunde liegen. —

Das *im Innern massiver Körper* herrschende Gravitationsfeld ist nach der Einsteinschen Theorie erst bestimmt, wenn die dynamische Konstitution der Körper vollständig bekannt ist; in den Gravitationsgleichungen sind ja die mechanischen, also im statischen Fall die Gleichgewichtsbedingungen mit enthalten. Die einfachsten Verhältnisse, welche wir ins Auge fassen können, liegen vor, wenn die Körper aus einer *homogenen inkompressiblen Flüssigkeit* bestehen. Der Energietensor einer Flüssigkeit, auf welche keine Volumkräfte wirken, wird nach § 25 durch die Gleichungen geliefert

$$T_{ik} = \mu^* u_i u_k - p g_{ik},$$

in denen die u_i die kovarianten Komponenten der Weltrichtung der

Materie sind, der Skalar p den Druck bedeutet und μ^* sich aus der konstanten Dichte μ_0 durch die Gleichung $\mu^* = \mu_0 + p$ bestimmt. Wir führen die Größen

$$\mu^* u_i = v_i$$

als Unabhängige ein und setzen

$$L = \frac{1}{\sqrt{g}} \mathfrak{L} = \mu_0 - \sqrt{v_i v^i}.$$

Dann ist, wenn wir nur die g^{ik} variieren, hingegen die v_i nicht:

$$\delta \mathfrak{L} = -\tfrac{1}{2} \mathfrak{T}_{ik} \delta g^{ik}$$

Folglich können wir die Gravitationsgleichungen in die auf diese Art der Variation sich beziehende Formel zusammenfassen

$$\delta \int (\mathfrak{L} + \mathfrak{G}) dx = 0.$$

Es ist aber wohl zu beachten, daß dieses Prinzip, wenn in ihm die v_i als Unabhängige variiert werden, *nicht* die richtigen hydrodynamischen Gleichungen ergibt (statt dessen käme $\frac{v^i}{\sqrt{v_i v^i}} = 0$, womit nun gar nichts anzufangen ist). Diese, d. s. die Erhaltungssätze für Energie und Impuls, sind ja aber bereits in den Gravitationsgleichungen mitenthalten.

Im statischen Fall ist $v_1 = v_2 = v_3 = 0$ und alle Größen sind unabhängig von der Zeit; wir setzen $v_0 = v$ und verwenden das Variationszeichen δ in dem gleichen Sinne wie in § 28 für eine Änderung, die durch infinitesimale Deformation hervorgerufen wird, wobei wir uns aber auf eine rein räumliche Verschiebung beschränken. Dann ist

$$\delta \mathfrak{L} = \tfrac{1}{2} \mathfrak{T}^{ik} \delta g_{ik} - h \delta v \qquad \left(h = \frac{\Delta}{f}\right),$$

wobei δv nichts anderes bedeutet als den Unterschied von v an zwei Raumstellen, die durch die infinitesimale Verschiebung auseinander hervorgehen. Indem wir jetzt den Schluß, durch den wir in § 28 den Energie-Impuls-Satz gewannen, umkehren, folgern wir aus der Gültigkeit jenes Gesetzes, d. i.

$$\int \mathfrak{T}^{ik} \delta g_{ik} \cdot dx = 0,$$

und der Gleichung, welche die invariante Natur des Weltintegrals von $\mathfrak{L}$ zum Ausdruck bringt:

$$\int \delta \mathfrak{L} \cdot dx = 0,$$

daß $\delta v = 0$ ist. Und das bedeutet, daß *v in einem zusammenhängenden, von Flüssigkeit erfüllten Raumgebiet einen konstanten Wert besitzt.* Das Energiegesetz ist identisch erfüllt, und das Impulsgesetz drückt sich am einfachsten in dieser Tatsache aus.

Eine einzige im Gleichgewicht befindliche Flüssigkeitsmasse wird hinsichtlich Massenverteilung und Feld Kugelsymmetrie besitzen. Speziali-

sieren wir auf diesen Fall, so haben wir für ds^2 den gleichen, die drei unbekannten Funktionen λ, l, f enthaltenden Ansatz zu machen wie zu Beginn des § 31. Setzen wir von vornherein $\lambda = 1$, so entgeht uns diejenige Gleichung, welche durch Variation von λ entspringt. Für sie ist offenbar jene Gleichung ein voller Ersatz, welche die Invarianz der Wirkungsgröße bei infinitesimaler räumlicher Verschiebung in radialer Richtung aussagt, d. h. der Impulssatz $v =$ konst. Das zu lösende Variationsproblem lautet jetzt

$$\delta \int \{\varDelta' w + r^2 \mu_0 \varDelta - r^2 v h\} dr = 0;$$

dabei sind $\varDelta$ und h zu variiren,

$$w \text{ ist} = \left(1 - \frac{1}{h^2}\right) r.$$

Beginnen wir mit der Variation von $\varDelta$; es kommt

$$w' - \mu_0 r^2 = 0, \qquad w = \frac{\mu_0}{3} r^3,$$

$$(50) \qquad \boxed{\frac{1}{h^2} = 1 - \frac{\mu_0}{3} r^2}.$$

Die Flüssigkeitskugel habe den Radius $r = r_0$. Wir sehen, daß er notwendig

$$< a = \sqrt{\frac{3}{\mu_0}}$$

bleiben muß. Dabei ist für Energie und Masse die aus der Gravitationstheorie sich ergebende rationelle Einheit zugrunde gelegt. Für eine Wasserkugel ist jene obere Grenze beispielsweise

$$= \sqrt{\frac{3}{8\pi\varkappa}} = 4 \cdot 10^8 \text{ km} = 22 \text{ Lichtminuten}.$$

Außerhalb der Kugel gelten unsere früheren Formeln, insbesondere ist dort

$$\frac{1}{h^2} = 1 - \frac{2m}{r}, \qquad \varDelta = 1.$$

Die Grenzbedingungen verlangen, daß h und f stetig über die Kugeloberfläche hinübergehen und der Druck p daselbst verschwindet. Aus der Stetigkeit von h ergibt sich zunächst für den Gravitationsradius m der Flüssigkeitskugel

$$m = \frac{\mu_0 r_0^3}{6}.$$

Die zwischen r_0 und μ_0 bestehende Ungleichung zeigt, daß der Radius r_0 größer sein muß als $2m$. Bevor wir also, aus dem Unendlichen kommend, an die früher erwähnte singuläre Kugel $r = 2m$ gelangen, geraten wir in die Flüssigkeit hinein, und in ihr gelten andere Gesetze. Gehen wir zur

Grammeinheit über, so ist μ_0 durch $8\pi\varkappa\mu_0$ zu ersetzen, und m ist $= \varkappa m_0$, wenn m_0 die gravitierende Masse bedeutet; dann findet sich

$$m_0 = \mu_0 \cdot \frac{4\pi r_0^3}{3}.$$

Da

$$v = \mu^* f = \frac{\mu^* \Delta}{h}$$

eine Konstante ist und an der Kugeloberfläche den Wert $\frac{\mu_0}{h_0}$ annimmt, wo h_0 den aus (50) zu entnehmenden Wert von h daselbst bedeutet, so ist im ganzen Innern

$$v = (\mu_0 + p) f = \frac{\mu_0}{h_0}. \tag{51}$$

Die Variation von h liefert

$$-\frac{2\Delta'}{h^3} + rv = 0.$$

Da aus (50)

$$\frac{h'}{h^3} = \frac{\mu_0}{3} r$$

folgt, findet man sofort

$$\Delta = \frac{3v}{2\mu_0} h + \text{konst.}$$

Zieht man noch den Wert (51) der Konstanten v heran und ermittelt den Wert der auftretenden Integrationskonstanten durch die Randbedingung $\Delta = 1$ auf der Kugeloberfläche, so kommt

$$\Delta = \frac{3h - h_0}{2h_0}, \qquad \boxed{f = \frac{3h - h_0}{2hh_0}}.$$

Endlich ergibt sich aus (51) jetzt

$$\boxed{p = \mu_0 \cdot \frac{h_0 - h}{3h - h_0}}.$$

Damit sind die metrische Fundamentalform des Raumes

$$d\sigma^2 = (dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2) + \frac{(x_1 dx_1 + x_2 dx_2 + x_3 dx_3)^2}{a^2 - r^2}, \tag{52}$$

das Gravitationspotential oder die Lichtgeschwindigkeit, f, und das Druckfeld p bestimmt.

Führen wir im Raum eine überschüssige Koordinate

$$x_4 = \sqrt{a^2 - r^2}$$

ein, so ist

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = a^2, \tag{53}$$

darum

$$x_1 dx_1 + x_2 dx_2 + x_3 dx_3 + x_4 dx_4 = 0,$$

und (52) verwandelt sich in

$$d\sigma^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 + dx_4^2.$$

Im ganzen Innern der Flüssigkeitskugel gilt die räumliche sphärische Geometrie, nämlich dieselbe wie auf der »Sphäre« (53) im vierdimensionalen Euklidischen Raum mit den Cartesischen Koordinaten x_i. Die Flüssigkeit bedeckt eine Kalotte dieser Sphäre; der Druck in ihr ist eine lineare gebrochene Funktion der »vertikalen Höhe« $z = x_4$ auf der Sphäre:

$$\frac{p}{\mu_0} = \frac{z - z_0}{3z_0 - z}.$$

Übrigens geht aus der Formel noch hervor, da der Druck p nicht auf einer Breitenkugel $z =$ konst. durchs Unendliche hindurch von positiven zu negativen Werten übergehen darf, daß $3z_0 > a$ sein muß, und die oben gefundene Schranke a für den Radius der Flüssigkeitskugel verkleinert sich dementsprechend auf $\frac{2a\sqrt{2}}{3}$.

Diese Ergebnisse über die Flüssigkeitskugel sind zuerst von Schwarzschild gewonnen worden[22]. Nachdem die wichtigsten Fälle des kugelsymmetrischen statischen Gravitationsfeldes erledigt waren, gelang es dem Verfasser, das allgemeinere Problem des *rotations-*(zylinder-)*symmetrischen statischen Feldes* zu lösen[23]. Hier mögen nur die einfachsten Resultate dieser Untersuchung eine kurze Erwähnung finden. Es handle sich zunächst um *ungeladene Massen* und um das Gravitationsfeld in dem von Materie freien Raum. Aus den Gravitationsgleichungen ergibt sich dann, daß unter Einführung gewisser Raumkoordinaten r, θ, z, der *kanonischen Zylinderkoordinaten*,

$$ds^2 = f^2 dt^2 - d\sigma^2, \qquad d\sigma^2 = h(dr^2 + dz^2) + \frac{r^2 d\theta^2}{f^2}$$

wird. θ ist ein Winkel, der mod. 2π zu nehmen ist; d. h. Werten von θ, welche sich um ganzzahlige Vielfache von 2π unterscheiden, entspricht derselbe Punkt. Auf der Rotationsachse wird $r = 0$. h und f sind Funktionen von r und z. Wir bilden den wirklichen Raum auf einen Euklidischen ab, in welchem r, θ, z Zylinderkoordinaten sind. Das kanonische Koordinatensystem ist eindeutig bestimmt bis auf eine Verschiebung in Richtung der Rotationsachse: $z' = z +$ konst. Wenn $h = f = 1$ ist, stimmt $d\sigma^2$ mit der metrischen Grundform des Euklidischen Bildraums überein. Das Gravitationsproblem kann in ebenso einfacher Weise wie nach der Newtonschen Theorie gelöst werden, wenn die Massenverteilung im kanonischen Koordinatensystem bekannt ist. Überträgt man nämlich die Massen in unsern Bildraum, d. h. bringt in ihm eine solche Massenverteilung an, daß die in irgend einem Stück des wirklichen Raums enthaltene Masse gleich der Masse in dem korrespondierenden Stück des

Bildraums ist, und ist dann ψ das Newtonsche Potential dieser Massenverteilung im Euklidischen Bildraum, so gilt die einfache Formel

$$f = e^{\psi/c^2}. \tag{54}$$

Auch die andere noch unbekannte Funktion h läßt sich durch Lösung einer gewöhnlichen Poissonschen Gleichung (in der Meridianebene $\theta = 0$) bestimmen. — Handelt es sich um *geladene Körper*, so existiert das kanonische Koordinatensystem gleichfalls. Nimmt man an, daß die Massen gegenüber den Ladungen zu vernachlässigen sind, d. h. daß für ein beliebig herausgegriffenes Raumstück der Gravitationsradius der in ihm enthaltenen elektrischen Ladungen immer vielmal größer ist als der Gravitationsradius der in ihm enthaltenen Massen, und bedeutet φ das nach der klassischen Theorie berechnete elektrostatische Potential der in den kanonischen Bildraum übertragenen Ladungen, so gelten für f und für das elektrostatische Potential Φ im wirklichen Raum die Formeln

$$\Phi = \frac{c}{\sqrt{\varkappa}} \operatorname{tg}\left(\frac{\sqrt{\varkappa}}{c}\varphi\right), \qquad f = \frac{1}{\cos\left(\frac{\sqrt{\varkappa}}{c}\varphi\right)}. \tag{54'}$$

Die Einordnung des kugelsymmetrischen Falls in diese allgemeinere Theorie gestaltet sich nicht ganz einfach; es ist dazu eine ziemlich komplizierte Transformation der Raumkoordinaten erforderlich, auf die wir hier nicht eingehen wollen.

Wie die Gesetze der Mieschen Elektrodynamik, so sind auch *die Einsteinschen Gravitationsgesetze nicht-linear.* Diese Nicht-Linearität macht sich in denjenigen Abmessungen, welche der direkten Beobachtung zugänglich sind, nicht merkbar, weil in ihnen die nichtlinearen Glieder vollständig gegenüber den linearen zu vernachlässigen sind; das hat zur Folge, daß wir in dem Kräftespiel der sichtbaren Welt das *Superpositionsprinzip* durchweg bestätigt finden. Höchstens für die seltsamen Vorgänge innerhalb des Atoms, von denen wir uns heute noch kein klares Bild machen können, kommt jene Nicht-Linearität möglicherweise in Betracht. Bei nichtlinearen Differentialgleichungen liegen, namentlich was ihre Singularitäten betrifft, im Vergleich zu den linearen äußerst komplizierte, unerwartete und vorerst noch ganz und gar unbeherrschbare Verhältnisse vor, und es liegt nahe, diese beiden Dinge: das sonderbare Verhalten nichtlinearer Differentialgleichungen und die Eigentümlichkeiten intraatomistischer Vorgänge in Zusammenhang miteinander zu bringen. Die Gleichungen (54), (54′) bieten ein schönes und einfaches Beispiel dafür dar, wie sich das Superpositionsprinzip in der strengen Gravitationstheorie modifiziert: die Feldpotentiale f und Φ hängen in dem einem Falle durch die Exponentialfunktion, in dem andern durch die trigonometrischen von derjenigen Größe ψ, bzw. φ ab, welche dem Superpositionsprinzip genügt. Zugleich aber zeigen jene Formeln deutlich, daß von der Nicht-Linearität der Gravitationsgleichungen für das Verständnis der Vorgänge

im Atom und der Konstitution des Elektrons nichts zu erhoffen ist. Denn die Abweichungen zwischen φ und Φ werden erst dort merklich, wo $\frac{\sqrt{\varkappa}}{c}\varphi$ Werte annimmt, die mit 1 vergleichbar sind. Das ist aber selbst im Innern des Elektrons erst auf Kugeln der Fall, deren Radius die Größenordnung des Gravitationsradius

$$e = \frac{\sqrt{\varkappa}}{c} e_0 \sim 10^{-33} \text{ cm}$$

der Ladung e_0 des Elektrons hat. —

Es ist klar, daß die statischen Differentialgleichungen der Gravitation die Lösungen nicht eindeutig bestimmen können, sondern daß Randbedingungen im Unendlichen oder solche Symmetriebedingungen wie die Forderung der Kugelsymmetrie hinzutreten müssen. Die von uns gefundenen Lösungen waren von solcher Art, daß die metrische Fundamentalform im räumlich Unendlichen gegen die für die spezielle Relativitätstheorie charakteristische

$$dx_0^2 - (dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2)$$

konvergiert. — Eine Reihe weiterer schöner Untersuchungen über statische Gravitationsprobleme rührt von Levi-Civita her[24]). Die Italiener haben neben dem statischen genauer auch den »stationären« Fall studiert, der dadurch charakterisiert ist, daß alle g_{ik} von der Zeitkoordinate x_0 unabhängig sind, während die »seitlichen« Koeffizienten g_{01}, g_{02}, g_{03} nicht zu verschwinden brauchen[25]); ein Beispiel dafür ist das Feld, das einen in stationärer Rotation begriffenen Körper umgibt.

§ 33. Gravitationsenergie. Die Erhaltungssätze.

Ein *isoliertes System* durchfegt im Laufe seiner Geschichte einen »Weltkanal«; außerhalb desselben, nehmen wir an, verschwindet die Stromdichte $\mathfrak{s}^i$ (wenn nicht exakt, so doch in solcher Stärke, daß die folgende Überlegung ihre Gültigkeit behält). Aus der Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial \mathfrak{s}^i}{\partial x_i} = 0 \tag{55}$$

folgt, daß der Fluß der Vektordichte $\mathfrak{s}^i$ durch jede den Kanal durchsetzende dreidimensionale »Fläche« denselben Wert e besitzt. Damit e auch dem Vorzeichen nach bestimmt ist, werde im Kanal als Richtungssinn der von der Vergangenheit in die Zukunft führende festgelegt. Die Invariante e ist die *Ladung* unseres Systems. Erfüllt das Koordinatensystem die Bedingungen, daß jede »Ebene« $x_0 =$ konst. den Kanal in einem endlichen Bereich durchschneidet und diese Ebenen, nach wachsendem x_0 geordnet, in der Richtung Vergangenheit → Zukunft aufeinander folgen, so können wir e durch die Gleichung berechnen:

$$\int \mathfrak{s}^0 \, dx_1 dx_2 dx_3 = e,$$

wobei sich die Integration über eine beliebige der Ebenen $x_0 =$ konst. erstreckt. Dieses Integral $e = e(x_0)$ ist demnach von der »Zeit« x_0 unabhängig, wie sich auch unmittelbar aus (55) durch Integration nach den »Raumkoordinaten« $x_1 x_2 x_3$ ergibt. Das Gesagte gilt allein auf Grund der Kontinuitätsgleichung; die Substanzvorstellung und der auf ihr beruhende Ansatz der Lorentzschen Theorie $\mathfrak{s}^i = \varrho u^i$ kommen dafür gar nicht in Frage.

Gilt ein ähnlicher *Erhaltungssatz für Energie und Impuls?* Die Gleichung (26), § 28 läßt das wegen des für die Gravitationstheorie charakteristischen Zusatzterms jedenfalls nicht erkennen. *Es gelingt nun aber, auch diesen Zusatzterm in Gestalt einer Divergenz zu schreiben.* Wir legen ein bestimmtes Koordinatensystem zugrunde und nehmen mit dem Weltkontinuum eine infinitesimale *Verschiebung* im eigentlichen Sinne vor, d. h. wir wählen die Deformationskomponenten ξ^i in § 28 als Konstante. Dann ist selbstverständlicherweise für irgend ein endliches Gebiet $\mathfrak{X}$

$$\delta' \int_{\mathfrak{X}} \mathfrak{G}\, dx = 0$$

(das gilt für *jede* Funktion der g_{ik} und ihrer Ableitungen, mit Invarianzeigenschaften hat das gar nichts zu tun; δ' bezeichnet wie in § 28 die durch die Verschiebung bewirkte Variation). Es ist also für die Verschiebung

$$\int_{\mathfrak{X}} \frac{\partial(\mathfrak{G}\xi^k)}{\partial x_k}\, dx + \int_{\mathfrak{X}} \delta\mathfrak{G}\, dx = 0.$$

Setzen wir nach Früherem

$$\delta\mathfrak{G} = \tfrac{1}{2}\mathfrak{G}^{\alpha\beta}\delta g_{\alpha\beta} + \tfrac{1}{2}\mathfrak{G}^{\alpha\beta,k}\delta g_{\alpha\beta,k}, \tag{13}$$

so liefert eine partielle Integration

$$2\int_{\mathfrak{X}} \delta\mathfrak{G}\, dx = \int_{\mathfrak{X}} \frac{\partial(\mathfrak{G}^{\alpha\beta,k}\delta g_{\alpha\beta})}{\partial x_k}\, dx + \int_{\mathfrak{X}} [\mathfrak{G}]^{\alpha\beta}\delta g_{\alpha\beta}\, dx.$$

Nun ist hier, wo die ξ konstant sind:

$$\delta g_{\alpha\beta} = -\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x_i}\xi^i.$$

Führen wir die Größen

$$\mathfrak{G}\delta_i^k - \tfrac{1}{2}\mathfrak{G}^{\alpha\beta,k}\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x_i} = \mathfrak{t}_i^k$$

ein, so besteht demnach die Gleichung

$$\int_{\mathfrak{X}} \left\{\frac{\partial \mathfrak{t}_i^k}{\partial x_k} - \tfrac{1}{2}[\mathfrak{G}]^{\alpha\beta}\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{d x_i}\right\}\xi^i\, dx = 0.$$

Da dies für ein beliebiges Gebiet $\mathfrak{X}$ gilt, muß der Integrand verschwinden. In ihm bedeuten die ξ^i willkürliche konstante Zahlen; also erhalten wir vier Identitäten:

$$\frac{1}{2}[\mathfrak{G}]^{\alpha\beta}\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x_i} = \frac{\partial t_i^k}{\partial x_k}.$$

Nach den Gravitationsgleichungen ist hier die linke Seite

$$= -\frac{1}{2}\mathfrak{T}^{\alpha\beta}\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x_i},$$

und die mechanischen Gleichungen (26) gehen infolgedessen über in

$$(56) \qquad \frac{\partial \mathfrak{U}_i^k}{\partial x_k} = 0, \qquad \text{wo } \mathfrak{U}_i^k = \mathfrak{T}_i^k + \mathfrak{t}_i^k.$$

Es zeigt sich: wenn wir die nur von den Potentialen und Feldkomponenten der Gravitation abhängigen $\mathfrak{t}_i^k$ als die Komponenten der *Energiedichte des Gravitationsfeldes* ansprechen, bekommen wir für die *gesamte*, mit »physikalischem Zustand« und »Gravitation« verknüpfte Energie reine Divergenzgleichungen[26]).

Dennoch scheint es physikalisch sinnlos zu sein, die $\mathfrak{t}_i^k$ als Energiekomponenten des Gravitationsfeldes einzuführen; denn diese Größen *bilden weder einen Tensor noch sind sie symmetrisch.* In der Tat können durch geeignete Wahl eines Koordinatensystems alle $\mathfrak{t}_i^k$ an einer Stelle stets zum Verschwinden gebracht werden; man braucht dazu das Koordinatensystem nur als ein geodätisches zu wählen. Und auf der andern Seite bekommt man in einer »Euklidischen«, völlig gravitationslosen Welt bei Benutzung eines krummlinigen Koordinatensystems $\mathfrak{t}_i^k$, die verschieden von 0 sind, wo doch von der Existenz einer Gravitationsenergie nicht wohl die Rede sein kann. Sind daher auch die Differentialrelationen (56) ohne wirkliche physikalische Bedeutung, so entsteht doch aus ihnen durch *Integration über ein isoliertes System* ein invarianter Erhaltungssatz[27]).

Ein isoliertes System mitsamt seinem Gravitationsfelde durchfegt während seiner Bewegung in der Welt einen Kanal. Außerhalb des Kanals, in der leeren Umwelt des Systems, verschwindet, wie wir annehmen, die Tensordichte $\mathfrak{T}_i^k$ und das Gravitationsfeld. Wir können dann solche Koordinaten $x_0 = t$, $x_1 x_2 x_3$ benutzen, daß die metrische Fundamentalform dort konstante Koeffizienten bekommt, insbesondere die Gestalt annimmt

$$dt^2 - (dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2).$$

Die Koordinaten sind dadurch außerhalb des Kanals bis auf eine lineare (Lorentz-) Transformation festgelegt, und es verschwinden dort auch die $\mathfrak{t}_i^k$. Wir nehmen an, daß jede der »Ebenen« $t =$ konst. mit dem Kanal nur einen endlichen Schnittbereich gemein hat. Integrieren wir die Gleichungen (56) nach $x_1 x_2 x_3$ über eine solche Ebene, so ergibt sich, daß die Größen

$$J_i = \int \mathfrak{U}_i^0 \, dx_1 \, dx_2 \, dx_3$$

unabhängig sind von der Zeit: $\frac{dJ_i}{dt} = 0$. Wir nennen J_0 die *Energie*, $J_1 J_2 J_3$ die *Impulskomponenten* des Systems.

Diese Größen haben eine vom Koordinatensystem unabhängige Bedeutung. Ich behaupte zunächst, daß sie ihren Wert behalten, wenn das Koordinatensystem *innerhalb des Kanals* irgendwie abgeändert wird. Seien $\bar{x}_i$ die neuen, außerhalb des Kanals mit den alten übereinstimmenden Koordinaten. Ich lege zwei »Flächen«

$$x_0 = \text{konst.} = a, \quad \text{bzw.} \quad \bar{x}_0 = \text{konst.} = \bar{a} \qquad (\bar{a} \neq a),$$

welche sich im Kanal nicht schneiden (es genügt dazu offenbar, a und $\bar{a}$ hinreichend verschieden voneinander zu wählen). Ich kann dann ein 3. Koordinatensystem x_i^* konstruieren, das in der Umgebung der ersten Fläche mit den x_i, in der Umgebung der zweiten Fläche mit den $\bar{x}_i$ und außerhalb des Kanals mit beiden übereinstimmt. Formulieren wir die Tatsache, daß die Energie-Impulskomponenten J_i^* in diesem System für $x_0^* = a$ und $x_0^* = \bar{a}$ die gleichen Werte annehmen, so ergibt sich das behauptete Resultat $J_i = \bar{J}_i$.

Infolgedessen braucht das Verhalten der J_i nur noch bei *linearer* Koordinatentransformation untersucht zu werden. Solchen gegenüber ist aber der Begriff eines Vektors mit konstanten (ortsunabhängigen) Komponenten invariant. Wir nehmen einen beliebigen Vektor p^i dieser Art zu Hilfe, bilden $\mathfrak{U}^k = \mathfrak{U}_i^k p^i$ und erschließen aus (56):

$$\frac{\partial \mathfrak{U}^k}{\partial x_k} = 0.$$

Durch die gleiche Argumentation, die oben auf den elektrischen Strom angewendet wurde, folgt daraus, daß

$$\int \mathfrak{U}^0 dx_1 dx_2 dx_3 = J_i p^i$$

eine Invariante gegenüber linearen Transformationen ist. *Die J_i sind demnach die Komponenten eines konstanten kovarianten Vektors in der »Euklidischen« Umwelt des Systems;* dieser Energie-Impuls-Vektor ist durch den Zustand des physikalischen Systems eindeutig bestimmt. Die Richtung desselben gibt im großen ganzen die Richtung an, in welcher sich der Kanal durch die Umwelt hindurchzieht (eine rein deskriptive Angabe, die schwer in eine exakte, der mathematischen Analyse zugängliche Form zu kleiden ist). Die Invariante

$$\sqrt{J_0^2 - J_1^2 - J_2^2 - J_3^2}$$

ist die *Masse* des Systems.

Im statischen Fall ist $J_1 = J_2 = J_3 = 0$ und J_0 gleich dem Raumintegral von $\mathfrak{R}_0^0 - (\frac{1}{2}\mathfrak{R} - \mathfrak{G})$. Nach § 29, bzw. nach § 28, S. 217 ist

$$\mathfrak{R}_0^0 = \frac{\partial \mathfrak{f}^i}{\partial x_i} \quad \text{und allgemein} \quad \tfrac{1}{2}\mathfrak{R} - \mathfrak{G} = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x_i}\sqrt{g}\left(g^{\alpha\beta}\begin{Bmatrix}\alpha\beta\\ i\end{Bmatrix} - g^{i\alpha}\begin{Bmatrix}\alpha\beta\\ \beta\end{Bmatrix}\right);$$

darum in den Bezeichnungen von § 29 und § 31 die Masse J_0 gleich dem Fluß der (uneigentlichen) räumlichen Vektordichte

$$(57) \qquad \mathfrak{m}^i = \mathfrak{f}^i - \tfrac{1}{2}\sqrt{\gamma}\left(\gamma^{\alpha\beta}\begin{Bmatrix}\alpha\beta\\ i\end{Bmatrix} - \gamma^{i\alpha}\begin{Bmatrix}\alpha\beta\\ \beta\end{Bmatrix}\right) \qquad (i\alpha\beta = 1, 2, 3),$$

die bei Verwendung der gewöhnlichen Einheiten noch mit $\frac{1}{8\pi\varkappa}$ zu multiplizieren ist. Da in großer Entfernung vom System stets die in § 31 ermittelte Lösung der Feldgesetze gültig ist, für welche $\mathfrak{w}^i$ ein radialer Strom von der Stärke

$$\frac{1-f^2}{8\pi\varkappa r} = \frac{m_0}{4\pi r^2}$$

ist, ergibt sich *die Energie oder träge Masse des Systems*, J_0, *gleich jener Masse* m_0, *welche für das vom System erzeugte Gravitationsfeld maßgebend ist*[28]). (Die Substanzphysik liefert hingegen als Massenwert das Raumintegral von μ/f, während in Wahrheit für inkohärente Materie $J_0 = m_0$ = dem Raumintegral von μ ist; das ist ein deutliches Anzeichen für die tiefe Fehlerhaftigkeit der ganzen Substanzvorstellung.)

§ 34. Über die Zusammenhangsverhältnisse der Welt im Großen.

Die allgemeine Relativitätstheorie läßt es durchaus dahingestellt, ob die Weltpunkte in umkehrbar-eindeutiger und stetiger Weise durch die Werte von 4 Koordinaten x_i dargestellt werden können. Sie setzt lediglich voraus, daß die *Umgebung* eines jeden Weltpunktes eine umkehrbar-eindeutige stetige Abbildung auf ein Gebiet des vierdimensionalen »Zahlenraumes« gestattet (wobei unter »Punkt des vierdimensionalen Zahlenraumes« jedes Zahlenquadrupel verstanden ist); über den Zusammenhang der Welt im ganzen macht sie von vornherein keine Annahmen. — Wenn wir in der Flächentheorie von einer Parameterdarstellung der zu untersuchenden Fläche ausgehen, so bezieht sich diese auch immer nur auf ein Flächenstück, nicht aber auf die ganze Fläche, die im allgemeinen keineswegs eindeutig und stetig auf die Euklidische Ebene oder ein ebenes Gebiet abgebildet werden kann. Von denjenigen Eigenschaften der Flächen, die bei allen eineindeutigen stetigen Abbildungen erhalten bleiben, handelt die *Analysis situs;* die *Geschlossenheit* ist z. B. eine derartige Analysis-situs-Eigenschaft. Jede Fläche, die aus der Kugel durch stetige Deformation hervorgeht, ist auf dem Standpunkt der Analysis situs von der Kugel nicht verschieden, wohl aber z. B. der Torus. Auf dem Torus gibt es nämlich geschlossene Linien, welche den Torus nicht in mehrere Gebiete zerlegen, auf einer Kugel existieren derartige Linien nicht. Aus der Geometrie auf der Kugel ging jene »sphärische Geometrie«, welche wir in § 10 mit Riemann der Bolyai-Lobatschefskyschen gegenüberstellten, dadurch hervor, daß wir je zwei einander diametral gegenüberliegende Kugelpunkte identifizierten. Die so entstehende Fläche $\mathfrak{F}$ ist von der Kugel gleichfalls im Sinne der Analysis situs verschieden, und zwar durch diejenige Eigenschaft, welche man als ihre Einseitigkeit bezeichnet. Denkt man sich ein kleines, auf einer Fläche liegendes, beständig im gleichen Sinne rotierendes Rädchen während der Rotation über diese Fläche hin-

bewegt, wobei der Mittelpunkt eine geschlossene Bahn beschreibe, so sollte man erwarten, wenn das Rädchen wieder an seinen Ausgangsort zurückkehrt, so rotiere es hier im gleichen Sinne wie im Anfang seiner Bewegung. Ist dies der Fall, welche geschlossene Kurve der Mittelpunkt des Rädchens auch auf der Fläche beschrieben haben mag, so heißt sie *zweiseitig*; im andern Falle aber *einseitig*. Daß es einseitige Flächen gibt, ist zuerst von Möbius bemerkt worden. Die oben erwähnte Fläche $\mathfrak{F}$ ist einseitig, während die Kugel natürlich zweiseitig ist. Man sieht das ohne weiteres ein, wenn man den Mittelpunkt des Rädchens einen größten Kreis durchlaufen läßt; auf der Kugel muß der *ganze* Kreis durchlaufen werden, ehe diese Bahn sich schließt, auf $\mathfrak{F}$ jedoch nur der *halbe*. — Ganz analog wie eine zweidimensionale kann nun auch eine vierdimensionale Mannigfaltigkeit sehr verschiedenerlei Analysis-situs-Beschaffenheit besitzen. Aber auf jeder vierdimensionalen Mannigfaltigkeit läßt sich die Umgebung eines Punktes gewiß in stetiger Weise durch 4 Koordinaten darstellen derart, daß verschiedenen Punkten dieser Umgebung immer verschiedene Koordinatenquadrupel korrespondieren. Genau in diesem Sinne ist die Benutzung der 4 Weltkoordinaten zu verstehen.

Von jedem Weltpunkt geht der Doppelkegel der aktiven Zukunft und der passiven Vergangenheit aus. Während in der speziellen Relativitätstheorie diese durch ein Zwischengebiet getrennt sind, ist es hier an sich sehr wohl möglich, daß der Kegel der aktiven Zukunft über den der passiven Vergangenheit hinübergreift; es kann also prinzipiell geschehen, daß ich jetzt Ereignisse miterlebe, die zum Teil erst eine Wirkung meiner künftigen Entschlüsse und Handlungen sind. Auch ist es nicht ausgeschlossen, daß eine Weltlinie, obschon sie in jedem Punkte zeitartige Richtung besitzt, insbesondere die Weltlinie meines Leibes, in die Nähe eines Weltpunktes zurückkehrt, den sie schon einmal passierte. Daraus würde dann ein radikaleres Doppelgängertum resultieren, als es je ein E. T. A. Hoffmann ausgedacht hat. Tatsächlich kommen ja so erhebliche Variabilitäten der g_{ik}, wie dazu erforderlich wären, in dem Weltgebiet, in welchem wir leben, nicht vor; doch hat es ein gewisses Interesse, diese Möglichkeiten durchzudenken mit Rücksicht auf das philosophische Problem des Verhältnisses von kosmischer und phänomenaler Zeit. So Paradoxes da zutage kommt, ein eigentlicher Widerspruch zu den in unserem Erleben unmittelbar gegebenen Tatsachen tritt nirgendwo hervor.

In § 26 sahen wir, daß ohne Berücksichtigung der Gravitation die elektrodynamischen Grundgesetze (nach Mie) eine solche Gestalt besitzen, wie sie durch das *Kausalitätsprinzip* gefordert ist: die Ableitungen der Zustandsgrößen nach der Zeit drücken sich aus durch diese Größen selber und ihre räumlichen Differentialquotienten. Diese Tatsachen bleiben bestehen, wenn wir die Gravitation mit hereinziehen und somit die Tabelle der Zustandsgrößen φ_i, F_{ik} durch die g_{ik} und $\left\{ {ik \atop r} \right\}$ erweitern. Wegen der allgemeinen Invarianz der Naturgesetze muß aber die Behauptung

dahin formuliert werden, daß aus den Werten der Zustandsgrößen für einen Moment alle diejenigen Aussagen über sie, *welche invarianten Charakter tragen*, auf Grund der Naturgesetze folgen; und es muß ferner beachtet werden, daß diese Behauptung sich nicht auf die Welt als Ganzes, sondern nur jeweils auf einen durch 4 Koordinaten darstellbaren Ausschnitt beziehen kann. Wir verfahren mit Hilbert folgendermaßen[29]. In der Umgebung des Weltpunktes O führen wir 4 Koordinaten x_i ein, so daß in O selber

$$ds^2 = dx_0^2 - (dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2)$$

wird. Wir können in dem dreidimensionalen Raum $x_0 = 0$ um O eine solche Umgebung $\mathfrak{R}$ abgrenzen, daß in ihr durchweg $-ds^2$ positiv-definit bleibt. Durch jeden Punkt dieser Umgebung ziehen wir die zu jenem Raum orthogonale geodätische Weltlinie, die zeitartige Richtung besitzt. Diese werden eine gewisse vierdimensionale Umgebung von O einfach überdecken. Wir führen jetzt neue Koordinaten ein, die freilich in dem dreidimensionalen Raum $\mathfrak{R}$ mit den bisherigen übereinstimmen; wir schreiben nämlich demjenigen Punkte P, zu welchem wir gelangen, wenn wir von dem Punkt $P_0 = (x_1\, x_2\, x_3)$ in $\mathfrak{R}$ auf der durch ihn hindurchlaufenden orthogonalen geodätischen Weltlinie so weit gehen, daß die Eigenzeit des durchlaufenen Bogens $P_0 P$ gleich x_0 ist, jetzt die Koordinaten $x_0\, x_1\, x_2\, x_3$ zu. Dieses System von Koordinaten ist von Gauß in der Flächentheorie eingeführt worden. Da auf jeder der geodätischen Linien $ds^2 = dx_0^2$ ist, muß bei Benutzung dieses Koordinatensystems identisch in allen vier Koordinaten

$$g_{00} = 1 \tag{58}$$

sein. Weil die Linien orthogonal sind zu dem dreidimensionalen Raum $x_0 = 0$, ist für $x_0 = 0$:

$$g_{01} = g_{02} = g_{03} = 0. \tag{59}$$

Da ferner diejenigen Linien, welche man erhält, wenn man $x_1\, x_2\, x_3$ konstant läßt und nur x_0 variiert, geodätisch sind, muß (siehe die Gleichung der geodätischen Linien)

$$\begin{Bmatrix} 0\,0 \\ i \end{Bmatrix} = 0 \qquad (i = 0,\ 1,\ 2,\ 3)$$

werden, mithin auch

$$\begin{bmatrix} 0\,0 \\ i \end{bmatrix} = 0.$$

Unter Berücksichtigung von (58) folgt daraus

$$\frac{\partial g_{0i}}{\partial x_0} = 0 \qquad (i = 1,\ 2,\ 3),$$

und wegen (59) ist infolgedessen nicht nur für $x_0 = 0$, sondern identisch in allen vier Koordinaten

$$g_{0i} = 0 \qquad (i = 1,\ 2,\ 3). \tag{60}$$

Wir haben folgende Figur vor uns: eine Schar von geodätischen Linien mit zeitartiger Richtung, welche ein gewisses Weltgebiet einfach und lückenlos überdecken und eine ebensolche einparametrige Schar von dreidimensionalen Räumen x_0 = konst. Gemäß (60) sind diese beiden Scharen überall zueinander orthogonal; und die auf den geodätischen Linien durch zwei der »parallelen« Räume x_0 = konst. abgeschnittenen Bogenstücke haben alle die gleiche Eigenzeit. Benutzen wir dieses besondere Koordinatensystem, so ist

$$\frac{\partial g_{ik}}{\partial x_0} = -2 \left\{ {i\,k \atop 0} \right\} \qquad (i, k = 1, 2, 3),$$

und die Gravitationsgleichungen gestatten, die Ableitungen

$$\frac{\partial}{\partial x_0} \left\{ {i\,k \atop 0} \right\} \qquad (i, k = 1, 2, 3)$$

außer durch die φ_i und ihre Ableitungen auszudrücken durch die g_{ik}, deren Ableitungen 1. und 2. Ordnung nach $x_1\, x_2\, x_3$ und die $\left\{ {i\,k \atop 0} \right\}$ selber. Indem wir also die 12 Größen

$$g_{ik}, \qquad \left\{ {i\,k \atop 0} \right\} \qquad (i, k = 1, 2, 3)$$

neben den elektromagnetischen als die Unbekannten betrachten, geht das gewünschte Resultat hervor (wobei x_0 die Rolle der Zeit spielt). Der von einem Punkt O' mit positiver x_0-Koordinate gelegte Kegel der passiven Vergangenheit wird aus $\mathfrak{R}$ ein gewisses Stück $\mathfrak{R}'$ herausschneiden, das mit dem Mantel jenes Kegels zusammen ein endliches Weltgebiet $\mathfrak{G}$ (eine Kegelhaube mit Spitze in O') begrenzt. Wenn unsere Behauptung, daß die geodätischen Nullinien die Einsatzpunkte jeder Wirkung bezeichnen, streng richtig ist, muß der Satz gelten, daß durch die Werte der erwähnten 12 Größen, dazu der elektromagnetischen Potentiale φ_i und Feldgrößen F_{ik} in dem dreidimensionalen Raumgebiet $\mathfrak{R}'$ deren Werte im Weltgebiet $\mathfrak{G}$ vollständig bestimmt sind. Es ist bisher nicht bewiesen worden. *Auf jeden Fall aber erkennt man, daß die Differentialgleichungen des Feldes die vollständigen Naturgesetze enthalten* und nicht etwa noch eine weitere Eingrenzung durch Randbedingungen im räumlich-Unendlichen oder dgl. stattfinden kann.

Einstein gelangte bei kosmologischen Betrachtungen über den Zusammenhang der Welt im großen [30]) zu der Vermutung, daß sie räumlich geschlossen sei. Wie in der Newtonschen Gravitationstheorie das in der Poissonschen Gleichung ausgesprochene Nahewirkungsgesetz das Newtonsche Attraktionsgesetz nur nach sich zieht, wenn man die Bedingung hinzufügt, daß das Gravitationspotential im Unendlichen verschwindet, so sucht Einstein zunächst auch in seiner Theorie die Differentialgleichungen durch Randbedingungen im räumlich-Unendlichen zu ergänzen. Der Unmöglichkeit gegenüber, solche Bedingungen allgemein invarianten Charakters zu formulieren, welche mit den astronomischen Tatsachen im Einklang

stehen, findet er als einzigen Ausweg die Annahme, daß die Welt räumlich geschlossen sei; denn unter dieser Annahme fallen Randbedingungen natürlich fort. Dieser Argumentation kann ich zufolge dem oben Ausgeführten keine Beweiskraft zugestehen, da die Differentialgleichungen für sich schon ohne Randbedingungen die vollständigen, jede Unbestimmtheit ausschließenden Naturgesetze enthalten. Um so mehr Gewicht besitzt eine andere Überlegung, die von der Frage ausgeht: Wie kommt es, daß unser Fixsternsystem, mit relativen Sterngeschwindigkeiten, die außerordentlich klein sind (gegen die Lichtgeschwindigkeit), besteht und sich erhält und nicht längst in die Unendlichkeit auseinander gestoben ist? Es gewährt dieses System durchaus den gleichen Anblick, wie ihn die Moleküle eines im Gleichgewicht befindlichen Gases einem Beobachter von entsprechend kleineren Dimensionen darbieten würden. Auch im Gas ruhen die einzelnen Moleküle nicht, aber unter den Geschwindigkeiten sind gemäß dem Maxwellschen Verteilungsgesetz die kleinen ganz außerordentlich viel zahlreicher vertreten als die großen, und die Verteilung der Moleküle über das Gasvolumen ist eine im Mittel gleichmäßige, so daß beobachtbare grobe Dichteverschiedenheiten außerordentlich selten sind. Ist diese Analogie stichhaltig, so könnten wir den Zustand des Fixsternsystems und seines Gravitationsfeldes nach den gleichen *statistischen Prinzipien* verstehen, die uns lehren, daß ein abgeschlossenes Gas sich fast immer im Gleichgewichtszustand befindet. Das wäre aber nur dann möglich, wenn die *gleichmäßige Verteilung ruhender Sterne in einem statischen Gravitationsfeld* als idealer Gleichgewichtszustand mit den Gravitationsgesetzen verträglich ist. In einem statischen Gravitationsfeld ist die Weltlinie eines ruhenden Massenpunktes, d. h. eine Linie, auf welcher $x_1 x_2 x_3$ konstant bleiben und nur x_0 variiert, eine geodätische, wenn

$$\left\{ {0\,0 \atop i} \right\} = 0 \qquad (i = 1, 2, 3)$$

und daher

$$\left[{0\,0 \atop i} \right] = 0, \qquad \frac{\partial g_{00}}{\partial x_i} = 0$$

ist. Eine ruhende Massenverteilung ist mithin nur dann möglich, wenn

$$\sqrt{g_{00}} = f = \text{konst.} = 1$$

ist. Die Gleichung

$$\Delta f = \tfrac{1}{2}\mu \qquad (\mu = \text{Massendichte}) \tag{32}$$

zeigt dann aber, daß der ins Auge gefaßte ideale Gleichgewichtszustand mit den Gravitationsgesetzen, wie wir sie bisher angenommen haben, *unverträglich* ist.

Bei der Herleitung der Gravitationsgleichungen in § 28 haben wir aber eine kleine Unterlassungssünde begangen. Es ist nicht R die einzige von g_{ik}, ihren 1. und 2. Differentialquotienten abhängige und in den letzteren lineare Invariante, sondern die allgemeinste Invariante dieser

Art hat die Gestalt $\alpha R + \beta$, wo α und β numerische Konstante sind. Infolgedessen können wir die Gravitationsgesetze so verallgemeinern, daß wir R durch $R + \lambda$ ($\mathfrak{G}$ durch $\mathfrak{G} + \frac{1}{2}\lambda\sqrt{g}$) ersetzen, wo λ eine universelle Konstante bedeutet. Ist sie nicht $= 0$, wie wir bis anhin vorausgesetzt haben, sondern $\neq 0$, so können wir sie $= 1$ nehmen; dadurch wird dann, nachdem durch das Relativitätsprinzip die Zeiteinheit, durch das Gravitationsgesetz die Masseneinheit auf die der Länge zurückgeführt war, auch noch die Längeneinheit in absoluter Weise festgelegt. Bei dieser Modifikation ergeben die Gravitationsgleichungen für ruhende inkohärente Materie ($\mathfrak{T}_0^0 = \mu = \mu_0 \sqrt{g}$, alle übrigen Komponenten der Tensordichte $\mathfrak{T} = 0$) unter Benutzung der Gleichung $f = 1$ und der Bezeichnungen aus § 29:

$$\lambda = \mu_0 \quad \text{[an Stelle von (32)] und}$$

$$(61) \qquad \mathrm{P}_{ik} - \lambda\gamma_{ik} = 0. \qquad (i, k = 1, 2, 3).$$

Jener ideale Gleichgewichtszustand ist unter diesen Umständen also möglich, wenn die Masse sich mit der Dichte λ verteilt. Der Raum muß dann metrisch homogen sein; und in der Tat sind die Gleichungen (61) erfüllt für einen sphärischen Raum vom Radius $a = \sqrt{2/\lambda}$. Wir können also im Raum vier an die Bedingung

$$(62) \qquad x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = a^2$$

geknüpfte Koordinaten einführen, für die

$$d\sigma^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 + dx_4^2$$

wird. *Der Raum stellt sich als geschlossen und daher endlich heraus.* Wenn dieses nicht der Fall wäre, könnte man sich auch kaum vorstellen, wie ein statistisches Gleichgewicht zustande kommen sollte. Wenn die Welt räumlich geschlossen ist, ist es möglich, daß ein Beobachter von einem und demselben Stern mehrere Bilder am Himmel erblickt, welche ihm den Stern in Epochen zeigen, die durch ungeheure Zeiträume (während welcher das Licht einmal rund um die Welt läuft) voneinander getrennt sind. Noch wäre zu fragen, ob die Punkte des Raumes den der Bedingung (62) genügenden Wertequadrupeln x_i umkehrbar-eindeutig entsprechen oder ob je zwei Wertsystemen

$$(x_1 x_2 x_3 x_4) \quad \text{und} \quad (-x_1, -x_2, -x_3, -x_4)$$

derselbe Punkt entspricht. Diese beiden Möglichkeiten sind analysis-situsmäßig verschieden, wenngleich beide Räume (im Gegensatz zum zweidimensionalen Fall) zweiseitig sind. Je nachdem die eine oder andere zutrifft, wäre die Gesamtmasse der Welt in gr:

$$\frac{\pi a}{2\varkappa}, \quad \text{bzw.} \quad \frac{\pi a}{4\varkappa}.$$

Unsere Erklärung verlangt also, daß die in der Welt zufällig vorhandene Gesamtmasse in einer ganz bestimmten Beziehung zu der in das Wirkungs-

gesetz eingehenden universellen Konstanten $\lambda = \frac{2}{a^2}$ steht; das ist natürlich eine harte Zumutung.

Die zentral-symmetrischen Lösungen der modifizierten homogenen Gravitationsgleichungen, die einer masseleeren Welt entsprechen würden, ergeben sich aus dem Variationsprinzip (Bezeichnungen siehe § 31):

$$\delta \int (2w\Delta' + \lambda \Delta r^2)\, dr = 0 .$$

Die Variation von w ergibt wie früher $\Delta = 1$; die Variation von Δ hingegen

$$w' = \frac{\lambda}{2} r^2 . \tag{63}$$

Verlangen wir Regularität bei $r = 0$, so folgt daraus

$$w = \frac{\lambda}{6} r^3 ,$$

$$\frac{1}{h^2} = f^2 = 1 - \frac{\lambda}{6} r^2 . \tag{64}$$

Der Raum läßt sich kongruent auf eine »Sphäre«

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 3a^2 \tag{65}$$

vom Radius $a\sqrt{3}$ im vierdimensionalen Euklidischen Raum abbilden (wobei unserm Zentrum einer der beiden Pole auf der Sphäre entspricht, dessen erste drei Koordinaten $x_1, x_2, x_3 = 0$ sind). Die Welt ist ein über dieser Sphäre in Richtung einer 5. Koordinatenachse t errichteter Zylinder. Aber da f auf der »größten Kugel« $x_4 = 0$, welche man als Äquator oder Raumhorizont für jenes Zentrum bezeichnen könnte, $= 0$ wird, daselbst die metrische Fundamentalform der Welt also singulär wird, so sieht man, daß die Möglichkeit einer statischen leeren Welt den Naturgesetzen, die wir hier als gültig betrachten, widerstreitet. Zum mindesten am Horizont müssen sich Massen befinden. Die Rechnung läßt sich am einfachsten durchführen, wenn wir (lediglich zur Orientierung) dort eine inkompressible Flüssigkeit annehmen. Das zu lösende Variationsproblem lautet nach § 32 bei Verwendung der damaligen Bezeichnungen und unter Hinzufügung des λ-Gliedes

$$\delta \int \left\{ \Delta' w + \left(\mu_0 + \frac{\lambda}{2}\right) r^2 \Delta - r^2 v h \right\} dr = 0 ;$$

gegen früher ist also nur die Änderung eingetreten, daß die Konstante μ_0 durch $\mu_0 + \frac{\lambda}{2}$ zu ersetzen ist. Wie dort folgt

$$w' - \left(\mu_0 + \frac{\lambda}{2}\right) r^2 = 0 , \quad w = -2M + \frac{2\mu_0 + \lambda}{6} r^3 ,$$

$$\frac{1}{h^2} = 1 + \frac{2M}{r} - \frac{2\mu_0 + \lambda}{6} r^2 . \tag{66}$$

Befindet sich die Flüssigkeit zwischen den beiden Breitenkugeln $x_4 =$ konst., welche den Radius r_0 ($< a\sqrt{3}$) besitzen, so verlangt der stetige Anschluß an (64), daß die Konstante

$$M = \frac{\mu_0}{6} r_0^3$$

ist. $\frac{1}{h^2}$ wird (in erster Ordnung) o für einen Wert $r = b$ zwischen r_0 und $a\sqrt{3}$. Der Raum läßt sich daher immer noch auf die Sphäre (65) abbilden, aber diese Abbildung ist in der von Flüssigkeit erfüllten Zone nicht mehr kongruent. Die Gleichung für Δ (S. 241) liefert jetzt ein f, das auf dem Äquator nicht verschwindet. Die Grenzbedingung verschwindenden Drucks ergibt eine transzendente Relation zwischen μ_0 und r_0, aus welcher hervorgeht: soll der Massenhorizont beliebig schmal genommen werden, so muß die zur Verwendung kommende Flüssigkeit eine entsprechend große Dichte haben derart, daß die Gesamtmasse nicht unter eine gewisse positive Grenze sinken kann[31]).

Die allgemeine Lösung von (63) lautet

$$\frac{1}{h^2} = f^2 = 1 - \frac{2m}{r} - \frac{\lambda}{6} r^2 \qquad (m = \text{konst.}).$$

Sie entspricht dem Fall, daß um das Zentrum eine Massenkugel liegt. Nur in einer Zone $r_0 \leqq r \leqq r_1$, in welcher dieses f^2 positiv ist, kann die Welt masseleer sein; es ist wiederum ein Massenhorizont erforderlich. Ebenso, wenn die Zentralmasse elektrisch geladen ist; denn es ist auch dann $\Delta = 1$. In dem Ausdruck für $\frac{1}{h^2} = f^2$ tritt das elektrische Glied $+\frac{e^2}{r^2}$ hinzu, und das elektrostatische Potential ist $= \frac{e}{r}$.

Vielleicht sind wir, den eben angestellten Betrachtungen nachhängend, allzusehr den Lockungen einer sich ins Leere emporschwingenden Phantasie gefolgt. Doch helfen sie verdeutlichen, was alles auf Grund der neu gewonnenen Auffassungen über Raum und Zeit im Bereiche der *Möglichkeit* liegt. Die ihnen zugrunde liegende Annahme ist jedenfalls die einfachste, auf Grund deren es verständlich werden kann, daß in der tatsächlich vorgefundenen Welt hinsichtlich des elektromagnetischen und des Gravitationsfeldes im Großen statische Verhältnisse herrschen und daß gerade diejenigen Lösungen der statischen Gleichungen gelten, welche im Unendlichen verschwinden bzw. gegen die Euklidische Metrik konvergieren. Auf der Sphäre werden nämlich jene Gleichungen eine einzige Lösung besitzen (hier kommen Randbedingungen gar nicht in Frage, sie werden ersetzt durch die Forderung der Regularität auf dem ganzen geschlossenen Gebilde); lassen wir die Konstante λ beliebig klein werden, konvergiert die sphärische Lösung gegen diejenige in der beim Grenzübergang sich ergebenden unendlichen Welt, welche im Unendlichen die erwähnten Grenzbedingungen befriedigt.

Eine metrisch homogene Welt erhält man am einfachsten, wenn man in einem fünfdimensionalen Raum mit der metrischen Fundamentalform $ds^2 = -\Omega(dx)$ — es bedeutet Ω eine nicht-ausgeartete quadratische Form mit konstanten Koeffizienten — den durch die Gleichung $\Omega(x) = \frac{6}{\lambda}$ definierten vierdimensionalen »Kegelschnitt« betrachtet. Dieser Ansatz liefert also eine Lösung der durch das λ-Glied modifizierten Einsteinschen Gravitationsgleichungen bei fehlenden Massen. Soll die sich ergebende metrische Fundamentalform der Welt, wie es sein muß, eine positive und drei negative Dimensionen besitzen, so hat man für Ω eine Form mit vier positiven und einer negativen Dimension zu nehmen; also

$$\Omega(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 - x_5^2 .$$

Diese Lösung läßt sich übrigens durch eine einfache Substitution in die oben gefundene statische überführen. Wenn man nämlich

$$x_4 = z \cdot \mathrm{Cos}\, t, \qquad x_5 = z \cdot \mathrm{Sin}\, t$$

setzt, so kommt

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + z^2 = \frac{6}{\lambda}, \quad - ds^2 = (dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 + dz^2) - z^2 dt^2 .$$

Es gelangt durch die »neuen« z, t-Koordinaten aber nur der »keilförmige« Ausschnitt $x_4^2 - x_5^2 > 0$ zur Darstellung. Auf der »Schneide« des Keils (wo gleichzeitig $x_4 = 0$, $x_5 = 0$ ist) wird t unbestimmt. Diese Schneide, die in den ursprünglichen Koordinaten als ein zweidimensionales Gebilde erscheint, ist daher in den neuen dreidimensional: der über dem Äquator $z = 0$ der Sphäre (65) in Richtung der t-Achse errichtete Zylinder. Es fragt sich, ob das erste oder das zweite Koordinatensystem dasjenige ist, welches in regulärer Weise die ganze Welt zur Darstellung bringt. Im ersten Falle wäre die Welt als Ganzes nicht statisch, und es vertrüge sich mit den Naturgesetzen, daß sie masseleer ist; diese Annahme verfolgt de Sitter[32]). Im zweiten Fall haben wir eine statische Welt, die ohne einen Massenhorizont nicht möglich ist; dieser von uns hier genauer diskutierten Annahme gibt Einstein den Vorzug.

§ 35. Die Weltmetrik als Ursprung der elektromagnetischen Erscheinungen[33]).

Wir erheben uns zu einer letzten Synthese. Um den physikalischen Zustand der Welt an einer Weltstelle durch Zahlen charakterisieren zu können, muß nicht nur die Umgebung dieser Stelle auf ein Koordinatensystem bezogen, sondern müssen außerdem gewisse Maßeinheiten festgelegt werden. Es gilt, eine ebenso prinzipielle Stellungnahme zu diesem zweiten Punkt, der Willkürlichkeit der Maßeinheiten, zu gewinnen, wie sie die in den vorigen Paragraphen dargestellte Einsteinsche Theorie hinsichtlich des ersten Punktes, der Willkürlichkeit des Koordinatensystems, einnimmt. Auf die Geometrie und den Begriff der Strecke angewendet

(Kap. II), bewirkte dieser Gedanke, nachdem der Schritt von der Euklidischen zur Riemannschen Geometrie vollzogen worden, den endgültigen Durchbruch zur reinen Infinitesimalgeometrie. Nehmen wir an, mit allen Überbleibseln der »Fernvorstellungen« aufräumend, daß die Weltgeometrie von dieser Art ist, so erscheint die Weltmetrik außer von der quadratischen (1) noch von einer linearen Differentialform $\varphi_i dx_i$ abhängig.

Diese Erweiterung betrifft zunächst nur, genau so wie der von der speziellen zur allgemeinen Relativitätstheorie führende Schritt, das weltgeometrische Fundament der Physik. — Die Newtonsche Mechanik wie auch die spezielle Relativitätstheorie nahmen an, daß die gleichförmige Translation ein ausgezeichneter Bewegungszustand eines Achsenkreuzes von Vektoren ist, daß also die Lage der Achsen in einem Moment ihre Lage in allen andern Momenten bestimmt. Dies ist aber mit dem evidenten Prinzip der *Relativität der Bewegung* unverträglich. Doch konnten wir, ohne in krassesten Konflikt mit den Tatsachen zu kommen, diesem Prinzip nur dann genügen, wenn wir den Begriff der *infinitesimalen* Parallelverschiebung eines Vektorkreuzes aufrecht erhielten; aber wir mußten den *affinen Zusammenhang*, welcher diese Verschiebung bestimmt, als etwas physikalisch Wirkliches ansehen, das in naturgesetzlicher Abhängigkeit von den Zuständen der Materie steht (»*Führungsfeld*«). Die empirisch bekannten Eigenschaften der *Gravitation*, namentlich die Gleichheit der trägen und schweren Masse, lehrten endlich, daß im Führungsfeld außer der Trägheit auch die Gravitation schon mitenthalten ist; und so gewann die allgemeine Relativitätstheorie über ihre ursprüngliche *weltgeometrische* hinaus noch eine spezifisch *physikalische* Bedeutung. — Von der gleichen Evidenz wie die Relativität der Bewegung ist das Prinzip von der *Relativität der Größe*; man muß den Mut haben, dieses Prinzip, nach welchem durch die Größe eines Körpers in einem Augenblick seine Größe in einem andern Moment ideell nicht bestimmt ist, trotz der Existenz der starren Körper aufrecht zu erhalten*). Aber man wird es, ohne mit solchen grundlegenden Tatsachen in krassen Widerspruch zu kommen, nicht durchführen können, wenn man nicht an dem Begriff der *infinitesimalen* kongruenten Verpflanzung dennoch festhalten wollte; d. h. man wird der Welt außer ihrer *Maßbestimmung* in jedem Punkte einen *metrischen Zusammenhang* zuschreiben müssen. Nur darf man darin keine »geometrische« Eigenschaft erblicken, die der Welt als Form der Erscheinungen an sich zukommt, sondern ein Zustandsfeld von physikalischer Realität. Werden wir also durch die Tatsache der Wirkungsausbreitung und die starren Körper dazu geführt, den affinen Zusammenhang auf die eine Schicht tiefer gelegene Weltbeschaffenheit der *Metrik* zu fundieren, so liegt es sehr nahe, nicht

*) Es sei in diesem Zusammenhang daran erinnert, daß das räumliche Richtungsbild, das ein Punktauge mit gegebener Weltlinie in jedem Augenblick von einem gegebenen Weltgebiet empfängt, nur vom Verhältnis der g_{ik} abhängt, da dies von den für die Ausbreitung des Lichtes maßgebenden geodätischen Nullinien gilt.

nur die Koeffizienten der quadratischen Fundamentalform $g_{ik} dx_i dx_k$ mit den Potentialen des Gravitationsfeldes, sondern außerdem *die Koeffizienten der linearen Fundamentalform* $\varphi_i dx_i$ *mit den elektromagnetischen Potentialen zu identifizieren.* Dann entspringen auch das elektromagnetische Feld und die elektromagnetischen Kräfte aus der Weltmetrik. Nun sind uns in der Natur aber gar keine andern wahrhaft ursprünglichen Kraftwirkungen bekannt außer der Gravitation und den elektromagnetischen; von allen andern weiß die statistische Physik plausibel zu machen, daß sie durch Mittelwertbildung auf diese zurückgeführt werden können. Wir kommen damit zu der Konsequenz: *Die Welt ist eine* $(3+1)$*-dimensionale metrische Mannigfaltigkeit; alle physikalischen Feld-Erscheinungen sind Äußerungen der Weltmetrik.* (Während die alte Auffassung besagte: Das vierdimensionale metrische Weltkontinuum gibt den Schauplatz der physikalischen Erscheinungen ab; die physikalischen Wesenheiten selber aber sind etwas, was »in« dieser Welt existiert, und wir müssen sie nach Art und Zahl so hinnehmen, wie die Erfahrung sie uns kennen lehrt; es gibt da nichts weiter zu »begreifen«.) Synonym mit dem Worte Metrik wollen wir den Terminus »Zustand des Weltäthers« gebrauchen, um dadurch den realen Charakter der Metrik anzudeuten; doch darf man sich durch diesen Ausdruck nicht zu falschen Bildern verführen lassen. In dieser Terminologie besagt der Fundamentalsatz der Infinitesimalgeometrie, daß das Führungsfeld und damit die Gravitation durch den Zustand des Äthers bestimmt ist. Der Gegensatz von »physikalischem Zustand« und »Gravitation«, der in § 28 aufgestellt wurde und sich dort am deutlichsten in der Zweiteilung der Hamiltonschen Funktion ausspricht, wird durch die neue Auffassung überwunden und ein völlig einheitlicher und in sich folgerichtiger Standpunkt gewonnen. Der Traum des Descartes von einer rein geometrischen Physik scheint in wunderbarer, von ihm selbst freilich gar nicht vorauszusehender Weise in Erfüllung zu gehen. Scharf sondern sich die Intensitäts- von den Quantitätsgrößen.

Die lineare Fundamentalform $\varphi_i dx_i$ ist nur bestimmt bis auf ein additiv hinzutretendes totales Differential, erst der aus ihr sich ableitende Tensor der Streckenkrümmung

$$f_{ik} = \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_k} - \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_i}$$

ist frei von Willkür. Genau so steht es nach der Maxwellschen Theorie mit der elektromagnetischen Potentialform; der elektromagnetische Feldtensor, welchen wir früher mit F_{ik} bezeichnet haben, ist jetzt zu identifizieren mit der Streckenkrümmung f_{ik}. Das 1. System der Maxwellschen Gleichungen

$$\frac{\partial f_{ik}}{\partial x_l} + \frac{\partial f_{kl}}{\partial x_i} + \frac{\partial f_{li}}{\partial x_k} = 0 \tag{67}$$

ist, wenn unsere Auffassung vom Wesen der Elektrizität zutrifft, ein Wesensgesetz, dessen Gültigkeit noch völlig unabhängig davon ist, welche

Naturgesetze den Wertverlauf der physikalischen Zustandsgrößen in der Wirklichkeit beherrschen. In einer vierdimensionalen metrischen Mannigfaltigkeit ist die einfachste Integralinvariante, welche überhaupt existiert,

$$\int \mathfrak{l}\, dx = \frac{1}{4}\int f_{ik}\mathfrak{f}^{ik}\, dx, \tag{68}$$

und gerade sie liegt als Wirkungsgröße der Maxwellschen Theorie zugrunde! Wir dürfen demnach wohl behaupten, daß der gesamte Erfahrungsschatz, der in der Maxwellschen Theorie niedergelegt ist, zugunsten der weltmetrischen Natur der Elektrizität spricht. Und da sich in einer Mannigfaltigkeit von mehr oder weniger als 4 Dimensionen überhaupt keine Integralinvariante von so einfachem Bau konstruieren läßt, eröffnet der neue Gesichtspunkt nicht bloß ein tieferes Verständnis für die Maxwellsche Theorie, sondern es wird von ihm aus auch der bisher immer als »zufällig« hingenommene Umstand begreiflich, daß die Welt vierdimensional ist. In der linearen Fundamentalform $\varphi_i dx_i$ bleibt willkürlich eine additiv hinzutretendes totales Differential, nicht aber ein Proportionalitätsfaktor; die Wirkungsgröße ist eine reine Zahl. So muß es aber auch sein, wenn die Theorie im Einklang sein soll mit derjenigen atomistischen Struktur der Welt, welcher nach den Ergebnissen der jüngsten Zeit (Quantentheorie) die fundamentalste Bedeutung zukommt.

Der *statische Fall* liegt vor, wenn sich Koordinatensystem und Eichung so wählen lassen, daß die lineare Fundamentalform $= \varphi\, dx_0$ wird, die quadratische

$$= f^2 dx_0^2 - d\sigma^2;$$

dabei sind φ und f von der Zeit x_0 nicht abhängig, sondern nur von den Raumkoordinaten $x_1 x_2 x_3$, $d\sigma^2$ ist eine positiv-definite quadratische Differentialform in den drei Raumvariablen. Diese besondere Gestalt der Fundamentalform wird (von ganz speziellen Fällen abgesehen) durch Koordinatentransformation und Umeichen nur dann nicht zerstört, wenn x_0 für sich eine lineare Transformation erleidet, die Raumkoordinaten gleichfalls nur unter sich transformiert werden und das Eichverhältnis eine Konstante ist. Im statischen Fall haben wir also einen dreidimensionalen Riemannschen Raum mit der metrischen Fundamentalform $d\sigma^2$ und zwei Skalarfelder in ihm: das elektrostatische Potential φ und das Gravitationspotential oder die Lichtgeschwindigkeit f. Als willkürliche Maßeinheiten sind zu wählen die Längen- und die Zeiteinheit (cm, sec); $d\sigma^2$ ist von der Dimension cm^2, f von der Dimension cm · sec^{-1}, und φ hat die Dimension sec^{-1}. Soweit in der allgemeinen Relativitätstheorie überhaupt von einem Raum die Rede sein kann (nämlich im statischen Fall), stellt sich dieser also, wie wohl zu beachten ist, als ein *Riemannscher* heraus und nicht als ein metrischer Raum jener allgemeineren Beschaffenheit, in welchem die Streckenübertragung nicht integrabel ausfällt.

Wir kommen auf die spezielle Relativitätstheorie zurück, wenn sich Koordinaten und Eichung so wählen lassen, daß

$$ds^2 = dx_0^2 - (dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2)$$

wird. Sind x_i, $\bar{x}_i$ zwei Koordinatensysteme, für welche sich diese Normalform von ds^2 erzielen läßt, so ist der Übergang von x_i zu $\bar{x}_i$ eine konforme Transformation, d. h. es ist

$$dx_0^2 - (dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2) \text{ bis auf einen Proportionalitätsfaktor}$$
$$= d\bar{x}_0^2 - (d\bar{x}_1^2 + d\bar{x}_2^2 + d\bar{x}_3^2).$$

Die konformen Transformationen der vierdimensionalen Minkowskischen Welt fallen zusammen mit den Kugelverwandtschaften [34]), d. h. denjenigen Abbildungen, welche jede »Kugel« der Welt wieder in eine Kugel verwandeln. Eine Kugel wird dargestellt durch eine lineare homogene Gleichung zwischen den homogenen »hexasphärischen« Koordinaten

$$u_0 : u_1 : u_2 : u_3 : u_4 : u_5 = x_0 : x_1 : x_2 : x_3 : \frac{(xx)+1}{2} : \frac{(xx)-1}{2},$$
$$[(xx) = x_0^2 - (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)]$$

welche an die Bedingung

$$u_0^2 - u_1^2 - u_2^2 - u_3^2 - u_4^2 + u_5^2 = 0$$

gebunden sind. Die Kugelverwandtschaften drücken sich daher aus als solche lineare homogene Transformationen der u_i, welche diese Bedingungsgleichung invariant lassen. Die Maxwellschen Gleichungen im Äther, wie sie in der speziellen Relativitätstheorie gelten, sind daher nicht bloß invariant gegenüber der 10-parametrigen Gruppe der linearen Lorentz-Transformationen, sondern sogar gegenüber der umfassenderen 15-parametrigen Gruppe der Kugelverwandtschaften [35]).

Um zu prüfen, ob die neue Hypothese über das Wesen des elektromagnetischen Feldes die Erscheinungen zu erklären vermag, müssen wir ihre Konsequenzen ziehen. Als Naturgesetz wird dabei ein Hamiltonsches Prinzip fungieren, welches besagt, daß die Änderung der Wirkungsgröße $\int \mathfrak{W}\, dx$ bei jeder unendlich kleinen Variation der Weltmetrik, die außerhalb eines endlichen Gebiets verschwindet, Null ist. Die Wirkungsgröße ist eine Invariante, $\mathfrak{W}$ demnach eine aus der Metrik entspringende skalare Dichte (im eigentlichen Sinne). Mie, Hilbert und Einstein setzten die Wirkungsgröße als eine Invariante gegenüber Koordinatentransformation voraus; hier tritt die weitere Einschränkung hinzu, daß sie auch invariant sein muß gegenüber dem Prozeß des Umeichens, bei welchem φ_i, g_{ik} ersetzt werden durch

$$(69) \qquad \varphi_i - \frac{1}{\lambda}\frac{\partial \lambda}{\partial x_i}, \text{ bzw. } \lambda g_{ik}$$

(λ eine willkürliche positive Ortsfunktion). Wir setzen voraus, daß $\mathfrak{W}$ ein Ausdruck 2. Ordnung ist, d. h. aufgebaut einerseits aus den g_{ik} und deren Ableitungen 1. und 2. Ordnung, anderseits aus den φ_i und deren

Ableitungen 1. Ordnung. Das einfachste Beispiel ist die Maxwellsche Wirkungsdichte $\mathfrak{l}$. Doch soll die Untersuchung hier ganz allgemein geführt werden, ohne daß wir uns von vorn herein auf einen bestimmten Ansatz für $\mathfrak{W}$ festlegen. Nach der in § 28 angewendeten Kleinschen Methode (die erst jetzt zu voller Auswirkung gelangen wird) leiten wir zunächst einige mathematische Identitäten her, die für jede aus der Metrik entspringende skalare Dichte $\mathfrak{W}$ gültig sind.

I. Erteilen wir den die Metrik relativ zu einem Bezugssystem beschreibenden Größen φ_i, g_{ik} beliebige unendliche kleine Zuwächse $\delta\varphi_i$, δg_{ik} und bedeutet $\mathfrak{X}$ ein endliches Weltgebiet, so ist es der Effekt der partiellen Integration, daß das Integral der zugehörigen Änderung $\delta\mathfrak{W}$ von $\mathfrak{W}$ über das Gebiet $\mathfrak{X}$ in zwei Teile zerlegt wird: ein Divergenzintegral und ein Integral, dessen Integrand nur noch eine lineare Kombination von $\delta\varphi_i$ und δg_{ik} ist:

$$(70)\quad \int_{\mathfrak{X}} \delta\mathfrak{W}\,dx = \int_{\mathfrak{X}} \frac{\partial(\delta\mathfrak{v}^k)}{\partial x_k}\,dx + \int_{\mathfrak{X}} (\mathfrak{w}^i\,\delta\varphi_i + \tfrac{1}{2}\mathfrak{W}^{ik}\,\delta g_{ik})\,dx. \quad [\mathfrak{W}^{ki} = \mathfrak{W}^{ik}]$$

Dabei sind $\mathfrak{w}^i$ die Komponenten einer kontravarianten Vektordichte, $\mathfrak{W}_i^k$ aber die einer gemischten Tensordichte 2. Stufe (im eigentlichen Sinne). Die $\delta\mathfrak{v}^k$ sind lineare Kombinationen von

$$\delta\varphi_\alpha, \quad \delta g_{\alpha\beta} \text{ und } \delta g_{\alpha\beta,i} \qquad \left[g_{\alpha\beta,i} = \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x_i}\right];$$

wir deuten das durch die Formel an:

$$\delta\mathfrak{v}^k = (k\alpha)\,\delta\varphi_\alpha + (k\alpha\beta)\,\delta g_{\alpha\beta} + (ki\alpha\beta)\,\delta g_{\alpha\beta,i}.$$

Die $\delta\mathfrak{v}^k$ sind durch die Gleichung (70) erst dann eindeutig bestimmt, wenn die normierende Bedingung hinzugefügt wird, daß die Koeffizienten $(ki\alpha\beta)$ symmetrisch in den Indizes k und i sind; bei dieser Normierung sind $\delta\mathfrak{v}^k$ die Komponenten einer Vektordichte (im eigentlichen Sinne), wenn man $\delta\varphi_i$ als die Komponenten eines kovarianten Vektors vom Gewichte 0, δg_{ik} als die Komponenten eines Tensors vom Gewichte 1 auffaßt. (Natürlich steht nichts im Wege, an Stelle dieser Normierung eine andere, im gleichen Sinne invariante zu verwenden.)

Wir drücken zuvörderst aus, daß $\int_{\mathfrak{X}} \mathfrak{W}\,dx$ eine Eichinvariante ist, sich also nicht ändert, wenn die Eichung der Welt infinitesimal abgeändert wird. Ist das Eichverhältnis zwischen der abgeänderten und der ursprünglichen Eichung $\lambda = 1 + \pi$, so ist π ein den Vorgang charakterisierendes infinitesimales Skalarfeld, das willkürlich vorgegeben werden kann. Bei diesem Prozeß erfahren die Fundamentalgrößen nach (69) die folgenden Zuwächse

$$(71)\qquad \delta g_{ik} = \pi g_{ik}, \qquad \delta\varphi_i = -\frac{\partial\pi}{\partial x_i}.$$

Substituieren wir diese Werte in $\delta\mathfrak{v}^k$, so mögen die Ausdrücke

$$(72) \qquad \mathfrak{s}^k(\pi) = \pi \cdot \mathfrak{s}^k + \frac{\partial \pi}{\partial x_\alpha} \cdot \mathfrak{h}^{k\alpha}$$

hervorgehen; sie sind die Komponenten einer von dem Skalarfeld π linear-differentiell abhängigen Vektordichte. Daraus folgt noch, da $\frac{\partial \pi}{\partial x_\alpha}$ die Komponenten eines aus jenem Skalarfeld entspringenden kovarianten Vektorfeldes sind: $\mathfrak{s}^k$ ist eine Vektordichte, $\mathfrak{h}^{k\alpha}$ eine kontravariante Tensordichte 2. Stufe. Die Variation (70) des Wirkungsintegrals muß wegen seiner Eichinvarianz für (71) verschwinden:

$$\int_{\mathfrak{X}} \frac{\partial \mathfrak{s}^k(\pi)}{\partial x_k} dx + \int_{\mathfrak{X}} \left(- \mathfrak{w}^i \frac{\partial \pi}{\partial x_i} + \tfrac{1}{2} \mathfrak{W}^i_i \pi \right) dx = 0 .$$

Formt man den ersten Term des zweiten Integrals noch durch partielle Integration um, so kann man statt dessen schreiben:

$$(73) \qquad \int_{\mathfrak{X}} \frac{\partial (\mathfrak{s}^k(\pi) - \pi \mathfrak{w}^k)}{\partial x_k} dx + \int_{\mathfrak{X}} \pi \left(\frac{\partial \mathfrak{w}^i}{\partial x_i} + \tfrac{1}{2} \mathfrak{W}^i_i \right) dx = 0 .$$

Daraus ergibt sich nun zunächst die Identität

$$(74) \qquad \frac{\partial \mathfrak{w}^i}{\partial x_i} + \tfrac{1}{2} \mathfrak{W}^i_i = 0$$

in der aus der Variationsrechnung bekannten Weise: Wäre die auf der linken Seite stehende Ortsfunktion an einer Stelle (x_i) von 0 verschieden, etwa positiv, so kann man eine so kleine Umgebung $\mathfrak{X}$ dieser Stelle abgrenzen, daß jene Funktion in ganz $\mathfrak{X}$ positiv bleibt. Wählt man in (73) für $\mathfrak{X}$ dieses Gebiet, für π aber eine außerhalb $\mathfrak{X}$ verschwindende Funktion, welche innerhalb $\mathfrak{X}$ durchweg > 0 ist, so verschwindet das erste Integral, das zweite aber fällt positiv aus — im Widerspruch mit der Gleichung (73). Nachdem dies erkannt, liefert (73) die Gleichung

$$\int_{\mathfrak{X}} \frac{\partial (\mathfrak{s}^k(\pi) - \pi \mathfrak{w}^k)}{\partial x_k} dx = 0 ;$$

sie gilt bei gegebenem Skalarfeld π für jedes endliche Gebiet $\mathfrak{X}$, und infolgedessen muß

$$(75) \qquad \frac{\partial (\mathfrak{s}^k(\pi) - \pi \mathfrak{w}^k)}{\partial x_k} = 0$$

sein. Setzen wir (72) ein und beachten, daß an einer Stelle die Werte von $\pi, \frac{\partial \pi}{\partial x}, \frac{\partial^2 \pi}{\partial x_i \partial x_k}$ beliebig vorgegeben werden können, so zerspaltet sich diese eine Formel in die folgenden Identitäten:

$$(75_{1,2,3}) \qquad \frac{\partial \mathfrak{s}^k}{\partial x_k} = \frac{\partial \mathfrak{w}^k}{\partial x_k} ; \qquad \mathfrak{s}^i + \frac{\partial \mathfrak{h}^{\alpha i}}{\partial x_\alpha} = \mathfrak{w}^i ; \qquad \mathfrak{h}^{\alpha\beta} + \mathfrak{h}^{\beta\alpha} = 0 .$$

Nach der dritten ist $\mathfrak{h}^{ik}$ eine lineare Tensordichte 2. Stufe. Die erste ist in Anbetracht der Schiefsymmetrie von $\mathfrak{h}$ eine Folge der zweiten, da

$$\frac{\partial^2 \mathfrak{h}^{\alpha\beta}}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} = 0$$

ist.

II. Wir nehmen mit dem Weltkontinuum eine infinitesimale Deformation vor, bei welcher der einzelne Punkt eine Verrückung mit den Komponenten ξ^i erfährt; die Metrik werde von der Deformation ungeändert mitgenommen. δ bezeichne die durch die Deformation bewirkte Änderung irgendeiner Größe, wenn man an derselben Raum-Zeit-Stelle bleibt, δ' ihre Änderung, wenn man die Verschiebung der Raum-Zeit-Stelle mitmacht. Dann ist nach (20), (20'), (71)

$$(76)\quad \begin{cases} -\delta\varphi_i = \left(\varphi_r \dfrac{\partial \xi^r}{\partial x_i} + \dfrac{\partial \varphi_i}{\partial x_r}\xi^r\right) + \dfrac{\partial \pi}{\partial x_i}, \\ -\delta g_{ik} = \left(g_{ir}\dfrac{\partial \xi^r}{\partial x_k} + g_{kr}\dfrac{\partial \xi^r}{\partial x_i} + \dfrac{\partial g_{ik}}{\partial x_r}\xi^r\right) - \pi g_{ik}. \end{cases}$$

Darin bedeutet π ein durch unsere Festsetzungen noch willkürlich gelassenes infinitesimales Skalarfeld. Die Invarianz der Wirkungsgröße gegenüber Koordinatentransformation und Abänderung der Eichung kommt in der auf diese Variation sich beziehenden Formel zum Ausdruck:

$$(77)\quad \delta' \int\limits_{\mathfrak{X}} \mathfrak{W}\, dx = \int\limits_{\mathfrak{X}} \left\{ \frac{\partial(\mathfrak{W}\xi^k)}{\partial x_k} + \delta\mathfrak{W} \right\} dx = 0\,.$$

Will man nur die Koordinateninvarianz zum Ausdruck bringen, so hat man $\pi = 0$ zu wählen; aber die so hervorgehenden Variationsformeln (76) haben keinen invarianten Charakter. In der Tat bedeutet diese Festsetzung: es sollen durch die Deformation die beiden Fundamentalformen so variiert werden, daß die Maßzahl l eines Linienelements ungeändert bleibt: $\delta' l = 0$. Nun drückt aber nicht diese Gleichung den Prozeß der kongruenten Verpflanzung einer Strecke aus, sondern

$$\delta' l = -\, l(\varphi_i \delta' x_i) = -\, l(\varphi_i \xi^i)\,.$$

Wir müssen demnach in (76) nicht $\pi = 0$, sondern $\pi = -(\varphi_i \xi^i)$ wählen, damit invariante Formeln zustande kommen, nämlich die folgenden:

$$(78)\quad \begin{cases} -\delta\varphi_i = f_{ir}\xi^r, \\ -\delta g_{ik} = \left(g_{ir}\dfrac{\partial \xi^r}{\partial x_k} + g_{kr}\dfrac{\partial \xi^r}{\partial x_i}\right) + \left(\dfrac{\partial g_{ik}}{\partial x_r} + g_{ik}\varphi_r\right)\xi^r. \end{cases}$$

Die durch sie dargestellte Änderung der beiden Fundamentalformen ist eine solche, daß *die Metrik von der Deformation ungeändert mitgenommen und jedes Linienelement kongruent verpflanzt erscheint.* Auch analytisch erkennt man leicht den invarianten Charakter; an der zweiten Gleichung (78) insbesondere, indem man den gemischten Tensor

$$\frac{\partial \xi^i}{\partial x_k} + \Gamma^i_{kr}\xi^r = \xi^i_k$$

einführt, sie lautet dann

$$-\delta g_{ik} = \xi_{ik} + \xi_{ki}.$$

Nachdem die Eichinvarianz unter I. ausgenutzt ist, können wir uns in der Formel (76) darauf beschränken, für π die eben besprochene, vom Standpunkt der Invarianz allein mögliche Wahl zu treffen.

Für die Variation (78) sei

$$\mathfrak{W}\xi^k + \delta\mathfrak{v}^k = \mathfrak{S}^k(\xi).$$

$\mathfrak{S}^k(\xi)$ ist eine linear-differentiell von dem willkürlichen Vektorfeld ξ^i abhängige Vektordichte; ich schreibe explizite

$$\mathfrak{S}^k(\xi) = \mathfrak{S}^k_i\xi^i + \mathfrak{H}^{k\alpha}_i \frac{\partial \xi^i}{\partial x_\alpha} + \tfrac{1}{2}\mathfrak{H}^{k\alpha\beta}_i \frac{\partial^2 \xi^i}{\partial x_\alpha \partial x_\beta}$$

(der letzte Koeffizient ist natürlich symmetrisch in den Indizes $\alpha\beta$). Darin, daß $\mathfrak{S}^k(\xi)$ eine von dem Vektorfeld ξ^i abhängige Vektordichte ist, spricht sich am einfachsten und vollständigsten der Invarianzcharakter der in dem Ausdruck von $\mathfrak{S}^k(\xi)$ auftretenden Koeffizienten aus, und insbesondere geht daraus hervor, daß $\mathfrak{S}^k_i$ nicht die Komponenten einer gemischten Tensordichte 2. Stufe sind; wir sprechen hier von einer »Pseudo-Tensordichte«. Führen wir in (77) die Ausdrücke (70), (78) ein, so entsteht ein Integral, dessen Integrand lautet

$$\frac{\partial \mathfrak{S}^k(\xi)}{\partial x_k} - \xi^i\left\{f_{ki}\mathfrak{w}^k + \tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x_i} + g_{\alpha\beta}\varphi_i\right)\mathfrak{W}^{\alpha\beta}\right\} - \mathfrak{W}^k_i\frac{\partial \xi^i}{\partial x_k}.$$

Wegen

$$\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x_i} + g_{\alpha\beta}\varphi_i = \Gamma_{\alpha,\beta i} + \Gamma_{\beta,\alpha i}$$

und der Symmetrie von $\mathfrak{W}^{\alpha\beta}$ ist

$$\tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x_i} + g_{\alpha\beta}\varphi_i\right)\mathfrak{W}^{\alpha\beta} = \Gamma_{\alpha,\beta i}\mathfrak{W}^{\alpha\beta} = \Gamma^\alpha_{\beta i}\mathfrak{W}^\beta_\alpha.$$

Üben wir auf das letzte Glied unseres Integranden noch eine partielle Integration aus, so erhalten wir daher

$$\int_{\mathfrak{X}} \frac{\partial(\mathfrak{S}^k(\xi) - \mathfrak{W}^k_i\xi^i)}{\partial x_k}dx + \int_{\mathfrak{X}}[\cdots]_i\xi^i dx = 0.$$

Nach der oben angewendeten Schlußweise entspringen daraus die Identitäten:

$$(79)\qquad [\cdots]_i, \text{ d. i. } \left(\frac{\partial \mathfrak{W}^k_i}{\partial x_k} - \Gamma^\alpha_{i\beta}\mathfrak{W}^\beta_\alpha\right) + f_{ik}\mathfrak{w}^k = 0 \quad \text{und}$$

$$(80)\qquad \frac{\partial(\mathfrak{S}^k(\xi) - \mathfrak{W}^k_i\xi^i)}{\partial x_k} = 0.$$

Die letzte zerspaltet sich in die folgenden vier:

$$(80_{1,2,3,4})\quad \left\{\begin{array}{ll} \dfrac{\partial \mathfrak{S}_i^k}{\partial x_k} = \dfrac{\partial \mathfrak{W}_i^k}{\partial x_k}; & \mathfrak{S}_i^k + \dfrac{\partial \overline{\mathfrak{H}}_i^{\alpha k}}{\partial x_\alpha} = \mathfrak{W}_i^k; \\ (\overline{\mathfrak{H}}_i^{\alpha\beta} + \overline{\mathfrak{H}}_i^{\beta\alpha}) + \dfrac{\partial \mathfrak{H}_i^{\gamma\alpha\beta}}{\partial x_\gamma} = 0; & \mathfrak{H}_i^{\alpha\beta\gamma} + \mathfrak{H}_i^{\beta\gamma\alpha} + \mathfrak{H}_i^{\gamma\alpha\beta} = 0. \end{array}\right.$$

Ersetzt man in $(_3)$ nach $(_4)$

$$\mathfrak{H}_i^{\gamma\alpha\beta} \quad \text{durch} \quad -\mathfrak{H}_i^{\alpha\beta\gamma} - \mathfrak{H}_i^{\beta\alpha\gamma},$$

so geht daraus hervor, daß

$$\overline{\mathfrak{H}}_i^{\alpha\beta} - \frac{\partial \mathfrak{H}_i^{\alpha\beta\gamma}}{\partial x_\gamma} = \mathfrak{H}_i^{\alpha\beta}$$

schiefsymmetrisch ist in den Indizes $\alpha\beta$. Führen wir $\mathfrak{H}_i^{\alpha\beta}$ statt $\overline{\mathfrak{H}}_i^{\alpha\beta}$ ein, so enthalten $(_3)$ und $(_4)$ also lediglich Symmetrie-Aussagen, $(_2)$ aber geht über in

$$(81)\qquad \mathfrak{S}_i^k + \frac{\partial \mathfrak{H}_i^{\alpha k}}{\partial x_\alpha} + \frac{\partial^2 \mathfrak{H}_i^{\alpha\beta k}}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} = \mathfrak{W}_i^k.$$

Daraus folgt $(_1)$, weil wegen der Symmetriebedingungen

$$\frac{\partial^2 \mathfrak{H}_i^{\alpha\beta}}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} = 0, \qquad \frac{\partial^3 \mathfrak{H}_i^{\alpha\beta\gamma}}{\partial x_\alpha \partial x_\beta \partial x_\gamma} = 0 \quad \text{ist.}$$

Beispiel. Für die Maxwellsche Wirkungsdichte gilt, wie man sofort einsieht,

$$\delta \mathfrak{v}^k = \mathfrak{f}^{ik} \delta \varphi_i,$$

infolgedessen:

$$\mathfrak{s}^i = 0, \quad \mathfrak{h}^{ik} = \mathfrak{f}^{ik}; \quad \mathfrak{S}_i^k = \mathfrak{l}\delta_i^k - f_{i\alpha}\mathfrak{f}^{k\alpha}, \quad \text{die Größen } \mathfrak{H} = 0.$$

Unsere Identitäten liefern also

$$\mathfrak{w}^i = \frac{\partial \mathfrak{f}^{\alpha i}}{\partial x_\alpha}, \qquad \frac{\partial \mathfrak{w}^i}{\partial x_i} = 0, \qquad \mathfrak{W}_i^i = 0;$$

$$\mathfrak{W}_i^k = \mathfrak{S}_i^k, \qquad \left(\frac{\partial \mathfrak{S}_i^k}{\partial x_k} - \frac{1}{2}\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x_i}\mathfrak{S}^{\alpha\beta}\right) + f_{i\alpha}\frac{\partial \mathfrak{f}^{\beta\alpha}}{\partial x_\beta} = 0.$$

Die in der letzten Zeile stehenden beiden Formeln haben wir früher, die erste auf S. 209, die zweite auf S. 150, durch Rechnung gefunden; die letzte drückte damals aus, daß zwischen der Maxwellschen Tensordichte $\mathfrak{S}_i^k$ der Feldenergie und der ponderomotorischen Kraft der geforderte Zusammenhang besteht.

Feldgesetze und Erhaltungssätze. Nimmt man in (70) für δ eine beliebige Variation, die außerhalb eines endlichen Gebiets verschwindet und für $\mathfrak{X}$ die ganze Welt oder ein solches Gebiet, außerhalb dessen $\delta = 0$ ist, so kommt

$$\int \delta \mathfrak{W}\, dx = \int (\mathfrak{w}^i \delta\varphi_i + \tfrac{1}{2}\mathfrak{W}^{ik}\delta g_{ik})\, dx\,.$$

Ist $\int \mathfrak{W}\, dx$ die Wirkungsgröße, so erkennt man daraus, daß in dem Hamiltonschen Prinzip die folgenden invarianten Gesetze enthalten sind:

$$\mathfrak{w}^i = 0, \qquad \mathfrak{W}_i^k = 0,$$

von denen wir die ersten als die elektromagnetischen, die zweiten als die Gravitationsgesetze zu bezeichnen haben. Zwischen den linken Seiten dieser Gleichungen bestehen 5 Identitäten, die unter (74) und (79) aufgeführt sind. Es sind also unter den Feldgleichungen 5 überschüssige enthalten, entsprechend dem von 5 willkürlichen Funktionen abhängigen Übergang von einem Bezugssystem zu einem beliebigen anderen.

Nach (75_2) haben die elektromagnetischen Gesetze die folgende Gestalt:

$$\frac{\partial \mathfrak{h}^{ik}}{\partial x_k} = \mathfrak{s}^i \qquad [\text{und } (67)] \tag{82}$$

— ganz im Einklang mit der Maxwellschen Theorie: $\mathfrak{s}^i$ ist die Dichte des Viererstroms, die lineare Tensordichte 2. Stufe $\mathfrak{h}^{ik}$ die elektromagnetische Felddichte. *Ohne noch die Wirkungsgröße zu spezialisieren, können wir aus der Eichinvarianz allein die ganze Struktur der Maxwellschen Theorie ablesen.* Die besondere Gestalt der Hamiltonschen Funktion $\mathfrak{W}$ beeinflußt allein die Formeln, nach denen sich Strom und Felddichte aus den Zustandsgrößen φ_i, g_{ik} des Weltäthers bestimmen. Im Falle der Maxwellschen Theorie im engeren Sinne ($\mathfrak{W} = \mathfrak{l}$), die ja nur im leeren Raum gültig ist, wird, wie es sein muß, $\mathfrak{h}^{ik} = \mathfrak{f}^{ik}$, $\mathfrak{s}^i = 0$.

Wie die $\mathfrak{s}^i$ die Dichte des Viererstroms konstituieren, so wird das Schema der $\mathfrak{S}_i^k$ als die Pseudotensordichte der Energie zu deuten sein; im einfachsten Falle $\mathfrak{W} = \mathfrak{l}$ stimmt diese Erklärung mit den Maxwellschen Ausdrücken überein. *Es gelten allgemein* nach (75_1) und (80_1) *die Erhaltungssätze*

$$\frac{\partial \mathfrak{s}^i}{\partial x_i} = 0, \qquad \frac{\partial \mathfrak{S}_i^k}{\partial x_k} = 0.$$

Und zwar folgen die Erhaltungssätze auf doppelte Weise aus den Feldgesetzen. Es ist nämlich nicht nur

$$\frac{\partial \mathfrak{s}^i}{\partial x_i} \equiv \frac{\partial \mathfrak{w}^i}{\partial x_i}, \text{ sondern auch } \equiv -\tfrac{1}{2}\mathfrak{W}_i^i;$$

$$\frac{\partial \mathfrak{S}_i^k}{\partial x_k} \text{ nicht nur } \equiv \frac{\partial \mathfrak{W}_i^k}{\partial x_k}, \text{ sondern auch } \equiv \Gamma_{i\beta}^{\alpha}\, \mathfrak{W}_\alpha^\beta - f_{ik}\mathfrak{w}^k.$$

Die Gestalt der Gravitationsgleichungen geht aus (81) hervor. Die Feldgesetze und die zu ihnen gehörigen Erhaltungssätze lassen sich nach (75) und (80) übersichtlich zusammenfassen in die beiden Gleichungen

$$\frac{\partial \mathfrak{s}^i(\pi)}{\partial x_i} = 0, \qquad \frac{\partial \mathfrak{S}^i(\xi)}{\partial x_i} = 0.$$

Die enge Beziehung, die zwischen den Erhaltungssätzen von Energie-Impuls und der Koordinateninvarianz besteht, wurde schon früher von uns erkannt. Zu diesen vier tritt aber als fünfter der Erhaltungssatz der Elektrizität hinzu, und ihm muß konsequenterweise eine Invarianzeigenschaft entsprechen, die eine fünfte willkürliche Funktion mit sich bringt; als solche erscheint hier die Eichinvarianz. Übrigens gewannen wir früher den Erhaltungssatz für Energie-Impuls aus der Koordinateninvarianz nur dadurch, daß die Hamiltonsche Funktion aus zwei Teilen, der Wirkungsfunktion des Gravitationsfeldes und der des »physikalischen Zustandes«, bestand; beide Teile mußten auf verschiedene Weise behandelt und die Teilergebnisse in geeigneter Weise zusammengefügt werden (§ 33). Kennzeichne ich diejenigen Größen, welche aus $\mathfrak{W}\xi^k + \delta \mathfrak{v}^k$ entstehen, wenn ich die Variation der Fundamentalgrößen aus (76) mit $\pi = 0$ statt aus (78) entnehme, durch einen vorgesetzten Stern, so gelten allgemein zufolge der Koordinateninvarianz die »Erhaltungssätze« $\frac{\partial {}^*\mathfrak{S}_i^k}{\partial x_k} = 0$. Aber für die seit § 28 zugrunde gelegte zweiteilige Wirkungsfunktion sind ${}^*\mathfrak{S}_i^k$ nicht die Energie-Impulskomponenten. Wohl haben wir für den Gravitationsbestandteil ($\mathfrak{W} = \mathfrak{G}$) die Energie durch ${}^*\mathfrak{S}_i^k$ definiert (§ 33), für den elektromagnetischen Bestandteil aber ($\mathfrak{W} = \mathfrak{L}$, § 28) $\mathfrak{W}_i^k$ als Energiekomponenten eingeführt. Dieser zweite Bestandteil $\mathfrak{L}$ enthält nur die g_{ik} selber, nicht deren Ableitungen; für eine solche Größe ist nach (80_2) $\mathfrak{W}_i^k = \mathfrak{S}_i^k$. Dadurch können wir *(unter Benutzung derjenigen Transformation, welche die Fundamentalgrößen bei einer infinitesimalen Abänderung der Eichung erfahren)* die beiden verschiedenen Definitionen der Energie einander angleichen, wenn auch nicht ganz ausgleichen. Erst hier lösen sich diese Diskrepanzen, da wir erst auf Grund der neuen Theorie zu einer Erklärung des Stromes $\mathfrak{s}^i$, der elektromagnetischen Felddichte $\mathfrak{h}^{ik}$ und der *Energie* $\mathfrak{S}_i^k$ kommen, welche nicht mehr an die Voraussetzung gebunden ist, daß die Wirkungsgröße aus zwei Teilen zusammengesetzt ist, von denen der eine die φ_i und ihre Ableitungen, der andere die Ableitungen der g_{ik} nicht enthält. Die virtuelle Deformation des Weltkontinuums, welche zur Definition von $\mathfrak{S}_i^k$ führt, muß dabei Metrik und Linienelemente in *unserem* und nicht im *Einsteinschen* Sinne »*ungeändert*« mitnehmen. Die Erhaltungssätze für $\mathfrak{s}^i$ und $\mathfrak{S}_i^k$ sind dann ebenfalls an keine besondere Annahme über die Zusammensetzung der Wirkungsgröße gebunden. Von der in § 28 vertretenen Auffassung haben wir uns abermals, nachdem schon in § 33 die Totalenergie eingeführt war, zu einem höheren und das Ganze einheitlicher umfassenden Standpunkt erhoben. Was die Einsteinsche Gravitationstheorie für die Gleichheit von träger und schwerer Masse leistet: daß sie nämlich deren Übereinstimmung als wesensnotwendig erkennt, nicht aber als Ausfluß eines unbegriffenen Naturgesetzes, das leistet die hier entwickelte Theorie für die in der Struktur der Maxwellschen Gleichungen und den Erhaltungssätzen zum Ausdruck kommenden Tatsachen.

Die Erhaltungssätze haben wie in § 33 bei Integration über den Querschnitt eines Systemkanals zur Folge, daß, wenn außerhalb desselben $\mathfrak{s}^i$ und $\mathfrak{S}_i^k$ verschwinden, das System konstante Ladung e und konstanten Energie-Impuls J besitzt. Beide können, nach den Maxwellschen Gleichungen (82) bzw. den Gravitationsgleichungen (81), dargestellt werden als Fluß eines gewissen räumlichen Feldes durch eine das System einschließende Oberfläche Ω. Nehmen wir diese Darstellung als Definition, so gelten die integralen Erhaltungssätze auch dann, wenn innerhalb des Systemkanals das Feld eine wirkliche Singularität besitzt. Zum Beweise ersetze man das Feld innerhalb des Kanals in willkürlicher Weise (natürlich unter Wahrung des stetigen Anschlusses nach außen) durch ein reguläres und definiere die $\mathfrak{s}^i$ und $\mathfrak{S}_i^k$ durch die Gleichungen (82), (81) (in denen die rechten Seiten durch o zu ersetzen sind) auf Grund der zum abgeänderten Felde gehörenden Größen $\mathfrak{h}$ und $\mathfrak{H}$. Die über den Kanalquerschnitt (das Innere von Ω) zu erstreckenden Integrale dieser fiktiven Größen $\mathfrak{s}^0$ und $\mathfrak{S}_i^0$ sind konstant; andrerseits stimmen sie überein mit den erwähnten Flüssen des wirklichen Feldes durch die Oberfläche Ω, da auf Ω das fingierte Feld mit dem wirklichen übereinstimmt.

§ 36. Durchführung des einfachsten Wirkungsprinzips. Die Grundgleichungen der Mechanik.

Wir müssen jetzt zeigen, daß im Rahmen der neuen Theorie für $\mathfrak{W}$ ein Ansatz möglich ist, der in den durch die Erfahrung bestätigten Konsequenzen mit der Einsteinschen übereinstimmt. Rechnerisch am bequemsten durchzuführen ist der folgende[36]) (von dem ich nicht behaupte, daß er in der Natur realisiert ist):

$$\mathfrak{W} = -\tfrac{1}{4}F^2\sqrt{g} + \alpha\mathfrak{l}. \tag{83}$$

Die Wirkungsgröße soll sich also zusammensetzen aus dem mittels des Krümmungsradius der Welt als Längeneinheit gemessenen Volumen [vgl. § 17, (62)] und der Maxwellschen Wirkung des elektromagnetischen Feldes; die positive Konstante α ist eine reine Zahl. Es folgt

$$\delta\mathfrak{W} = -\tfrac{1}{2}F\delta(F\sqrt{g}) + \tfrac{1}{4}F^2\delta\sqrt{g} + \alpha\delta\mathfrak{l}.$$

Wir nehmen an, daß $-F$ positiv ist; dann kann die Eichung durch die Forderung $F = -1$ eindeutig festgelegt werden:

$$\delta\mathfrak{W} \text{ gleich der Variation von } \tfrac{1}{2}F\sqrt{g} + \tfrac{1}{4}\sqrt{g} + \alpha\mathfrak{l}.$$

Benutzen wir für F die Formel § 17, (61), lassen die Divergenz

$$\delta\frac{\partial(\sqrt{g}\,\varphi^i)}{\partial x_i}$$

fort, die ja bei der Integration über die Welt verschwindet, und führen durch eine partielle Integration das Weltintegral von $\delta(\tfrac{1}{2}R\sqrt{g})$ über in das Integral von $\delta\mathfrak{G}$ (§ 28), dann lautet unser Wirkungsprinzip

$$\delta\int\mathfrak{W}\,dx = 0, \quad \text{und es ist } \mathfrak{W} = \mathfrak{G} + \alpha\mathfrak{l} + \tfrac{1}{4}\sqrt{g}\{1 - 3(\varphi_i\varphi^i)\}. \tag{84}$$

Unsere Normierung bedeutet, daß wir mit kosmischen Maßstäben messen. Wählen wir auch die Koordinaten x_i so, daß Weltstellen, deren Koordinaten sich um Beträge von der Größenordnung 1 unterscheiden, kosmische Entfernung haben, so werden wir annehmen dürfen, daß die g_{ik} und φ_i von der Größenordnung 1 werden. (Dabei ist es freilich Tatsache, daß diese Potentiale dennoch in Abmessungen, welche gegenüber den kosmischen außerordentlich klein sind, merklich variieren.) Durch die Substitution $x_i = \varepsilon x'_i$ führen wir Koordinaten der gewöhnlich benutzten Größenordnung ein (Größenordnung des menschlichen Körpers); ε ist eine sehr kleine Konstante. Die g_{ik} ändern sich bei dieser Transformation nicht, wenn wir gleichzeitig diejenige Umeichung vornehmen, welche ds^2 mit $\frac{1}{\varepsilon^2}$ multipliziert. Im neuen Bezugssystem ist dann

$$g'_{ik} = g_{ik}, \quad \varphi'_i = \varepsilon\varphi_i; \quad F' = -\varepsilon^2.$$

$\frac{1}{\varepsilon}$ ist demnach, in menschlichem Maße, der Krümmungsradius der Welt. Behalten g_{ik}, φ_i ihre alte Bedeutung, verstehen wir aber jetzt unter x_i die bisher mit x'_i bezeichneten Koordinaten und sind Γ^r_{ik} die diesen Koordinaten entsprechenden Komponenten des affinen Zusammenhangs, so wird

$$\mathfrak{W} = (\mathfrak{G} + \alpha\mathfrak{l}) + \frac{\varepsilon^2}{4}\sqrt{g}\{1 - 3(\varphi_i\varphi^i)\},$$

$$\Gamma^r_{ik} = \left\{\begin{matrix} ik \\ r \end{matrix}\right\} + \tfrac{1}{2}\varepsilon^2(\delta^r_i\varphi_k + \delta^r_k\varphi_i - g_{ik}\varphi^r).$$

Unter Vernachlässigung der winzigen kosmologischen Terme erhalten wir hier also genau die klassische Maxwell-Einsteinsche Theorie der Elektrizität und Gravitation. Um Übereinstimmung mit den in § 34 verwendeten Bezeichnungen zu erhalten, hat man $\frac{\varepsilon^2}{2} = \lambda$ zu setzen. *Völlig zwangsläufig liefert unsere Theorie Einsteins kosmologisches Glied* $\frac{1}{2}\lambda\sqrt{g}$. Die gleichförmige Verteilung ruhender, elektrisch neutraler Materie über den ganzen (sphärischen) Raum ist also ein mit unserm Gesetz verträglicher Gleichgewichtszustand. Während aber in der Einsteinschen Theorie (vgl. § 34) zwischen dem dort als universelle Naturkonstante auftretenden λ und der Gesamtmasse der Welt eine prästabilierte Harmonie bestehen muß (weil jede dieser beiden Größen für sich schon die Krümmung der Welt bestimmt), ist es hier (wo λ lediglich die Krümmung *bedeutet*), so, daß die in der Welt vorhandene Masse die Weltkrümmung *determiniert*; mir scheint, daß dadurch überhaupt erst die Einsteinsche Kosmologie physikalisch möglich wird. — Im Falle der Anwesenheit eines elektrischen Feldes ist Einsteins kosmologisches Glied durch das weitere $-\frac{3}{2}\lambda\sqrt{g}(\varphi_i\varphi^i)$ zu ergänzen; und auch in den Komponenten Γ^r_{ik} des

Gravitationsfeldes tritt ein von den elektromagnetischen Potentialen abhängiges kosmologisches Glied auf. — Unserer Theorie liegt eine bestimmte Elektrizitätseinheit zugrunde; sie sei in gewöhnlichen elektrostatischen Einheiten $= e$. Da in (84) bei Benutzung dieser Einheiten $\frac{2\varkappa}{c^2}$ statt α auftritt, ist

$$\frac{2e^2\varkappa}{c^2} = \frac{\alpha}{-F}, \qquad \frac{e\sqrt{\varkappa}}{c} = \frac{1}{\varepsilon}\sqrt{\frac{\alpha}{2}}:$$

unsere Einheit ist diejenige Elektrizitätsmenge, deren Gravitationsradius $\sqrt{\frac{\alpha}{2}}$-mal dem Krümmungsradius der Welt ist. Sie ist daher ebenso wie das Wirkungsquantum 1 von kosmischer Größe. Das kosmologische Moment, das Einstein erst nachträglich seiner Theorie einfügte, haftet der unseren von ihren ersten Grundlagen her an.

Variation der φ_i liefert die Maxwellschen Gleichungen

$$\frac{\partial \mathfrak{f}^{ik}}{\partial x_k} = \mathfrak{s}^i,$$

und dabei ist hier einfach

$$\mathfrak{s}^i = -\frac{3\lambda}{\alpha}\varphi^i\sqrt{g}.$$

Wie nach Maxwell der Äther Sitz von Energie und Masse ist, so erhalten wir also hier auch eine dünn durch die Welt verteilte elektrische Ladung (samt Strom). Variation der g_{ik} liefert die Gravitationsgleichungen

$$(85) \qquad \mathfrak{R}_i^k - \frac{\mathfrak{R} + \lambda\sqrt{g}}{2}\delta_i^k = \alpha\mathfrak{T}_i^k,$$

$$\mathfrak{T}_i^k = \{\mathfrak{l} + \tfrac{1}{2}(\varphi_r\mathfrak{s}^r)\}\delta_i^k - f_{ir}\mathfrak{f}^{kr} - \varphi_i\mathfrak{s}^k.$$

Die Erhaltung der Elektrizität drückt sich in der Divergenzgleichung

$$(86) \qquad \frac{\partial(\sqrt{g}\varphi^i)}{\partial x_i} = 0$$

aus; sie folgt einerseits aus den Maxwellschen Gleichungen, muß anderseits aber auch nach unsern allgemeinen Resultaten aus den Gravitationsgleichungen hergeleitet werden können. In der Tat: verjüngen wir diese nach ik, so kommt

$$R + 2\lambda = \tfrac{3}{2}(\varphi_i\varphi^i)$$

und daraus in Verbindung mit $-F = 2\lambda$ abermals (86). Für die Pseudotensordichte von Energie-Impuls findet man, wie zu erwarten,

$$\mathfrak{S}_i^k = \alpha\mathfrak{T}_i^k + \left\{\mathfrak{G} + \tfrac{1}{2}\lambda\sqrt{g}\delta_i^k - \tfrac{1}{2}\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x_i}\mathfrak{G}^{\alpha\beta,k}\right\}.$$

Aus der Gleichung $\delta'\int\mathfrak{W}dx = 0$ für eine Variation δ', die durch die

Verschiebung im eigentlichen Sinne hervorgebracht wird [Formeln (76) mit $\xi^i =$ konst., $\pi = 0$], erhält man nämlich zunächst

$$\frac{\partial({}^*\mathfrak{S}_i^k \xi^i)}{\partial x_k} = 0, \tag{87}$$

wo

$${}^*\mathfrak{S}_i^k = \mathfrak{W}\delta_i^k - \frac{1}{2}\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x_i}\mathfrak{G}^{\alpha\beta,k} + \alpha\frac{\partial \varphi_r}{\partial x_i}\mathfrak{f}^{kr}.$$

Um die Erhaltungssätze zu gewinnen, muß man nach Früherem die Maxwellschen Gleichungen in der Form schreiben

$$\frac{\partial\left(\pi\mathfrak{s}^i + \dfrac{\partial\pi}{\partial x_k}\mathfrak{f}^{ik}\right)}{\partial x_i} = 0,$$

darin $\pi = -(\varphi_i\xi^i)$ setzen und die so hervorgehende Gleichung mit α multipliziert zu (87) addieren. Dann kommt in der Tat

$$\frac{\partial(\mathfrak{S}_i^k \xi^i)}{\partial x_k} = 0.$$

In $\mathfrak{S}_i^k$ treten folgende Glieder auf: die Maxwellsche Energiedichte des elektromagnetischen Feldes

$$\mathfrak{l}\delta_i^k - f_{ir}\mathfrak{f}^{kr},$$

die Gravitationsenergie

$$\mathfrak{G}\delta_i^k - \frac{1}{2}\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x_i}\mathfrak{G}^{\alpha\beta,k}$$

und die kosmologischen Zusatzterme

$$\tfrac{1}{2}(\lambda\sqrt{g} + \varphi_r\mathfrak{s}^r)\delta_i^k - \varphi_i\mathfrak{s}^k.$$

Die statische Welt ist von Hause aus geeicht; es fragt sich, ob für diese ihre Eichung $F =$ konst. ist. Die Antwort lautet bejahend. Eichen wir nämlich die statische Welt um auf die Forderung $F = -1$ und kennzeichnen die dadurch hervorgehenden Größen durch Überstreichung, so ist

$$\bar{\varphi}_i = -\frac{F_i}{F}, \text{ wo } F_i = \frac{\partial F}{\partial x_i} \text{ gesetzt ist } (i = 1, 2, 3),$$

$$\bar{g}_{ik} = -Fg_{ik}, \text{ also } \bar{g}^{ik} = -\frac{g^{ik}}{F}, \sqrt{\bar{g}} = F^2\sqrt{g},$$

und die Gleichung (86) liefert

$$\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial\mathfrak{F}^i}{\partial x_i} = 0 \qquad (\mathfrak{F}^i = \sqrt{g}F^i).$$

Daraus folgt aber $F =$ konst.

Dadurch daß zu Einsteins kosmologischem Glied hier ein weiterer elektrischer Term hinzugetreten ist, wird die Existenz eines materiellen Teilchens möglich, ohne daß ein Massenhorizont erforderlich ist; das Teilchen

ist notwendig elektrisch geladen. Nehmen wir, um die statischen kugelsymmetrischen Lösungen zu bestimmen, die alten Bezeichnungen aus § 31 wieder auf und verstehen unter φ das elektrostatische Potential, so lautet das Integral, dessen Variation verschwinden muß,

$$\int \mathfrak{B} r^2 dr = \int \left\{ w \Delta' - \frac{\alpha r^2 \varphi'^2}{2\Delta} + \frac{\lambda r^2}{2}\left(\Delta - \frac{3h^2\varphi^2}{2\Delta}\right)\right\} dr$$

(der Akzent bedeutet die Ableitung nach r). Variation von w, Δ und φ liefert die Gleichungen

$$\Delta\Delta' = \frac{3\lambda}{4} h^4 \varphi^2 r,$$

$$w' = \frac{\lambda r^2}{2}\left(1 + \frac{3}{2}\frac{h^2\varphi^2}{\Delta^2}\right) + \frac{\alpha}{2}\frac{r^2\varphi'^2}{\Delta^2},$$

$$\left(\frac{r^2\varphi'}{\Delta}\right)' = \frac{3}{2\alpha}\frac{h^2 r^2 \varphi}{\Delta}.$$

Durch die vorgenommenen Normierungen ist das räumliche Koordinatensystem bis auf eine Euklidische Drehung festgelegt, daher h^2 eindeutig bestimmt; in f und φ bleibt zufolge der freien Wahl der Zeiteinheit ein gemeinsamer konstanter Faktor willkürlich (ein Umstand, der sich übrigens dazu benutzen läßt, die Ordnung unseres Problems um 1 zu reduzieren). Wird der Äquator des Raumes für $r = r_0$ erreicht, so müssen die auftretenden Größen als Funktionen von $z = \sqrt{r_0^2 - r^2}$ bei $z = 0$ das folgende Verhalten zeigen: f und φ regulär, dazu $f \neq 0$; h^2 wird in 2. Ordnung unendlich, Δ daher in erster. Die Differentialgleichungen selber ergeben, daß die Entwicklung von $h^2 z^2$ nach Potenzen von z mit dem Gliede h_0^2 beginnt, wo

$$h_0^2 = \frac{2r_0^2}{\lambda r_0^2 - 2},$$

— das zeigt übrigens, daß λ notwendig positiv (die Krümmung F negativ) sein muß und $r_0^2 > \frac{2}{\lambda}$ —, während für die Anfangswerte f_0, φ_0 von f und φ

$$f_0^2 = \frac{3\lambda}{4} h_0^2 \varphi_0^2$$

gilt. Sind diametrale Punkte zu identifizieren, so muß φ eine gerade Funktion von z sein, und die Lösung ist durch die den angegebenen Bedingungen genügenden Anfangswerte für $z = 0$ eindeutig bestimmt[37]). Sie kann nicht im ganzen Bereich $0 \leqq r \leqq r_0$ regulär bleiben, sondern muß, wenn wir r von r_0 her abnehmen lassen, spätestens bei $r = 0$ eine Singularität bekommen. Denn sonst folgte aus der Differentialgleichung für φ durch Multiplikation mit φ und Integration von 0 bis r_0:

$$\int_0^{r_0} \frac{r^2}{\Delta}\left(\varphi'^2 + \frac{3}{2\alpha} h^2 \varphi^2\right) dr = 0.$$

Die Materie ist demnach eine wirkliche Singularität des Feldes. Daß die Zustandsgrößen in Bereichen merklich variieren, deren Lineardimensionen winzig sind gegenüber $\frac{1}{\sqrt{\lambda}}$, erklärt sich vielleicht daraus, daß für r_0^2 ein Wert zu nehmen ist, der ungeheuer groß gegenüber $\frac{1}{\lambda}$ ist. Daß alle Elementarteile der Materie dieselbe Ladung und Masse besitzen, scheint — im Einklang mit der in § 32 entwickelten Vorstellung, nach der sie sich vom Unendlichen her bestimmen — daher zu rühren, daß sie sich alle in dieselbe Welt (vom gleichen Radius r_0) einbetten.

Wir wollen zum Schluß die mechanischen Gleichungen aufstellen, welche die Bewegung eines materiellen Teilchens regeln. Tatsächlich haben wir bisher überhaupt noch keine haltbare Herleitung dieser Gleichungen im Rahmen der allgemeinen Relativitätstheorie gegeben; das soll hier endlich nachzuholen versucht werden. Wir werden bei dieser Gelegenheit das in § 32 gegebene Versprechen einlösen; nämlich zeigen, daß allgemein die träge Masse der Fluß des Gravitationsfeldes durch eine das Teilchen umschließende Fläche ist, auch wenn die Materie als eine das Feld begrenzende, selber sozusagen jenseits des Feldes gelegene Singularität aufgefaßt werden muß. Der Vorstellung einer sich bewegenden Substanz dürfen wir uns dabei gewiß nicht bedienen; die ihr entsprechenden Ansätze (§ 27)

$$dm\,ds = \mu\,dx, \qquad \mathfrak{T}_i^k = \mu u_i u^k$$

sind nämlich hier ganz unmöglich, weil sie den zu fordernden Invarianzeigenschaften widersprechen. Denn nach der ersten Gleichung ist μ eine skalare Dichte vom Gewichte $\frac{1}{2}$, nach der zweiten aber vom Gewichte 0, da $\mathfrak{T}_i^k$ eine Tensordichte im eigentlichen Sinne ist. Und man sieht, daß diese Ansätze in der neuen Theorie aus dem gleichen Grunde unmöglich sind, infolgedessen sie in der Einsteinschen, wie am Schluß von § 33 erwähnt, zu einem falschen Wert der Masse führen. Es hängt das offenbar auf engste damit zusammen, daß jetzt das Integral $\int dm\,ds$ überhaupt keine Bedeutung hat, also auch nicht als »Substanzwirkung der Gravitation« eingeführt werden kann. Den ersten Schritt zu einem wirklichen Beweis der mechanischen Gleichungen haben wir bereits in § 33 getan; dort wurde der spezielle Fall erledigt, daß der Körper vollständig isoliert ist, auf ihn gar keine äußeren Kräfte einwirken.

Wir ersehen daraus sogleich, daß wir ausgehen müssen von den für die *Gesamtenergie* $\mathfrak{S}_i^k$ gültigen Erhaltungssätzen

$$\frac{\partial \mathfrak{S}_i^k}{\partial x_k} = 0. \tag{89}$$

Es werde um das materielle Teilchen ein Volumen Ω abgegrenzt, dessen Dimensionen groß sind gegenüber dem eigentlichen Konzentrationskern

des Teilchens, klein gegenüber denjenigen Abmessungen, in denen das äußere Feld sich merklich ändert. Bei der Bewegung beschreibt Ω in der Welt einen Kanal, in dessen Innern der Stromfaden des Materieteilchens hinfließt. Das Koordinatensystem, bestehend aus der »Zeitkoordinate« $x_0 = t$ und den »Raumkoordinaten« $x_1 x_2 x_3$, sei so beschaffen, daß die Räume $x_0 =$ konst. den Kanal durchschneiden (der Durchschnitt ist das oben erwähnte Volumen Ω). Die in einem Raume $x_0 =$ konst. über Ω zu erstreckenden Integrale

$$\int_{\Omega} \mathfrak{S}_i^0 \, dx_1 \, dx_2 \, dx_3 = J_i \,,$$

welche Funktionen der Zeit allein sind, stellen die Energie ($i = 0$) und den Impuls ($i = 1, 2, 3$) des materiellen Teilchens dar. Integrieren wir die Gleichung (89) im Raume $x_0 =$ konst. über Ω, so liefert das erste Glied ($k = 0$) die zeitliche Ableitung $\frac{dJ_i}{dt}$, die Integralsumme über die drei letzten Glieder aber verwandelt sich nach dem Gaußschen Satz in ein über die Oberfläche von Ω zu erstreckendes Integral $-K_i$. So kommen die mechanischen Gleichungen zustande

$$\frac{dJ_i}{dt} = K_i \tag{90}$$

auf der linken Seite stehen die Komponenten der »*Trägheitskraft*«, auf der rechten die Komponenten der äußeren »*Feldkraft*«. Nicht bloß die Feldkraft, sondern auch der vierdimensionale Impuls J_i kann nach der Schlußbemerkung von § 35 dargestellt werden als ein Fluß durch die Oberfläche von Ω. Wenn das Innere des Kanals eine wirkliche Singularität des Feldes einschließt, muß der Impuls sogar notwendig in dieser Weise definiert werden, und es führt auch dann der am Ende von § 35 verwendete Kunstgriff des »fingierten Feldes« zu den oben bewiesenen mechanischen Gleichungen. *Es ist von fundamentaler Wichtigkeit, zu bemerken, daß in ihnen nur Größen in Beziehung zueinander gesetzt werden, die sich aus dem Feldverlauf außerhalb des Teilchens* (auf der Oberfläche von Ω) *bestimmen und nichts zu tun haben mit den singulären Zuständen im Innern desselben.* — Nicht auf der Trennung von Energie-Impuls in solche des äußeren Feldes und des Teilchens (wie wir die Sache in § 25 darstellten), sondern auf dieser durch die Scheidung von Zeit und Raum bedingten Gegenüberstellung des ersten und der drei letzten Glieder in den Divergenzgleichungen der Erhaltungssätze, auf dem Umstande, daß die Singularitäts-Kanäle der materiellen Teilchen nur in *einer* Dimension eine unendliche, in *dreien* eine eng begrenzte Ausdehnung haben, beruht in Wahrheit der Gegensatz von kinetisch und potentiell, welcher im Grundgesetz der Mechanik zum Ausdruck kommt. Diese Auffassung wurde am deutlichsten von Mie in dem 3., von »Kraft und Trägheit« handelnden Teil seiner bahnbrechenden »Grundlagen einer Theorie der Materie«

vertreten[38]). Es gilt jetzt, diesen Standpunkt für das gegenwärtig angenommene Wirkungsprinzip durchzuführen.

Dazu ist es nötig, sich genau Rechenschaft zu geben über den Sinn der elektromagnetischen und der Gravitationsgleichungen. Sprechen wir zunächst von den Maxwellschen Gleichungen, so dürfen wir ganz von der Gravitation absehen, stellen uns einen Augenblick also wieder auf den Boden der speziellen Relativitätstheorie. Es hieße, in die Substanzvorstellung zurückfallen, wenn wir die Maxwell-Lorentzsche Gleichung

$$\frac{\partial \mathfrak{f}^{ik}}{\partial x_k} = \varrho u^i$$

so wörtlich interpretieren wollten, daß wir sie auf die Volumelemente eines Elektrons anwenden. Ihre wahre Meinung ist vielmehr die folgende: Außerhalb des Ω-Kanals gelten die homogenen Gleichungen

$$\frac{\partial \mathfrak{f}^{ik}}{\partial x_k} = 0. \tag{91}$$

Die einzige statische kugelsymmetrische Lösung $\bar{f}_{ik}$ derselben ist die aus dem Potential $\frac{e}{r}$ entspringende; sie liefert den Fluß e [und nicht 0, wie es bei einer singularitätenfreien Lösung von (91) der Fall wäre] des elektrischen Feldes durch eine das Teilchen einschließende Hülle Ω. Wegen der Linearität der Gleichungen (91) gehen diese Eigenschaften nicht verloren, wenn man zu $\bar{f}_{ik}$ eine beliebige singularitätenfreie Lösung f_{ik} der Gleichungen (91) hinzufügt; eine solche ist insbesondere $f_{ik} =$ konst. *Von dieser Art: $f_{ik} + \bar{f}_{ik}$ soll das Feld sein, welches unser sich bewegendes Elektron umgibt*, falls wir in dem betrachteten Moment ein Koordinatensystem einführen, in welchem das Elektron ruht; diese Annahme über die Beschaffenheit des Feldes außerhalb Ω ist natürlich nur gerechtfertigt, wenn quasistationäre Bewegung vorliegt, die Weltlinie des Teilchens hinreichend wenig von einer Geraden abweicht. Der Term ϱu^i in der Lorentzschen Gleichung soll den Einfluß der Ladungs-Singularitäten in Bausch und Bogen zum Ausdruck bringen für ein Gebiet, das viele Elektronen enthält. Aber man sieht, daß dieser Ansatz überhaupt nur in Frage kommt für *quasistationäre Bewegung*. Darüber, was bei starker Beschleunigung geschieht, läßt sich gar nichts sagen. Die heute unter allen Physikern verbreitete Meinung, daß nach der klassischen Elektrodynamik ein stark beschleunigtes Teilchen strahlt, scheint mir ganz unbegründet; sie rechtfertigt sich nur dann, wenn man den Lorentzschen Gleichungen die vorhin zurückgewiesene, allzu wörtliche Auffassung unterlegt und dabei noch annimmt, daß die Konstitution des Elektrons durch die Beschleunigung nicht modifiziert wird. Die durch die Erfahrung glänzend bestätigte *Bohrsche Atomtheorie* hat zu der Vorstellung geführt, daß es für die im Atom umlaufenden Elektronen einzelne stationäre Bahnen gibt, auf denen sie dauernd ohne Ausstrahlung verharren können; nur beim

Übergang von einer stationären Bahn auf eine andere wird die dabei vom Atom verlorene Energie als elektromagnetische Schwingungsenergie ausgesandt[39]). Wenn die Materie als Grenzsingularität des Feldes aufgefaßt werden muß, sagen unsere Feldgleichungen nur etwas aus über die *möglichen Zustände des Feldes*, nichts über die *Verursachung der Feldzustände durch die Materie;* diese Lücke füllt einstweilen in einer prinzipiell noch völlig unverstandenen Weise die *Quantentheorie* aus. — Die obige Annahme über den singulären Bestandteil $\overline{f}$ des das Teilchen umgebenden Feldes ist nach unserer Meinung zutreffend für ein quasistationär bewegtes Elektron. Natürlich kann man aber auch andere Annahmen verfolgen; wenn das Teilchen z. B. ein strahlendes Atom ist, wird man für $\overline{f}_{ik}$ das Feld eines schwingenden Hertzschen Dipols zu setzen haben (das ist ein möglicher Feldzustand, der freilich nach Bohr auf ganz andere Weise durch die Materie verursacht wird, als es Hertz sich vorstellte).

Was die Gravitation betrifft, so stellen wir uns zunächst auf den Boden der ursprünglichen Einsteinschen Theorie. Da haben die (homogenen) Gravitationsgleichungen (nach § 31) eine statische kugelsymmetrische Lösung, die von *einer einzigen Konstanten m, der Masse*, abhängt; der Fluß des Gravitationsfeldes durch eine hinreichend große Kugel um das Zentrum ist nicht $= 0$, wie es sein müßte, wenn die Lösung ohne Singularität wäre, sondern $= m$. Wir nehmen an, daß diese Lösung für unser sich bewegendes Teilchen in folgendem Sinne maßgebend ist: Den außerhalb des Kanals herrschenden Wertverlauf der g_{ik} denken wir uns glatt über den Kanal ausgedehnt, indem wir die feine tiefe Furche, welche die Bahn des Materieteilchens in das metrische Antlitz der Welt reißt, ausglätten, und behandeln den Stromfaden des Teilchens als eine Linie in diesem ausgeglätteten metrischen Felde. ds sei das zugehörige Eigenzeit-Differential. Wir können zu einer Stelle des Stromfadens ein solches (»normales«) Koordinatensystem einführen, daß dort

$$ds^2 = dx_0^2 - (dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2)$$

wird, die Ableitungen $\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x_i}$ verschwinden und die Richtung des Stromfadens durch

$$dx_0 : dx_1 : dx_2 : dx_3 = 1 : 0 : 0 : 0$$

gegeben ist. In diesen Koordinaten soll das Feld durch die erwähnte statische Lösung ausgedrückt werden (natürlich nur in einer gewissen Umgebung des betrachteten Weltpunkts, aus welcher der Kanal des Teilchens auszuschneiden ist). Deuten wir die normalen Koordinaten x_i als Cartesische in einem vierdimensionalen Euklidischen Bildraum, so geht durch diese Abbildung die Weltlinie des Teilchens über in eine gewisse Kurve des Bildraums; unsere Annahme ist natürlich wiederum nur dann zulässig, wenn die Bewegung quasistationär ist, d. h. wenn diese Bildkurve an der betrachteten Stelle wenig gekrümmt ist. (Die Verwandlung der homogenen Gravitationsgleichungen in die inhomogenen, auf deren rechter

Seite der Tensor $\mu u_i u_k$ auftritt, berücksichtigt die Massensingularitäten, indem sie sie zu einem Kontinuum »verschmiert«; berechtigt ist dieser Ansatz nur im quasistationären Fall.)

Nun zurück zur Herleitung der mechanischen Gleichungen! Wir benutzen ein für allemal die durch $F =$ konst. normierte Eichung und vernachlässigen die kosmologischen Terme außerhalb des Kanals. Der Einfluß der Ladung des Elektrons auf des Gravitationsfeld ist, wie wir wissen (§ 32), in hinreichender Entfernung von dem Teilchen gegenüber dem Einfluß der Masse zu vernachlässigen. Infolgedessen können wir, im normalen Koordinatensystem rechnend, als Gravitationsfeld das oben erwähnte annehmen. Die Bestimmung des elektromagnetischen Feldes ist dann wie im gravitationslosen Fall ein lineares Problem; es soll die oben hergeleitete Form $f_{ik} + \bar{f}_{ik}$ besitzen (mit $f_{ik} =$ konst. auf der Oberfläche von Ω). Dieser Ansatz ist aber nur dann mit den Feldgesetzen verträglich, wenn $e =$ konst. ist. Zum Beweise berechnen wir aus einem den Kanal regulär ausfüllenden fingierten Feld, das sich nach außen an das wirklich bestehende anschließt, in einem willkürlichen Koordinatensystem

$$\frac{\partial \mathfrak{f}^{ik}}{\partial x_k} = \mathfrak{s}^i, \quad \int\limits_{\Omega} \mathfrak{s}^0 \, dx_1 dx_2 dx_3 = e^* .$$

e^* ist von der Wahl des fingierten Feldes unabhängig, da es sich als ein Feldfluß durch die Oberfläche von Ω darstellen läßt. Da (bei Vernachlässigung der kosmologischen Terme) die $\mathfrak{s}^i$ auf dieser Oberfläche verschwinden, liefert die Definitionsgleichung

$$\text{aus } \frac{\partial \mathfrak{s}^i}{\partial x_i} = 0 \text{ sofort durch Integration } \frac{de^*}{dt} = 0;$$

und außerdem zeigt die Überlegung von § 33, daß e^* unabhängig ist von dem gewählten Koordinatensystem. Benutzen wir an einer Stelle das normale Koordinatensystem, so zeigt die Darstellung von e^* als Feldfluß, daß $e^* = e$ ist.

Von der Ladung zum Impulse übergehend, müssen wir zunächst beachten, daß wir uns hier bezüglich der Darstellung der Energie-Impulskomponenten durch Feldflüsse nicht auf die allgemeine Theorie des § 35 berufen dürfen, weil wir durch die partielle Integration, welche zu (84) führte, die Koordinateninvarianz unserer Wirkungsgröße preisgegeben haben. Man muß daher folgendermaßen verfahren. Mit Hilfe des den Kanal regulär überbrückenden fingierten Feldes definieren wir

$$\alpha \mathfrak{S}_i^k \text{ durch den Ausdruck } (\mathfrak{R}_i^k - \tfrac{1}{2}\delta_i^k \mathfrak{R}) + \left(\mathfrak{G}\delta_i^k - \tfrac{1}{2}\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x_i}\mathfrak{G}^{\alpha\beta, k}\right);$$

für ihn ist die Gleichung

$$\frac{\partial \mathfrak{S}_i^k}{\partial x_k} = 0 \tag{92}$$

eine Identität. Daraus erhalten wir durch Integration die Gleichung (90) mit

$$J_i = \int_{\Omega} \mathfrak{S}_i^0 \, dx_1 \, dx_2 \, dx_3 \, .$$

K_i drückt sich aus als Feldfluß durch die Oberfläche von Ω; in diesen Ausdrücken kann das fingierte Feld durch das wirkliche und außerdem nach den Gravitationsgleichungen

$$\frac{1}{\alpha}(\mathfrak{R}_i^k - \tfrac{1}{2}\delta_i^k \mathfrak{R}) \text{ durch } \mathfrak{l}\delta_i^k - f_{ir}\mathfrak{f}^{kr}$$

ersetzt werden. Bei Benutzung des normalen Koordinatensystems fällt nun hier der von der Gravitationsenergie herrührende Anteil fort; denn deren Komponenten hängen nicht nur linear, sondern quadratisch von den (verschwindenden) Ableitungen $\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x_i}$ ab. Es bleibt somit nur der nach Maxwell zu berechnende elektromagnetische Anteil. Da die Komponenten der Maxwellschen Energiedichte quadratisch vom Felde $f + \overline{f}$ abhängen, setzt sich jede derselben aus drei Termen zusammen gemäß der Formel

$$(f + \overline{f})^2 = f^2 + 2f\overline{f} + \overline{f}^2 .$$

Von ihnen liefert jeweils das erste Glied keinen Beitrag, da der Fluß eines konstanten Vektors durch eine geschlossene Oberfläche 0 ist; das letzte ist zu vernachlässigen, da es das schwache Feld $\overline{f}$ im Quadrat enthält; es bleibt nur das mittlere. Dies aber liefert

$$K_i = e f_{0i} \, .$$

Von den Impulsgrößen ferner erkennen wir auf dem gleichen Wege wie in § 33, indem wir uns auf die Identitäten (92) stützen und den Querschnitt des Stromfadens im Vergleich zum äußeren Felde als unendlich-klein behandeln: 1) daß gegenüber solchen Koordinatentransformationen, die im Kanalquerschnitt als linear zu betrachten sind, J_i die kovarianten Komponenten eines vom Koordinatensystem unabhängigen Vektors sind; und 2) daß bei Abänderung des den Kanal erfüllenden fingierten Feldes (in § 33 war statt dessen von der Abänderung des Koordinatensystems im Kanal die Rede) die Größen J_i ihre Werte behalten. Im normalen Koordinatensystem aber, wo das Gravitationsfeld, welches das Teilchen umgibt, die in § 31 errechnete Gestalt besitzt, ergibt sich, da man das fingierte Feld als ein statisches wählen kann, nach S. 247: $J_1 = J_2 = J_3 = 0$ und J_0 gleich dem Fluß einer räumlichen Vektordichte durch die Oberfläche von Ω und damit gleich m. Wegen der Kovarianzeigenschaft von J_i ist folglich nicht nur an der betrachteten Stelle des Kanals, sondern auch unmittelbar vorher und nachher

$$J_i = m u_i \qquad \left(u^i = \frac{dx_i}{ds}\right);$$

Somit lauten die Bewegungsgleichungen unseres Teilchens im normalen Koordinatensystem:

$$\frac{d(mu_i)}{dt} = e f_{oi}. \tag{93}$$

Die 0te dieser Gleichungen liefert $\frac{dm}{dt} = 0$; also fordern die Feldgleichungen die Konstanz der Masse. In einem beliebigen Koordinatensystem aber gilt

$$\frac{d(mu_i)}{ds} - \frac{1}{2}\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x_i} m u^\alpha u^\beta = e \cdot f_{ki} u^k. \tag{94}$$

Denn die Beziehungen (94) sind invariant gegenüber Koordinatentransformation und stimmen für das normale Koordinatensystem mit (93) überein. *Als notwendige Bedingung dafür, daß sich ein Singularitäts-Kanal, in dessen unmittelbarer Umgebung das Feld die geforderte Struktur besitzt, in den übrigen Feldverlauf einpaßt, verlangen die Feldgesetze demnach, daß die Größen e und m, welche an jeder Stelle des Kanals die Singularität charakterisieren, längs des Kanals konstant bleiben, die Weltrichtung des Kanals aber den Gleichungen*

$$\frac{du_i}{ds} - \frac{1}{2}\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x_i} u^\alpha u^\beta = \frac{e}{m} \cdot f_{ki} u^k$$

genügt.

Im Lichte dieser Betrachtungen muß, glaube ich, der in § 25 verfochtene Gedanke, daß Masse und Feldenergie identisch seien, als eine voreilige Schlußfolgerung erscheinen und bekommt überhaupt die ganze Miesche Auffassung der Materie etwas Phantastisch-Unwirkliches. Freilich mußte man innerhalb der speziellen Relativitätstheorie notwendig zu dieser Auffassung kommen; erst die allgemeine ermöglicht es ja, die Masse m als einen Feldfluß darzustellen und der Welt solche Zusammenhangsverhältnisse zuzuschreiben, wie sie die Einsteinsche »Zylinderwelt« (§ 34) besitzt, wenn aus ihr einzelne sich beiderseits ins Unendliche erstreckende schlauchförmige Kanäle herausgeschnitten werden. Jene Darstellung von m besagt, daß nicht nur träge und schwere Massen wesensidentisch sind, sondern beide, nämlich die Masse als *Angriffspunkt* des metrischen Feldes auch wesensgleich ist mit der Masse als *Erzeuger* des metrischen Feldes. Das physikalisch Bedeutungsvolle an der Behauptung von der Trägheit der Energie bleibt natürlich trotzdem bestehen. Beispielsweise verliert ein strahlendes Teilchen um so viel an träger Masse, als die von ihm ausgestrahlte elektromagnetische Energie beträgt (an diesem Beispiel erkannte Einstein zuerst den engen Zusammenhang zwischen Energie und Trägheit); das läßt sich gerade durch unsere gegenwärtige Betrachtungsart besonders streng und einfach beweisen. Ferner bedeutet der neue Standpunkt natürlich durchaus keinen Rückfall in die Substanz-Vorstellung. Sinnlos aber wird von ihm aus die Frage nach dem Kohäsionsdruck, der die Ladung des Elektrons zusammenhält.

Ungefähr mit der gleichen Plausibilität wie in der Einsteinschen Theorie dürfen wir aus unsern Ergebnissen schließen, daß eine *Uhr* bei quasistationärer Bewegung diejenige Eigenzeit $\int ds$ angibt, welche der Normierung $F =$ konst. entspricht*). Würde bei der Bewegung einer Uhr (eines Atoms) mit unendlich kleiner Periode die von ihr während einer Periode zurückgelegte Weltstrecke sich von Periode zu Periode kongruent verpflanzen im Sinne unserer Weltgeometrie, so würden zwei Uhren, welche von dem gleichen Weltpunkt A mit derselben Periode ausgehen, d. h. welche während ihrer ersten Periode kongruente Weltstrecken in A zurücklegen, beim Zusammentreffen in einem späteren Weltpunkt B im allgemeinen verschiedene Perioden besitzen. In dieser Weise kann sich der Umlauf der Elektronen im Atom also jedenfalls nicht vollziehen, da die Atome Spektrallinien bestimmter Frequenz aussenden, unabhängig von ihrer Vorgeschichte. Ebensowenig erfährt ein in einem statischen Felde ruhender Maßstab eine kongruente Verpflanzung; denn die Maßzahl $l = d\sigma^2$ eines ruhenden Maßstabs ändert sich nicht, während sie bei kongruenter Verpflanzung der Gleichung $\frac{dl}{dt} = -l \cdot \varphi$ genügen müßte. Worin liegt diese Diskrepanz zwischen dem Begriff der kongruenten Verpflanzung und dem Verhalten der Maßstäbe, Uhren und Atome begründet? — Ich unterscheide die Bestimmung einer Größe in der Natur durch *Beharrung* und durch *Einstellung;* den Unterschied mache ich an folgendem Beispiele klar. Der Achse eines rotierenden Kreisels können wir jede beliebige Richtung im Raum erteilen; aus dieser willkürlichen Anfangsrichtung bestimmt sich dann aber die Richtung der Achse des sich selbst überlassenen Kreisels für alle Zeiten durch eine von Moment zu Moment wirksame *Beharrungstendenz:* die Achse erfährt in jedem Augenblick eine infinitesimale Parallelverschiebung. Dem konträr entgegengesetzt ist der Fall einer Magnetnadel im Magnetfeld: ihre Richtung bestimmt sich in jedem Augenblick, unabhängig vom Zustand des Systems in den andern Augenblicken, dadurch, daß das System sich vermöge seiner Konstitution auf das Feld, in welches es eingebettet ist, in eindeutig determinierter Weise *einstellt.* Von einer rein der Beharrungstendenz folgenden Verpflanzung haben wir a priori keinen Grund anzunehmen, daß sie integrabel sei. Aber sei das auch der Fall, wie z. B. für die Rotationen des Kreisels im Euklidischen Raum; es werden dennoch zwei Kreisel, die von demselben Punkte mit gleicher Achsenstellung ausgingen und

---

*) Freilich ist die invariante quadratische Form $F \cdot ds^2$ lange nicht in dem Maße vor allen andern Formen von der Gestalt $E \cdot ds^2$ (E ein Skalar vom Gewichte -1) ausgezeichnet wie das ds^2 der Einsteinschen Theorie, das die Ableitungen der Potentiale überhaupt nicht enthält. Deshalb ist hier der bei Herleitung der *Rotverschiebung* (S. 223) gezogene Schluß, daß gleiche Atome, in der der Normierung $F =$ konst. entsprechenden Eigenzeit ds gemessen, die gleiche Frequenz ausstrahlen, lange nicht so zwingend wie bei Einstein; er verliert überhaupt seine Berechtigung, wenn ein anderes Wirkungsprinzip als das hier diskutierte Gültigkeit hat.

sich nach Ablauf einer sehr langen Zeit wieder treffen, beliebige Abweichungen der Achsenstellung aufweisen, da sie ja niemals vollständig gegen jede Einwirkung isoliert werden können. Obschon also z. B. die Maxwellschen Gleichungen für die Ladung e eines Elektrons die Erhaltungsgleichung $\frac{de}{dt} = 0$ fordern, können wir daraus nicht verstehen, weshalb ein Elektron selbst nach beliebig langer Zeit immer noch die gleiche Ladung besitzt und weshalb allen Elektronen dasselbe e zukommt. Dieser Umstand beweist, daß die Ladung sich nicht durch Beharrung, sondern durch Einstellung bestimmt: es kann nur *einen* Gleichgewichtszustand der negativen Elektrizität geben, auf den sich das Korpuskel in jedem Augenblick von neuem einstellt. Aus dem gleichen Grunde können wir das Gleiche für die Spektrallinien der Atome schließen; ist doch auch das Gemeinsame der die gleichen Frequenzen ausstrahlenden Atome ihre Konstitution und nicht die Übereinstimmung ihrer Frequenzen bei einem zeitlich weit zurückliegenden Zusammentreffen. Ebenso bestimmt sich die Länge eines Maßstabes offenbar durch Einstellung; denn *diesem* Maßstab an *dieser* Feldstelle hätte ich nicht willkürlich anstatt der Länge, die er jetzt einnimmt, irgendeine andere, etwa die doppelte oder dreifache, geben können, wie ich ihm die Richtung beliebig vorschreiben kann. Durch die Weltkrümmung ist die theoretische Möglichkeit einer Längenbestimmung durch Einstellung gegeben: zufolge seiner Konstitution nimmt der Maßstab eine Länge an, die im Verhältnis zum Krümmungsradius des Feldes den und den Wert besitzt. (Vielleicht ist die Rotationsdauer eines Kreisels ein Beispiel für eine Zeitlänge, die sich durch Beharrung bestimmt; wenn dasselbe, wie wir oben annehmen, für die Richtung gilt, so würde bei der Bewegung des Kreisels in jedem Augenblick der Drehvektor eine Parallelverschiebung erfahren.) Zusammenfassend können wir also sagen: durch affinen und metrischen Zusammenhang wird a priori festgelegt, wie Vektoren und Längen sich ändern, *falls sie rein der Beharrungstendenz folgen.* Wie weit das aber in der Natur der Fall ist und in welchem Verhältnis Beharrung und Einstellung sich gegenseitig modifizieren, kann nur auf Grund der geltenden Naturgesetze, des Wirkungsprinzips, ausgemacht werden.

Das bisher diskutierte ist dasjenige, mit dem neuen Grundsatz der Eichinvarianz verträgliche Wirkungsprinzip, welches der Maxwell-Einsteinschen Theorie am nächsten kommt. Wir sahen, daß es mit allen Erfahrungen, über welche jene Theorie Rechenschaft gibt, gleichfalls im Einklang steht, hinsichtlich der tiefer greifenden Fragen, der kosmologischen und des Problems der Materie, ihr aber entschieden überlegen ist. Ich zweifle trotzdem daran, daß die Hamiltonsche Funktion (83) der Wirklichkeit entspricht. Wohl werden wir annehmen dürfen, daß $\mathfrak{W}$ die Gestalt besitzt $W\sqrt{g}$, wo W eine in ganzer rationaler Weise aus den Krümmungskomponenten gebildete Invariante vom Gewichte -2 ist. Solcher Invarianten lassen sich nur *vier* aufstellen, aus denen sich jede

mittels numerischer Koeffizienten linear zusammensetzen läßt[40]). Eine ist die Maxwellsche

(95) $$l = \frac{1}{4} f_{ik} f^{ik},$$

eine andere die eben benutzte F^2. Die Krümmung aber ist von Hause aus ein linearer Matrix-Tensor 2. Stufe: $\mathsf{F}_{ik} dx_i \delta x_k$. Nach dem gleichen Gesetz, nach welchem (95), das Quadrat des absoluten Betrages, aus der Streckenkrümmung f_{ik} hervorgeht, können wir aus der totalen Krümmung bilden:

(96) $$\frac{1}{4} \mathsf{F}_{ik} \mathsf{F}^{ik}.$$

Die Multiplikation ist hier als Zusammensetzung der Matrizen zu deuten; (96) ist daher selber wiederum eine Matrix. Erst ihre Spur L ist ein Skalar, und zwar ein Skalar vom Gewichte — 2. Die beiden Größen L und l erscheinen mir als diejenigen Invarianten der geforderten Art, welche auf die natürlichste Weise aus der Krümmung gebildet sind, und nur in einer vierdimensionalen Welt existieren überhaupt Invarianten von so natürlichem und einfachem Bau. Ich glaube also eher, daß W eine lineare Kombination von L und l ist. Die Maxwellschen Gleichungen lauten dann wie oben: bei Normierung der Eichung durch $F =$ konst. ist $\mathfrak{s}^i$ gleich einem konstanten Multiplum von $\sqrt{g}\varphi^i$ und $\mathfrak{h}^{ik} = \mathfrak{f}^{ik}$. Die Gravitationsgesetze stimmen im statischen Fall auch hier in erster Annäherung mit dem Newtonschen überein. Rechnungen von Pauli[41]) haben sogar ergeben, daß das in § 31 bestimmte Feld nicht bloß eine strenge Lösung der Einsteinschen, sondern auch der hier befürworteten Gleichungen ist, so daß der Betrag des Perihelvorgangs beim Merkur und der Betrag der Strahlenablenkung durch die Sonne zum mindesten nicht mit ihnen in Widerspruch stehen. Aber in der Frage der mechanischen Gleichungen und des Zusammenhangs der durch Maßstäbe und Uhren gewonnenen Meßresultate mit der quadratischen Fundamentalform ds^2 scheint der Anschluß an die alte Theorie unterbrochen zu sein; hier kann man auf neue Ergebnisse stoßen.

Ein ernstlicher Einwand läßt sich gegen die Theorie in ihrem jetzigen Zustand erheben: sie gibt keine Rechenschaft von der *Ungleichwertigkeit der positiven und negativen Elektrizität*[42]). Um aus dieser Schwierigkeit herauszukommen, scheinen mir zwei Wege offen zu stehen. Entweder man müßte in das Wirkungsgesetz eine Quadratwurzel oder irgendeine andere Irrationalität einführen; es ist bei Gelegenheit der Mieschen Theorie erörtert worden, wie dadurch die gewünschte Ungleichwertigkeit hervorgerufen werden kann, aber auch welchen Bedenken eine solche irrationale Wirkungsgröße unterliegt. Viel eher, glaube ich, entspricht eine andere Auffassung der Wirklichkeit. Wir haben uns hier nur mit dem *Felde* beschäftigt, das gewissen allgemein-invarianten funktionalen Gesetzen genügt. Etwas anderes aber ist die Frage nach der *Anregung* oder *Ursache* derjenigen Feldzustände, welche nach diesen Gesetzen als möglich erscheinen; sie weist auf eine jenseits des Feldes liegende Realität hin.

So ist im Äther ebensogut eine einlaufende wie eine auslaufende elektromagnetische Kugelwelle möglich; nur der letztere Vorgang aber kann durch ein im Zentrum liegendes Atom, das bei einem Bohrschen Elektronensprung Energie abgibt, ausgelöst werden. Dies Beispiel zeigt, was auch ohnehin klar ist: daß die Idee der Verursachung (im Gegensatz zur funktionalen Beziehung) aufs engste verbunden ist mit der *ausgezeichneten Ablaufsrichtung der Zeit: Vergangenheit → Zukunft.* Diese Einsinnigkeit der Zeit besteht fraglos — sie ist sogar die fundamentalste Tatsache unseres Zeiterlebens —, aber es ist a priori ausgeschlossen, daß sie innerhalb der Feldphysik irgendwie zur Geltung kommen kann. Nun sahen wir aber oben (§ 33), daß die Ladung eines isolierten Systems auch ihrem Vorzeichen nach vollständig bestimmt ist, sobald ein bestimmter Stromsinn Vergangenheit → Zukunft in dem vom System durchfegten Weltkanal festgelegt ist. Dadurch ist die Ungleichwertigkeit von positiver und negativer Elektrizität gebunden an die Ungleichwertigkeit von Vergangenheit und Zukunft: dieses Problem aber hat seine Wurzel nicht im Felde, sondern weist darüber hinaus. Beispiele solcher Gesetzmäßigkeiten, welche nicht das Feld, sondern die Verursachung der Feldzustände betreffen, sind: die Existenz innerer schlauchartiger Grenzen des Feldes; unsere obigen Annahmen über die Beschaffenheit des Feldes in deren unmittelbarer Umgebung; ferner und vor allem die Tatsachen der Quantentheorie. Aber die bisherigen Formulierungen dieser Gesetzmäßigkeiten sind gewiß noch sehr provisorischer Natur. Immerhin scheint es mir, als ob die *Statistik* in ihnen eine prinzipiell unentbehrliche Rolle spielt. Es muß einmal klipp und klar gesagt werden, daß die Physik bei ihrem heutigen Stande den Glauben an eine auf streng exakten Gesetzen beruhende geschlossene Kausalität der materiellen Natur gar nicht mehr zu stützen vermag. Das extensive Feld, der »Äther«, ist lediglich der in sich selber völlig kraftlose *Übermittler* der Wirkungen; er spielt durchaus keine andere Rolle wie der Raum mit seiner starren Euklidischen Metrik nach alter Auffassung; nur hat sich der starre, unbewegte in einen allen Eindrücken zart nachgebenden, geschmeidigen Diener gewandelt. Die Freiheit des Handelns in der Welt ist aber durch die strengen Gesetze der Feldphysik nicht anders eingeschränkt als nach gewöhnlicher Auffassung durch die Gültigkeit der Gesetze der Euklidischen Geometrie.

Hatte die Miesche Anschauung Recht, so durften wir im Felde die objektive Wirklichkeit schlechthin erblicken, und die Physik schien dem Ziel nicht mehr ferne zu sein, wo sie uns das Wesen der physischen Welt, der Materie und der Naturkräfte, so vollständig begreifen lehrte, daß sich aus dieser Einsicht mit vernunftmäßiger Notwendigkeit die Gesetze eindeutig ergeben mußten, welche den Ablauf der Naturvorgänge regeln. So kühner Hoffnungen müssen wir uns freilich jetzt fürs erste entschlagen. Die Gesetze des metrischen Feldes handeln weniger von der Wirklichkeit selber als von dem schattenhaften extensiven Medium, das die Verbindung zwischen Wirklichem vermittelt, und von der formalen Verfassung

dieses Mediums, die es zur Wirkungsübertragung befähigt. Bereits hat die *statistische Physik*, die Quantentheorie eine tiefere Schicht der Wirklichkeit angeschnitten, als sie der Feldphysik zugänglich ist; das Problem der Materie aber liegt noch ganz und gar im Dunkel. Die Erkenntnis der eingeschränkten Bedeutung der Feldphysik soll uns aber nicht undankbar machen gegen die großen Einsichten, zu denen sie uns verholfen hat. Wer auf den durchmessenen Weg zurückschaut, der uns von der Euklidischen Metrik zu dem beweglichen, von der Materie abhängigen metrischen Felde führte, das die Felderscheinungen der Gravitation und des Elektromagnetismus mit einschließt, wer in einem einzigen Blick das Ganze zu umspannen sucht, was nur sukzessive und in ein gegliedertes Mannigfaltige aufgelöst zur Darstellung kommen konnte, muß von dem Gefühl errungener Freiheit überwältigt werden — ein festgefügter Käfig, in den das Denken bisher gebannt war, ist gesprengt —; er muß durchdrungen werden von der Gewißheit, daß unsere Vernunft nicht bloß ein menschlicher, allzumenschlicher Notbehelf im Kampf des Daseins, sondern ungeachtet aller Trübungen und alles Irrtums doch der Weltvernunft gewachsen ist und das Bewußtsein eines jeden von uns der Ort, wo das Eine Licht und Leben der Wahrheit sich selbst in der Erscheinung ergreift. Ein paar Grundakkorde jener Harmonie der Sphären sind in unser Ohr gefallen, von der Pythagoras und Kepler träumten.

Anhang I.

(Zu Seite 161 und 207.)

Um in der speziellen Relativitätstheorie die »normalen« Koordinatensysteme vor allen andern auszuzeichnen, in der allgemeinen die metrische Fundamentalform zu bestimmen, kann man nicht bloß der starren Körper, sondern auch der Uhren entraten.

In der *speziellen* Relativitätstheorie wird durch die Forderung, daß bei der den Koordinaten x_i entsprechenden Abbildung eines Weltstücks auf den vierdimensionalen Euklidischen Bildraum mit den Cartesischen Koordinaten x_i die Weltlinien der kräftefrei sich bewegenden Massenpunkte in *Gerade* übergehen sollen (Galileisches Trägheitsprinzip), dieser Bildraum *bis auf eine projektive Abbildung* festgelegt. Denn es gilt der Satz, daß die projektiven die einzigen stetigen Abbildungen eines Raumstücks sind, durch welche Gerade in Gerade übergeführt werden. Er ergibt sich sogleich, wenn wir in der Möbiusschen Netzkonstruktion (Fig. 12) die unendlichferne durch eine unser Raumstück durchschneidende Gerade ersetzen (Fig. 15). Der Vorgang der Lichtausbreitung legt dann in unserm vierdimensionalen projektiven Bildraum das *Unendlich-Ferne* und die *Metrik* fest; denn seine (dreidimensionale) »unendlichferne Ebene« E ist dadurch gekennzeichnet, daß die Lichtkegel die von den verschiedenen Weltpunkten aus gewonnenen Projektionen eines und desselben in E gelegenen zweidimensionalen Kegelschnitts sind.

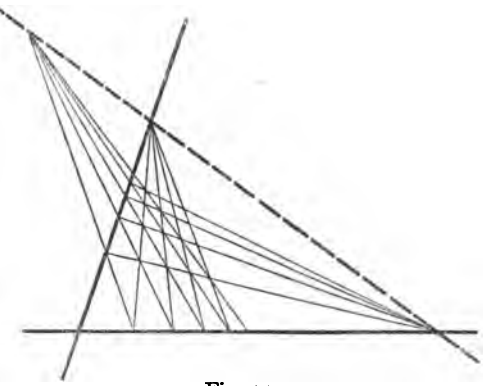


Fig. 15.

In der *allgemeinen* Relativitätstheorie gestalten sich diese Schlüsse am einfachsten so. Der vierdimensionale Riemannsche Raum, als welchen sich Einstein die Welt denkt, ist ein Sonderfall des allgemeinen metrischen Raums (§ 16). Bei dieser Auffassung können wir sagen, daß durch den Vorgang der Lichtausbreitung die *quadratische* Fundamentalform ds^2 bestimmt ist, während die *lineare* frei bleibt. Zwei verschiedene Wahlen der linearen Fundamentalform, die sich um $d\varphi = \varphi_i dx_i$ unterscheiden, entsprechen zwei verschiedene Werte des affinen Zusammenhangs; ihr Unterschied ist nach § 16, Formel (49) gegeben durch

$$[\Gamma^i_{\alpha\beta}] = \frac{1}{2}(\delta^i_\alpha \varphi_\beta + \delta^i_\beta \varphi_\alpha - g_{\alpha\beta}\varphi^i)\,.$$

Der Unterschied der beiden Vektoren, die aus einem Vektor u^i im Weltpunkt O durch die infinitesimale Parallelverschiebung von u^i in seiner eigenen Richtung (um das gleiche Stück $dx_i = \varepsilon \cdot u^i$) entstehen, ist daher gleich ε mal

$$u^i(\varphi_\alpha u^\alpha) - \frac{1}{2}\varphi^i; \tag{*}$$

dabei wurde $g_{\alpha\beta}u^\alpha u^\beta = 1$ angenommen. Stimmen für beide Felder die durch O in der Richtung des Vektors u^i hindurchlaufenden geodätischen Linien überein, so müssen jene beiden aus u^i durch Parallelverschiebung entstandenen Vektoren ihrer Richtung nach zusammenfallen, der Vektor (*) und daher φ^i muß die Richtung des Vektors u^i haben. Findet diese Übereinstimmung für *zwei* in verschiedener Richtung durch O hindurchgehende geodätische Linien statt, so ergibt sich $\varphi^i = 0$. Kennen wir also die Weltlinien zweier O passierenden, nur unter dem Einfluß des Führungsfeldes sich bewegenden Massenpunkte, so ist neben der quadratischen auch die lineare Fundamentalform in O eindeutig bestimmt.

Anhang II.

(Zu Seite 210.)

Beweis des Satzes, daß im Riemannschen Raum R die einzige Invariante ist, welche die Ableitungen der g_{ik} nur bis zur 2. Ordnung enthält, die der 2. Ordnung aber linear.

Die Invariante J ist nach Voraussetzung aus den Ableitungen 2. Ordnung

$$g_{ik,rs} = \frac{\partial^2 g_{ik}}{\partial x_r \partial x_s}$$

so zusammengesetzt:

$$J = \Sigma \lambda_{ik,rs} g_{ik,rs} + \lambda .$$

Die λ bedeuten Ausdrücke in den g_{ik} und deren 1. Ableitungen; sie genügen den Symmetriebedingungen

$$\lambda_{ki,rs} = \lambda_{ik,rs}, \qquad \lambda_{ik,sr} = \lambda_{ik,rs} .$$

In dem Punkte O, in welchem wir die Invariante betrachten, führen wir ein orthogonales geodätisches Koordinatensystem ein; so daß dort

$$g_{ik} = \delta_i^k, \qquad \frac{\partial g_{ik}}{\partial x_r} = 0$$

ist. Die λ gehen durch Eintragen dieser Werte in *absolute Konstante* über. Der ausgezeichnete Charakter des Koordinatensystems wird nicht zerstört:

1) durch lineare orthogonale Transformation;

2) durch eine Transformation

$$x_i = x'_i + \frac{1}{6} \alpha^i_{krs} x'_k x'_r x'_s ,$$

welche keine quadratischen Glieder enthält; die Koeffizienten α sind symmetrisch in krs, im übrigen aber willkürlich.

Betrachten wir also in einem Euklidisch-Cartesischen Raum (in welchem beliebige orthogonale lineare Transformationen zulässig sind) die von zwei Vektoren $x = (x_i)$, $y = (y_i)$ abhängige biquadratische Form

$$G = g_{ik,rs} x_i x_k y_r y_s$$

mit willkürlichen in i und k, ebenso in r und s symmetrischen Koeffizienten $g_{ik,rs}$, so muß

$$1) \qquad \lambda_{ik,rs} g_{ik,rs} \text{ eine Invariante}$$

dieser Form sein. Da ferner bei der Transformation 2) die Ableitungen $g_{ik,rs}$ sich, wie man leicht ausrechnet, nach der Gleichung verwandeln

$$g'_{ik,rs} = g_{ik,rs} + \frac{1}{2} (\alpha^i_{krs} + \alpha^k_{irs}) ,$$

muß

$$2) \qquad \lambda_{ik,rs} \alpha^i_{krs} = 0$$

sein für jedes in den drei Indizes krs symmetrische System von Zahlen α.

Wir operieren weiter im Euklidisch-Cartesischen Raum; (xy) bedeutet das skalare Produkt $x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n$. Es genügt, für G eine Form der folgenden besonderen Gestalt zu verwenden:

$$G = (ax)^2 (by)^2 ,$$

wo a und b zwei willkürliche Vektoren sind. Schreiben wir hernach wieder x und y statt a und b, so liefert 1) die Forderung, daß

$$1^*) \qquad \Lambda = \Lambda_x = \Sigma \lambda_{ik, rs} x_i x_k y_r y_s$$

eine Orthogonal-Invariante der beiden Vektoren x, y ist. In 2) genügt es,

$$\alpha^i_{krs} = x_i \cdot y_k y_r y_s$$

zu wählen; dann lautet diese Bedingung, daß die aus Λ_x durch Verwandlung eines x in y entstehende Form

$$2^*) \qquad \Lambda_y = \Sigma \lambda_{ik, rs} x_i y_k y_r y_s \text{ identisch verschwindet.}$$

(Man gewinnt sie aus Λ_x, indem man zunächst diejenige — von y quadratisch abhängige — symmetrische Bilinearform $\Lambda_{xx'}$ in x, x' bildet, welche bei Identifizierung der Variablenreihe x' mit x in Λ_x übergeht, und darauf x' durch y ersetzt.) Ich behaupte: aus 1*) folgt, daß Λ die Form hat

$$\text{(I)} \qquad \Lambda = \alpha (xx)(yy) - \beta (xy)^2 ,$$

aus 2*):

$$\text{(II)} \qquad \alpha = \beta .$$

Damit wird alles erledigt sein. Denn nun haben wir

$$J = \alpha (g_{ii, kk} - g_{ik, ik}) + \lambda ,$$

oder da in einem orthogonal-geodätischen Koordinatensystem der Riemannsche Krümmungsskalar

$$R = g_{ik, ik} - g_{ii, kk}$$

ist:

$$(*) \qquad J = -\alpha R + \lambda .$$

Beweis von (I): Wir können ein Cartesisches Koordinatensystem so einführen, daß x in die 1. Koordinatenachse fällt, y in die (12)te Koordinatenebene:

$$x = (x_1, 0, 0, \cdots, 0), \qquad y = (y_1, y_2, 0, \cdots, 0);$$
$$\Lambda = x_1^2 (a y_1^2 + 2 b y_1 y_2 + c y_2^2) .$$

Dabei kann der Richtungssinn der 2. Koordinatenachse noch willkürlich gewählt werden; weil Λ von dieser Wahl nicht abhängen darf, muß $b = 0$ sein:

$$\Lambda = c x_1^2 (y_1^2 + y_2^2) + (a - c)(x_1 y_1)^2 = c (xx)(yy) + (a - c)(xy)^2 .$$

Beweis von (II): Aus dem unter (I) angegebenen $\Lambda = \Lambda_x$ entstehen die Formen

$$\Lambda_{xx'} = \alpha (xx')(yy) - \beta (xy)(x'y) ,$$
$$\Lambda_y = (\alpha - \beta)(xy)(yy) .$$

Soll Λ_y verschwinden, so muß $\alpha = \beta$ sein. —

Wir haben stillschweigend angenommen, daß die metrische Fundamentalform des Riemannschen Raums positiv-definit ist; im Falle eines andern Trägheitsindex ist im »Beweis von (I)« eine geringe Modifikation erforderlich. — Damit im Volumintegral von J durch partielle Integration die Ableitungen 2. Ordnung herausgeworfen werden, ist übrigens erforderlich, daß die $\lambda_{ik, rs}$ nur von den g_{ik}, nicht von ihren Ableitungen abhängen; das brauchte im Beweise aber gar nicht benutzt zu werden. — Über die physikalische Bedeutung der Möglichkeit, nach (*) zu einem Multiplum von R noch eine universelle Konstante λ additiv hinzuzufügen, vgl. § 34; zu dem hier bewiesenen Satze: Vermeil, Nachr. d. Ges. d. Wissensch. zu Göttingen, 1917, S. 334—344. — Auf die gleiche Art kann man auch beweisen, daß g_{ik}, $R g_{ik}$, R_{ik} die einzigen Tensoren 2. Stufe sind, welche die Ableitungen der g_{ik} nur bis zur 2. Ordnung und diese linear enthalten.

Literatur.

(Hinter der Nummer jeder Literaturbemerkung ist in Fettdruck die Seite des Buchs angegeben, zu der sie gehört.)

Einleitung und Kapitel I.

1) **4.** Die präzise Fassung dieser Gedanken lehnt sich aufs engste an Husserl an, »Ideen zu einer reinen Phänomenologie und phänomenologischen Philosophie« (Jahrbuch f. Philos. u. phänomenol. Forschung Bd. I, Halle 1913).

2) **13.** Helmholtz hat in der Arbeit »Über die Tatsachen, welche der Geometrie zugrunde liegen« (Nachr. d. K. Gesellschaft d. Wissenschaften zu Göttingen, math.-physik. Kl., 1868) den ersten Versuch gemacht, die Geometrie auf die Eigenschaften der Bewegungsgruppe zu stützen. Eine schärfere mathematische Fassung und Lösung fand dieses »Helmholtzsche Raumproblem« in den Arbeiten von S. Lie (Berichte d. K. Sächs. Ges. d. Wissenschaften zu Leipzig, math.-phys. Kl., 1890) mit Hilfe der von Lie geschaffenen Theorie der kontinuierlichen Transformationsgruppen (man vgl. Lie-Engel, Theorie der Transformationsgruppen Bd. 3, Abt. 5). Im Geiste der Mengenlehre sind die zugrunde liegenden Voraussetzungen dann von Hilbert weitgehend eingeschränkt worden (Grundlagen der Geometrie, 3. Aufl., Leipzig 1909, Anhang IV).

3) **17.** Für die systematische Behandlung der affinen Geometrie, unter Abstreifung der speziellen Dimensionszahl 3, ist wie für das Gesamtgebiet des geometrischen Kalküls Grassmanns »Lineale Ausdehnungslehre« (Leipzig 1844) das bahnbrechende Werk. In der Konzeption des Begriffs einer mehr als dreidimensionalen Mannigfaltigkeit sind Grassmann sowohl als Riemann durch die philosophischen Ideen Herbarts beeinflußt.

4) **30.** Die systematische Gestalt, welche wir hier der Tensorrechnung geben, rührt im wesentlichen her von Ricci und Levi-Civita: Méthodes de calcul différentiel absolu et leurs applications, Math. Ann. Bd. 54 (1901).

Kapitel II.

1) **68.** Zu genauerer Orientierung sei auf das in der Teubnerschen Sammlung »Wissenschaft und Hypothese« (Bd. IV) erschienene Buch von Bonola und Liebmann, »Die Nicht-Euklidische Geometrie«, verwiesen.

2) **71.** F. Klein, Über die sogenannte Nicht-Euklidische Geometrie, Math. Ann. Bd. 4 (1871), S. 573. Vgl. auch die ferneren Abhandlungen in Math. Ann. Bd. 6 (1873), S. 112 und Bd. 37 (1890), S. 544.

3) **73.** Sixth Memoir upon Quantics, Philosophical Transactions, t. 149 (1859).

4) **81.** Mathematische Werke (2. Aufl., Leipzig 1892), Nr. XIII, S. 272. Als besondere Schrift herausgegeben und kommentiert vom Verf. (2. Aufl., Springer 1920).

5) **83.** Saggio di interpretazione della geometria non euclidea, Giorn. di Matem. t. VI (1868), S. 204; Opere Matem. (Höpli 1902), t. I, S. 374.

6) **83.** Grundlagen der Geometrie (3. Aufl., Leipzig 1909), Anhang V.

7) **86.** Vgl. die Zitate Kap. I,2). Christoffel, Über die Transformation der homogenen Differentialausdrücke zweiten Grades, Journ. f. d. reine und angew. Mathemathik Bd. 70 (1869); Lipschitz, im gleichen Journal Bd. 70 (1869), S. 71, und Bd. 72 (1870), S. 1.

8) **91.** Christoffel, l. c.7). Ricci und Levi-Civita, Méthodes de calcul différentiel absolu et leurs applications, Math. Ann. Bd. 54 (1901).

9) **91.** Von wichtigem Einfluß auf die Ausbildung dieser Geometrie waren die schon im Zeichen der Einsteinschen Gravitationstheorie erschienenen Arbeiten: Levi-Civita, Nozione di parallelismo in una varietà qualunque . . ., Rend. del Circ. Mat. di Palermo, t. 42 (1917), und Hessenberg, Vektorielle Begründung der Differentialgeometrie, Math. Ann. Bd. 78 (1917). Zu vollständigem Durchbruch kam sie in der Abhandlung des Verf. »Reine Infinitesimalgeometrie«, Math. Zeitschrift Bd. 2 (1918).

10) **100.** Der Begriff der Parallelverschiebung eines Vektors wurde für die Riemannsche Geometrie von Levi-Civita aufgestellt in der unter 9) zitierten Abhandlung; zu seiner Herleitung nahm aber Levi-Civita an, daß der Riemannsche Raum in einen höherdimensionalen Euklidischen eingebettet ist. Eine direkte Erklärung des Begriffs wurde vom Verf. in der 1. Aufl. dieses Buchs mit Hilfe des geodätischen Koordinatensystems gegeben; zu einem axiomatischen Grundbegriff, der für die Stufe der affinen Geometrie charakteristisch ist, wurde er in der unter 9) zitierten Abhandlung »Reine Infinitesimalgeometrie« erhoben. Siehe außerdem J. A. Schouten, Die direkte Analysis zur neueren Relativitätstheorie, Verh. d. Akad. v. Wetensch. te Amsterdam, 1919.

11) **120.** Hessenberg, l. c.[9]), S. 190.

12) **130.** Vgl. das große Werk Lie-Engel, Theorie der Transformationsgruppen, Leipzig 1888—93; betreffs dieses sog. »zweiten Fundamentalsatzes« und seiner Umkehrung insbesondere Bd. 1, S. 156, Bd. 3, S. 583 u. 659, ferner Fr. Schur, Math. Ann. Bd. 33 (1888), S. 54.

13) **133.** Eine andere gruppentheoretische Auffassung des Raumproblems liegt den in Kap. I,[2]) erwähnten Untersuchungen von Helmholtz und Lie zugrunde.

Kapitel III.

1) **134.** Wegen der Literatur zu der »speziellen Relativitätstheorie«, um die es sich in diesem Kapitel handelt, verweisen wir ein für allemal auf das Buch von Laue, Die Relativitätstheorie I (3. Aufl., Braunschweig 1919).

2) **145.** Helmholtz, Monatsber. d. Berliner Akademie, März 1876, oder Ges. Abhandlungen Bd. I (1882), S. 791. Eichenwald, Annalen der Physik Bd. 11 (1903), S. 1.

3) **152.** Das gilt nicht ganz ohne Einschränkung; siehe A. Korn, Mechanische Theorie des elektromagnetischen Feldes, eine Reihe von Abhandlungen in der Physikalischen Zeitschrift, Bd. 18, 19 u. 20 (1917/19).

4) **154.** A. A. Michelson, Sill. Journ. Bd. 22 (1881), S. 120. A. A. Michelson und E. W. Morley, ebenda Bd. 34 (1887), S. 333. E. W. Morley und D. C. Miller, Philosophical Magazine Bd. 8 (1904), S. 753 und Bd. 9 (1905), S. 680. H. A. Lorentz, Arch. Néerl. Bd. 21 (1887), S. 103 oder Ges. Abhandl. Bd. I, S. 341. Seit Aufstellung der Relativitätstheorie durch Einstein ist das Experiment vielfach diskutiert worden.

5) **155.** Vgl. z. B. Trouton und Noble, Proc. Roy. Soc., Bd. 72 (1903) S. 132. Lord Rayleigh, Philos. Mag. Bd. 4 (1902), S. 678; D. B. Brace, ebenda Bd. 7 (1904), S. 317, Bd. 10 (1905), S. 71 u. 591; B. Strasser, Annal. d. Physik Bd. 24 (1907), S. 137. Des Coudres, Wiedemanns Annalen Bd. 38 (1889), S. 71. Trouton und Rankine, Proc. Roy. Soc. Bd. 8 (1908), S. 420.

6) **155.** Zur Elektrodynamik bewegter Körper, Annal. d. Physik Bd. 17 (1905), S. 891.

7) **156.** Minkowski, »Die Grundgleichungen für die elektromagnetischen Vorgänge in bewegten Körpern«, Nachr. d. K. Ges. d. Wissensch. zu Göttingen, 1908, S. 53, oder Ges. Abhandl. Bd. II, S. 352.

8) **161.** Möbius, Der baryzentrische Calcül (Leipzig 1827; oder Werke, Bd. I), Kap. 6 u. 7.

9) **167.** Bei Berücksichtigung der Dispersion ist zu beachten, daß q' die Fortpflanzungsgeschwindigkeit in ruhendem Wasser für die Frequenz ν' ist, nicht für die (innerhalb und außerhalb des Wassers herrschende) Frequenz ν. — Sorgfältige experimentelle Bestätigungen des Resultats rühren her von Michelson und Morley, Americ. Journ. of science 31 (1886), S. 377; Zeeman, Versl. d. K. Akad. v. Wetensch.

Amsterdam 23 (1914), S. 245; 24 (1915), S. 18. Ähnlich dem Fizeauschen ist ein neuer Zeemanscher Interferenzversuch: Zeeman, Versl. Akad. v. Wetensch. Amsterdam 28 (1919), S. 1451; Zeeman und Snethlage, ebenda S. 1462. Über Interferenzversuche an drehenden Körpern vgl. Laue, Annal. d. Physik 62 (1920), S. 448.

10) **173.** Wilson, Philosoph. Transact. (A) Bd. 204 (1904), S. 121.

11) **177.** Röntgen, Sitzungsber. d. Berliner Akademie 1885, S. 195; Wied. Annalen Bd. 35 (1888), S. 264, und Bd. 40 (1890), S. 93. Eichenwald, Annalen d. Physik Bd. 11 (1903), S. 421.

12) **177.** Minkowski l. c.[7]).

13) **179.** W. Kaufmann, Nachr. d. K. Gesellsch. d. Wissensch. zu Göttingen 1902, S. 291; Ann. d. Physik Bd. 19 (1906), S. 487, u. Bd. 20 (1906), S. 639. A. H. Bucherer, Ann. d. Physik Bd. 28 (1909), S. 513, u. Bd. 29 (1909), S. 1063. S. Ratnowsky, Determination experimentale de la variation d'inertie des corpuscules cathodiques en fonction de la vitesse, Dissertation, Genf 1911. E. Hupka, Ann. d. Physik Bd. 31 (1910), S. 169. G. Neumann, Ann. d. Physik Bd. 45, (1914), S. 529, mit Nachtrag von C. Schaefer, ibid. Bd. 49, S. 934. — Zur Atomtheorie vgl. K. Glitscher, Spektroskopischer Vergleich zwischen den Theorien des starren und des deformierbaren Elektrons, Ann. d. Physik Bd. 52 (1917), S. 608.

14) **185.** Die Relativitätstheorie I (3. Aufl., 1919), S. 229.

15) **185.** Einstein l. c.[6]). Planck, Bemerkungen zum Prinzip der Aktion und Reaktion in der allgemeinen Dynamik, Physik. Zeitschr. Bd. 9 (1908), S. 828; Zur Dynamik bewegter Systeme, Ann. d. Physik Bd. 26 (1908), S. 1.

16) **186.** Herglotz, Ann. d. Physik Bd. 36 (1911), S. 453.

17) **186.** Ann. d. Physik, Bd. 37, 39, 40 (1912/13).

Kapitel IV.

1) **197.** Vgl. für diesen Paragraphen wie für das ganze Kapitel bis § 34 A. Einstein, Die Grundlagen der allgemeinen Relativitätstheorie (Leipzig, Joh. Ambr. Barth, 1916); Über die spezielle und die allgemeine Relativitätstheorie (gemeinverständlich; Sammlung Vieweg. 10. Aufl. 1920). E. Freundlich, Die Grundlagen der Einsteinschen Gravitationstheorie (4. Aufl., Springer 1920). M. Schlick, Raum und Zeit in der gegenwärtigen Physik (3. Aufl., Springer 1920). A. S. Eddington, Space, Time and Gravitation, Cambridge 1920 (eine ausgezeichnete populär-anschauliche und ausführliche Darstellung der allgemeinen Relativitätstheorie einschl. der hier in §§ 35, 36 besprochenen Erweiterung); vom selben Verfasser: Report on the Relativity Theory of Gravitation (London, Fleetway Press, 1919). M. Born, Die Relativitätstheorie Einsteins (Springer 1920). E. Cassirer, Zur Einsteinschen Relativitätstheorie (Berlin, Cassirer 1921). E. Kretschmann, Über den physikalischen Sinn der Relativitätspostulate, Ann. Phys. Bd. 53 (1917), S. 575. G. Mie, Die Einsteinsche Gravitationstheorie und das Problem der Materie, Phys. Zeitschr. Bd. 18 (1917), S. 551/556, 574/580 und 596/602. F. Kottler, Über die physikalischen Grundlagen der allgemeinen Relativitätstheorie, Ann. d. Physik Bd. 56 (1918), S. 401. Einstein, Prinzipielles zur allgemeinen Relativitätstheorie, Ann. d. Physik Bd. 55 (1918), S. 241.

2) **198.** Schon Newton empfand die Schwierigkeit; am nachdrücklichsten ist sie von E. Mach ausgesprochen worden. Vgl. die eingehenden Literaturangaben bei A. Voss, Die Prinzipien der rationellen Mechanik, in der Mathematischen Enzyklopädie, Bd. IV Art. 1, Absatz 13—17 (phoronomische Grundbegriffe).

3) **204.** Mathematische und naturwissenschaftliche Berichte aus Ungarn VIII (1890).

4) **206.** Über andere Versuche (Abraham, Mie, Nordström), die Theorie der Gravitation der durch die spezielle Relativitätstheorie geschaffenen Lage anzupassen, orientiert übersichtlich M. Abraham, Neuere Gravitationstheorien, Jahrbuch der Radioaktivität und Elektronik, Bd. XI (1915), S. 470.

5) **211.** F. Klein, Über die Differentialgesetze für die Erhaltung von Impuls und Energie in der Einsteinschen Gravitationstheorie, Nachr. d. Ges. d. Wissensch. zu

Göttingen 1918. Vgl. dazu die allgemeinen Formulierungen von E. Noether, Invariante Variationsprobleme, am gleichen Ort.

6) **216.** Nach A. Palatini, Deduzione invariantiva delle equazioni gravitazionali dal principio di Hamilton, Rend. del Circ. Matem. di Palermo t. 43 (1919), S. 203/212.

7) **217.** Einstein, Zur allgemeinen Relativitätstheorie, Sitzungsber. d. Preuß. Akad. d. Wissenschaften 1915, **44**, S. 778, mit Nachtrag auf S. 799. Ders., Die Feldgleichungen der Gravitation, ebenda 1915, S. 844.

8) **217.** H. A. Lorentz, Het beginsel van Hamilton in Einsteins theorie der zwaartekracht, Versl. d. Akad. v. Wetensch. te Amsterdam, XXIII, S. 1073; Over Einsteins theorie der zwaartekracht I, II, III, ibid. XXIV, S. 1389, 1759, XXV, S. 468. Tresling, ibid., Nov. 1916; Fokker, ibid., Jan. 1917, S. 1067. Hilbert, Die Grundlagen der Physik, 1. Mitteilung, Nachr. d. Gesellsch. d. Wissensch. zu Göttingen 1915, 2. Mitteilung 1917. Einstein, Hamiltonsches Prinzip und allgemeine Relativitätstheorie, Sitzungsber. d. Preuß. Akad. d. Wissensch. 1916, **42**, S. 1111. Klein, Zu Hilberts erster Note über die Grundlagen der Physik, Nachr. d. Ges. d. Wissensch. zu Göttingen 1918, und die unter 5) zitierte Arbeit. Weyl, Zur Gravitationstheorie, Ann. d. Physik Bd. 54 (1917), S. 117.

9) **218.** Nach Levi-Civita, Statica Einsteiniana, Rend. della R. Accad. dei Lincei 1917, vol. XXVI, ser. 5ª, 1° sem. pag. 458.

10) **221.** Vgl. auch Levi-Civita, La teoria di Einstein e il principio di Fermat, Nuovo Cimento, Ser. VI, vol. 16 (1918), S. 105—114.

11) **223.** F. W. Dyson, A. S. Eddington, C. Davidson, A Determination of the Deflection of Light by the Sun's Gravitational Field, from Observations made at the Total Eclipse of May 29, 1919; Philos. Transact. of the Royal Society of London, Ser. A, Vol. 220 (1920), S. 291—333. Vgl. dazu E. Freundlich, Die Naturwissenschaften 1920, S. 667—673.

12) **224.** Schwarzschild, Sitzungsber. d. Preuß. Akad. d. Wissenschaften 1914, S. 1201. Ch. E. St. John, Astrophys. Journal **46** (1917), S. 249 (vgl. auch die dort zitierten Arbeiten von Halm und Adams). Evershed und Royds, Kodaik. Obs. Bull. 39. L. Grebe und A. Bachem, Verhandl. d. Deutsch. Physik. Ges. **21** (1919), S. 454; Zeitschrift für Physik **1** (1920), S. 51. E. Freundlich, Physik. Zeitschr. **20** (1919), S. 561.

13) **224.** Einstein, Sitzungsber. d. Preuß. Akad. d. Wissensch. 1915, **47**, S. 831. Schwarzschild, Sitzungsber. d. Preuß. Akad. d. Wissensch. 1916, **7**, S. 189.

14) **224.** Am meisten Beachtung fand die Hypothese von H. Seeliger, Das Zodiakallicht und die empirischen Glieder in der Bewegung der inneren Planeten, Münch. Akad. Ber. 36 (1906). Vgl. dazu E. Freundlich, Astr. Nachr. Bd. 201 (Juni 1915), S. 48.

15) **225.** Einstein, Sitzungsber. d. Preuß. Akad. d. Wissensch. 1916, S. 688; dazu die Ergänzung: Über Gravitationswellen, ebenda 1918, S. 154. Ferner Hilbert, l. c. 8), 2. Mitteilung.

16) **228.** Phys. Zeitschr. Bd. 19 (1918), S. 33 und S. 156. Vgl. auch de Sitter, Planetary motion and the motion of the moon according to Einstein's theory, Amsterdam Proc. Bd. 19, 1916.

17) **229.** Vgl. Schwarzschild, l. c. 12); Hilbert l. c. 8), 2. Mitt.; J. Droste, Versl. K. Akad. v. Wetensch. Bd. 25 (1916), S. 163.

18) **235.** Vom n-Körper-Problem handelt J. Droste, Versl. K. Akad. v. Wetensch. Bd. 25 (1916), S. 460.

19) **235.** Vgl. dazu A. S. Eddington, Report [siehe das Zitat unter 1)], §§ 29, 30.

20) **236.** L. Flamm, Beiträge zur Einsteinschen Gravitationstheorie, Physik. Zeitschr. Bd. 17 (1916), S. 449.

21) **236.** H. Reißner, Ann. d. Physik Bd. 50 (1916), S. 106—120. Weyl l. c. 8). G. Nordström, On the Energy of the Gravitation Field in Einstein's Theory, Versl. d. K. Akad. v. Wetensch. Amsterdam, Vol. XX, Nr. 9, 10 (26. Jan. 1918). C. Longo,

Legge elettrostatica elementare nella teoria di Einstein, Nuovo Cimento, Ser. VI, vol. 15 (1918), S. 191.

22) **242.** Sitzungsber. d. Preuß. Akad. d. Wissensch. 1916, 18, S. 424. Ferner: H. Bauer, Kugelsymmetrische Lösungssysteme der Einsteinschen Feldgleichungen der Gravitation für eine ruhende, gravitierende Flüssigkeit mit linearer Zustandsgleichung. Sitzungsber. d. Akad. d. Wissensch. in Wien, math.-naturw. Kl., Abt. IIa, Bd. 127 (1918).

23) **242.** Weyl l. c.[8]), §§ 5, 6. Dazu eine Bemerkung in Ann. d. Physik Bd. 59 (1919).

24) **244.** Levi-Civita: *ds*² einsteiniani in campi newtoniani, Rend. Acc. dei Lincei, 1917/19.

25) **244.** A. De-Zuani, Equilibrio relativo ed equazioni gravitazionali di Einstein nel caso stazionario, Nuovo Cimento, Ser. VI, vol. 18 (1919), S. 5. A. Palatini, Moti Einsteiniani stazionari, Atti del R. Istit. Veneto di scienze, lett. ed arti, t. 78 (2) (1919), S. 589.

26) **246.** Einstein, Grundlagen (l. c.[1])], S. 49. Der hier durchgeführte Beweis nach Klein l. c.[5]).

27) **246.** Zur Diskussion über den physikalischen Sinn dieser Gleichungen siehe Schrödinger, Phys. Zeitschr. Bd. 19 (1918), S. 4; H. Bauer, ebenda S. 163; Einstein, ebenda S. 115, und endlich die Arbeit von Einstein, Der Energiesatz in der allgemeinen Relativitätstheorie, in den Sitzungsber. d. Preuß. Akad. d. Wissensch. 1918, S. 448, welche die volle Abklärung brachte und der wir hier folgen. Vgl. ferner F. Klein, Über die Integralform der Erhaltungssätze und die Theorie der räumlich-geschlossenen Welt, Nachr. d. Ges. d. Wissensch. zu Göttingen 1918.

28) **247.** Vgl. dazu G. Nordström, On the mass of a material system according to the Theory of Einstein, Akad. v. Wetensch. Amsterdam, Vol. XX, No. 7 (29. Dez. 1917).

29) **250.** Hilbert l. c.[8]), 2. Mitt.

30) **251.** Einstein, Sitzungsber. d. Preuß. Akad. d. Wissensch. 1917, 6, S. 142.

31) **255.** Weyl, Physik. Zeitschr. Bd. 20 (1919), S. 31.

32) **256.** Vgl. de Sitters Mitteilungen im Versl. d. Akad. v. Wetensch. te Amsterdam 1917 wie seine zusammenfassende Artikelreihe On Einsteins theory of gravitation and its astronomical consequences (Monthly Notices of the R. Astronom. Society); ferner F. Klein l. c.[27]).

33) **256.** Die in den beiden folgenden Paragraphen enthaltene Theorie wurde vom Verf. entwickelt in der Note »Gravitation und Elektrizität«, Sitzungsber. d. Preuß. Akad. d. Wissensch. 1918, S. 465. Vgl. auch Weyl, Eine neue Erweiterung der Relativitätstheorie, Ann. d. Physik Bd. 59 (1919). Einer ähnlichen Tendenz scheint die (mir in wesentlichen Punkten unverständlich gebliebene) Theorie von E. Reichenbächer (Grundzüge zu einer Theorie der Elektrizität und Gravitation, Ann. d. Physik, Bd. 52 [1917], S. 135; ferner Ann. d. Physik Bd. 63 [1920], S. 93—144) entsprungen zu sein. Betreffs anderer Versuche, Elektrizität und Gravitation unter einen Hut zu bringen. vgl. den unter [4]) zitierten Artikel von Abraham; ferner G. Nordström, Physik. Zeitschr 15 (1914), S. 504; E. Wiechert, Die Gravitation als elektrodynamische Erscheinung Ann. d. Physik, Bd. 63 (1920), S. 301.

34) **260.** Dieser Satz wurde von Liouville bewiesen: Note VI im Anhang zu G. Monge, Application de l'analyse à la géométrie (1850), S. 609.

35) **260.** Diese Tatsache, welche sich hier als eine Selbstverständlichkeit ergibt, ist schon früher bemerkt worden: E. Cunningham, Proc. of the London Mathem. Society, (2) vol. 8 (1910), S. 77—98; H. Bateman, ebenda, S. 223—264.

36) **268.** Vgl. auch W. Pauli, Zur Theorie der Gravitation und der Elektrizität von H. Weyl, Physik. Zeitschr. Bd. 20 (1919), S. 457—467. Zum Teil zu ähnlichen Konsequenzen gelangt Einstein durch eine abermalige Modifikation seiner Gravitationsgleichungen in der Arbeit: Spielen Gravitationsfelder im Aufbau der materiellen Elementarteilchen eine wesentliche Rolle? Sitzungsber. d. Preuß. Akad. d. Wissensch. 1919, S. 349—356.

37) **272.** Für derartige Existenztheoreme an einer singulären Stelle vgl. z. B. Picard, Traité d'Analyse, Bd. 3, S. 21.

38) **275.** Ann. d. Physik Bd. 39 (1913).

39) **276.** Siehe etwa das Buch von Sommerfeld, Atombau und Spektrallinien, Vieweg 1919.

40) **282.** Dies ist laut einer brieflichen Mitteilung von R. Weitzenböck bewiesen worden; seine Untersuchung wird demnächst in den Sitzungsber. d. Akad. d. Wissensch. in Wien publiziert werden.

41) **282.** W. Pauli, Merkur-Perihelbewegung und Strahlenablenkung in Weyls Gravitationstheorie, Verhandl. d. Deutschen physik. Ges. Bd. 21 (1919), S. 742.

42) **282.** Pauli l. c.[36]).

Sachregister.

(Die Zahlen verweisen, wenn nichts anderes bemerkt ist, auf die Seiten des Buchs.)

Druck von Breitkopf & Härtel in Leipzig.




454996
QC6
W49
UNIVERSITY OF CALIFORNIA LIBRARY



